Première spécialité / Equation cartésienne

ChingEval : 3 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

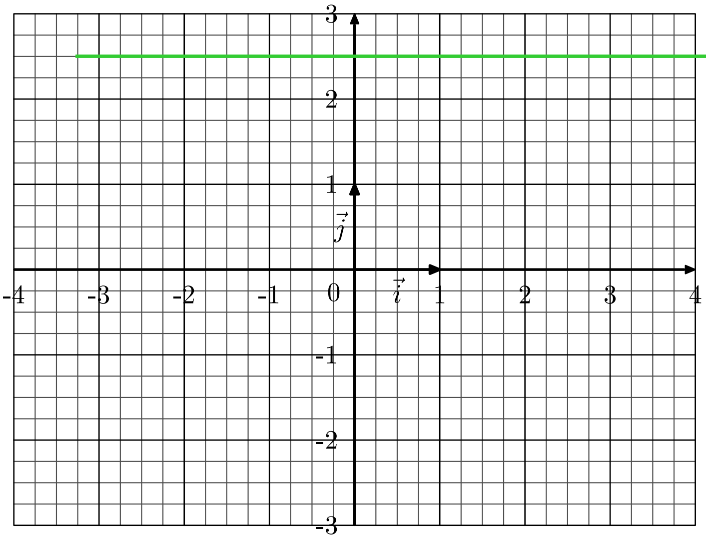
1. *Rappels : Vecteurs directeurs*

E.1 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$, on considère les quatre droites ci-dessous définies par leur équation cartésienne :

$(d_1) :\ 2x - 3y + 3 = 0 \quad ; \quad (d_2) :\ -2x - y + 1 = 0$

$(d_3) :\ 4x + 8y - 10 = 0 \quad ; \quad (d_4) :\ -3x + y + 4 = 0$

1. Pour chacune des droites, donner un point et un vecteur directeur de cette droite.
2. Tracer chacune de ces droites dans le repère ci-dessous :



E.2

Proposition : dans le plan muni d'un repère, on considère une droite ayant pour $\vec{u}\,(a\,;b)$ admet une équation cartésienne de la forme : $\quad -b{\cdot}x + a{\cdot}y + c = 0$

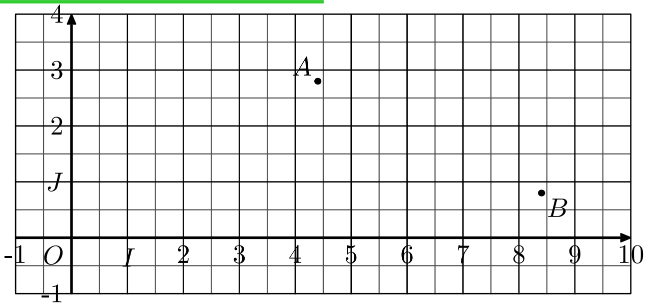
On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.
Pour chaque question, déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point A et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$:

a. $A(2\,;1)$ et $\vec{u}\,(2\,;3)$ b. $A(3\,;-2)$ et $\vec{u}\left(\dfrac{1}{2}\,;-1\right)$

c. $A(0\,;3)$ et $\vec{u}\,(-2\,;1)$ d. $A\left(-2\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $\vec{u}\left(3\,;-\dfrac{5}{3}\right)$

E.3 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$, on considère les points A et B de coordonnées :

$A\left(\dfrac{22}{5}\,;\dfrac{14}{5}\right) \quad ; \quad B\left(\dfrac{42}{5}\,;\dfrac{4}{5}\right)$



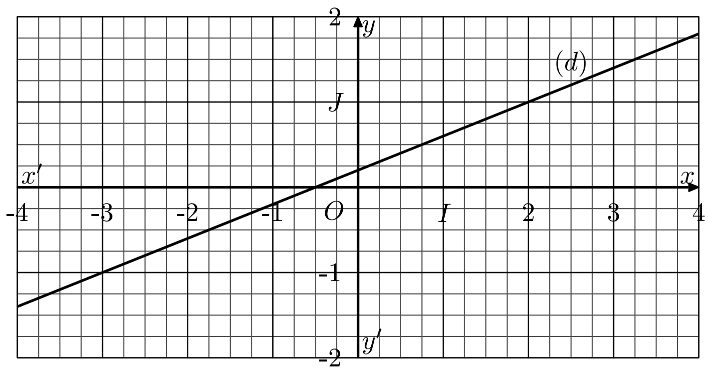
On considère également la droite (d) admettant pour équation cartésienne :

$(d) :\ 3{\cdot}x + 6{\cdot}y - 12 = 0$

1. a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   b. Justifier que le segment $[AB]$ a pour mesure $\sqrt{20}$.
2. Justifier que les droites (AB) et (d) sont parallèles.
3. a. Déterminer les points C et D intersection de la droite (d) respectivement avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
   b. Justifier que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

2. *Rappels : équations cartésiennes et intersection de droites*

E.4 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la droite (d) représentée ci-dessous :



1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).

2. On considère la droite (Δ) ayant pour équation cartésienne :
   $(\Delta):\ 5x+6y-6=0$
   a. Donner les coordonnées de deux points appartenant à la droite (Δ).
   b. Effectuer le tracé dans le repère ci-dessous de la droite (Δ).

3. Algébriquement, déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (Δ).

E.5 Résoudre les systèmes d'équations suivants :

a. $\begin{cases} x - 3y = 8 \\ 4x + y = -7 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 5x + 10y = 20 \end{cases}$

3. *Vecteurs normaux et équations de droites*

E.6

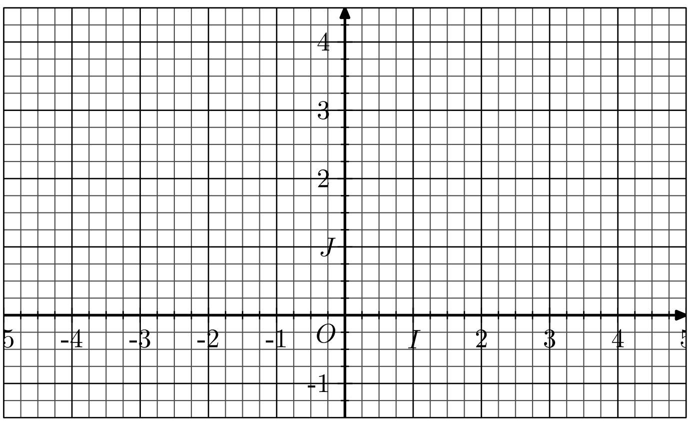
Définition : on appelle **vecteur normal** d'une droite, tout vecteur orthogonal aux vecteur directeur de cette droite.

Proposition : dans le plan muni d'un repère, on considère une droite (d) admettant le vecteur $\overrightarrow{u}(a\,;b)$ pour vecteur normal. Alors la droite (d) admet pour équation cartésienne :
$(d): a{\cdot}x+b{\cdot}y+c=0$ où $c\in\mathbb{R}$

On considère le plan munit d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.

1. Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne passant par le point A et admettant le vecteur $\overrightarrow{u}$ pour vecteur normal :
   a. $\overrightarrow{u}=(2\,;3)$ et $A(1\,;0)$
   b. $\overrightarrow{u}=(-1\,;1)$ et $A(-2\,;1)$

2. Tracer la représentation de chacune de ces droites dans le repère ci-dessous ainsi qu'un représentant de chaque vecteur $\overrightarrow{u}$ au point A correspondant :



E.7

Proposition : dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la droite (d) admettant le vecteur $\overrightarrow{u}(a\,;b)$ pour vecteur normal alors l'équation cartésienne de la droite (d) est de la forme : $(d):\ a{\cdot}x+b{\cdot}y+c=0 \quad c\in\mathbb{R}$

On considère le plan muni d'un repère $(O\,,I\,;J)$ orthonormé. Pour chaque question, déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) admettant le vecteur $\overrightarrow{u}$ pour vecteur normal et passant par le point A où :

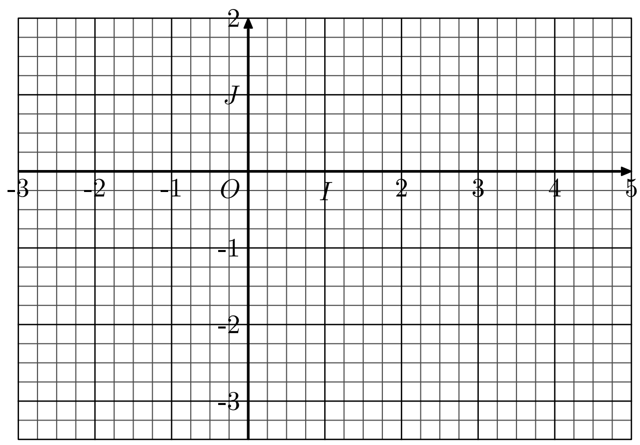
a. $\overrightarrow{u}(5\,;2)$; $A(1\,;1)$ b. $\overrightarrow{u}(-1\,;1)$; $A(4\,;-1)$

E.8 On considère le plan muni d'un repère $(O\,,I\,;J)$ orthonormé. Pour chaque question, déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) admettant le vecteur $\overrightarrow{u}$ pour vecteur normal et passant par le point A où :

a. $\overrightarrow{u}(1\,;-2)$; $A(-5\,;2)$ b. $\overrightarrow{u}(-2\,;-4)$; $A(-1\,;3)$

E.9 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les points $A(-2\,;-3)$ et $B(4\,;1)$. On note (d) la médiatrice du segment $[AB]$.

1. Déterminer les coordonnées du point K milieu du segment $[AB]$.
2. Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ normal à la droite (d).
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).
4. Tracer dans le repère ci-dessous la droite (d).



4. *Parallélisme et orthogonalité de droites*

E.10

Définition : dans le plan muni d'un repère, on appelle **déterminant** des deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x\,;y)$ et $\overrightarrow{v}(x'\,;v')$ le nombre, noté $\det\left(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$, définie par :
$\det\left(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)=x{\cdot}y'-x'{\cdot}y$

Proposition : dans le plan muni d'un repère, on considère les deux vecters $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non-nuls. On a :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff \det\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)=0$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\iff \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé :

1. On considère les deux droites (d_1) et (d_2) admettant pour équation cartésienne :
(d_1) : $x+2\cdot y-1=0$; (d_2) : $4\cdot x+8\cdot y+2=0$
Justifier que les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

2. On considère les deux droites (Δ_1) et (Δ_2) admettant pour équation cartésienne :
(Δ_1) : $4\cdot x+3\cdot y-1=0$; (Δ_2) : $-6\cdot x+8\cdot y+5=0$
Justifier que les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires.

E.11 Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$, on considère la droite (d) admettant pour équation cartésienne :
(d) : $2x-y+1=0$

1. La droite (d') est parallèle à la droite (d) et son équation cartésienne est : (d') : $5x+b\cdot y+4=0$ où $b\in\mathbb{R}$
Déterminer la valeur de b.

2. La droite (Δ) est perpendiculaire à la droite (d) et son équation cartésienne est :
(Δ) : $a\cdot x+3\cdot y-2=0$ où $a\in\mathbb{R}$
Déterminer la valeur de a.

5. *Intersection de droites*

E.12 Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$, on considère la droite (d) *(resp.* (d')*)* passe par le point $A(-2\,;1)$ *(resp.* $B(3\,;2)$*)* et admet le vecteur $\vec{u}(3\,;-1)$ *(resp.* $\vec{v}(1\,;1)$*)* pour vecteur normal.

1. Déterminer les équations cartésiennes des droites (d) et (d').

2. a. Justifier que les droites (d) et (d') sont sécantes.
b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (d').

E.13 On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$.

1. On note (d) la droite admettant le vecteur $\vec{u}(2\,;1)$ pour vecteur directeur et passant par le point $B(1\,;1)$.
Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d).

2. On note (d') la droite admettant le vecteur $\vec{v}(4\,;-3)$ pour vecteur normal et passant par le point $C(2\,;2)$.
Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d').

3. a. Justifier que les droites (d) et (d') sont sécantes.
b. Déterminer les coordonnées du point A, intersection des droites (d) et (d').

E.14 Dans le plan $\left(O\,;I\,;J\right)$, on considère les points A, B, C, D de coordonnées :

$$A(-1\,;-1)\ ;\ B(2\,;-4)\ ;\ C\left(\frac{22}{5}\,;\frac{4}{5}\right)\ ;\ D\left(\frac{1}{5}\,;\frac{7}{5}\right)$$

1. Soit K le milieu du segment $[AB]$. On considère l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points $M(x\,;y)$ du plan qui vérifie la relation : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KM}=0$
a. Montrer que tout point $M(x\,;y)$ appartenant à l'ensemble $(\mathcal{E})$ a ses coordonnées qui vérifient l'équation : $x-y-3=0$
b. Comment s'appelle l'ensemble $(\mathcal{E})$ relativement au segment $[AB]$.

2. a. Déterminer les coordonnées d'un vecteur orthogonal à la droite (CD).
b. En déduire l'équation de la droite (CD).

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (d').

6. *Projeté orthogonal*

E.15

Proposition-définition : dans le plan, on considère une droite (d) et un point A n'appartenant pas à (d). Il existe un unique point H tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite (d).

Le point H s'appelle le **projeté orthogonal du point A sur la droite (d)**.

Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé, on considère les points $A(-1\,;1)$, $B(3{,}5\,;-2)$, $M(4\,;2)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

2. Montrer que le point $H(2\,;-1)$ est le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB).

E.16 Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé, on considère les points $A\left(1\,;-\frac{1}{5}\right)$, $B(-2\,;1)$, $M\left(2\,;-\frac{7}{2}\right)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

2. a. Déterminer l'équation réduite de la droite (d) passant par le point M et perpendiculaire à la droite (AB).
b. Déterminer les coordonnées du point E, intersection des droites (d) et (AB).

7. Projeté orthogonal et aire

E.17 Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère les trois points : $A(-3;2)$; $B(3;5)$; $C(2;2)$

1. Soit (d) la droite passant par le point C est orthogonale à la droite (AB) :
   a. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ normal à la droite (d).
   b. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d).
   c. Déterminer les coordonnées du pied H de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.
2. Déterminer l'aire du triangle ABC.

E.18 Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère les trois points : $A(-1;-1)$; $B(3;3)$; $C(4;1)$

1. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).
3. Déterminer les coordonnées du point M, intersection de la droite (AB) et de la droite (d).
4. En déduire l'aire du triangle ABC.

E.19 Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère les trois points : $A\left(-\frac{2}{3};2\right)$; $B\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right)$; $C\left(5;\frac{11}{3}\right)$

1. Déterminer les coordonnées du pied H de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.
2. Déterminer l'aire du triangle ABC.

8. Cercle : caractérisation par le centre et le rayon

E.20

Définition : le **cercle de centre A et de rayon r** est l'ensemble des points M tels que : $OM = r$

On dit aussi qu'un cercle est l'ensemble des points équidistants au centre du cercle.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$ dont l'unité est le centimètre.

On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon r. Pour chaque question, déterminer l'équation du cercle :

a. $I(1;2)$ et $r{=}3\,cm$ b. $I(-3;1)$ et $r{=}5\,cm$

E.21 On considère le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé et le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(2;1)$ et de rayon 4.

Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

E.22 Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $K(3;-1)$ et de rayon 5.

1. Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.
2. Parmi les points ci-dessous, lesquels appartiennent au cercle $\mathscr{C}$:
   $M(-1;2)$; $N\left(\frac{8}{5};-\frac{29}{5}\right)$; $P\left(\frac{9}{5};\frac{2}{5}\right)$

9. Cercle : caractérisation par le diamètre

E.23

Proposition : Si un triangle ABC est inscrit dans un cercle et qu'un de ses côtés forme un diamètre alors ce triangle est rectangle et ce côté est son hypoténuse.

Conséquence : Pour un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ et pour tout point M de ce cercle : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$ dont l'unité est le centimètre.

On considère le cercle $\mathscr{C}'$ dont les points A et B sont diamétralement opposés. Déterminer l'équation du cercle dans chacun des cas suivants :

a. $A(-2;0)$ et $B(4;0)$ b. $A(2;-3)$ et $B(-1;2)$

10. Reconnaissance de l'équation d'un cercle

E.24

Proposition : Dans le plan, considérons l'équation cartésienne $x^2{+}y^2{+}a{\cdot}x{+}b{\cdot}y{+}c{=}0$, On note $\rho{=}\frac{a^2}{4}{+}\frac{b^2}{4}{-}c$.
L'ensemble $\mathcal{E}$ des points définis par cette équation cartésienne est :

- vide si $\rho{<}0$
- un point si $\rho{=}0$
- un cercle si $\rho{>}0$ dont le rayon est $\sqrt{\rho}$ et le centre

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère l'équation cartésienne :
(E) : $x^2+y^2-4{\cdot}x-3{\cdot}y-31=0$

1. Montrer que les points $A(-3;5)$ et $B\left(\frac{11}{2};\frac{13}{2}\right)$ appartiennent à l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions de (E).

2. En déduire la nature de l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation cartésienne (E)

E.25 On considère les trois équations cartésiennes suivantes :

a. $x^2+y^2+6x-4y+9=0$

b. $x^2+y^2-2x+6y+10=0$

c. $x^2+y^2+4x-4y+9=0$

1. Écrire chacune des équations ci-dessus sous la forme :
$(x-a)^2+(y-b)^2=c$
où a, b, c sont des nombres réels à déterminer.

2. Pour chaque équation, en déduire la nature de l'ensemble des points défini par cette équation et en préciser les éléments caractéristiques

E.26 On considère le plan muni d'un repère $(O;I;J)$.

1. On considère le cercle $\mathcal{C}$ admettant l'équation cartésienne : $x^2+y^2-6{\cdot}x+4y+4=0$

   Déterminer les éléments caractéristiques du cercle $\mathcal{C}$.

2. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ du plan dont les coordonnées des points vérifient l'équation cartésienne :
$x^2+y^2+2x-8y+17=0$

   Déterminer la nature de cet ensemble.

E.27 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les deux équations cartésiennes :

- $x^2+y^2+3x-y+5=0$
- $x^2+y^2-8x-6y-11=0$

Pour chacune de ces équations, déterminer la nature des ensembles qu'elles définissent et si possible, donner leurs éléments caractéristiques.

11. Etude de la parabole

E.28 Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé, on considère l'ensemble des points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation cartésienne :
(E) : $x^2-2{\cdot}x+y+3=0$

1. On considère les deux points $A(0;-3)$ et $B(2;-3)$.

   a. Montrer que les deux points A et B appartiennent à l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation cartésienne (E).

   b. Montrer que la droite d'équation $x=1$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

2. Soit h un nombre strictement positif.

   a. Montrer qu'il existe un unique point, qu'on notera M *(resp. N)*, de l'ensemble (E) ayant pour abscisse $1+h$ *(resp. $1-h$)*. On donnera les coordonnées de ces deux points en fonction de h.

   b. Montrer que la droite d'équation $x=1$ est la médiatrice du segment $[MN]$ pour tout réel h strictement positif.

E.29 Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $y=2{\cdot}x^2+x+3$

À tout point M de la parabole, différent du sommet de la parabole, on associe le point M' second point d'intersection de la parabole $\mathscr{P}$ avec la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point M.

Déterminer les coordonnées du point M afin que $MM'=2$.

12. Approfondissement : intersection cercle, parabole avec une droite

E.30 On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$.

1. a. Soit (d) la droite ayant pour vecteur directeur $(1;2)$ et passant par le point $A(0;-1)$.
   Déterminer l'équation cartésienne de cette droite.

   b. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(1;1)$ et de rayon 3.
   Déterminer l'équation cartésienne de ce cercle.

2. Dans cette question, on s'intéresse au point d'intersection de (d) et de $\mathscr{C}$.

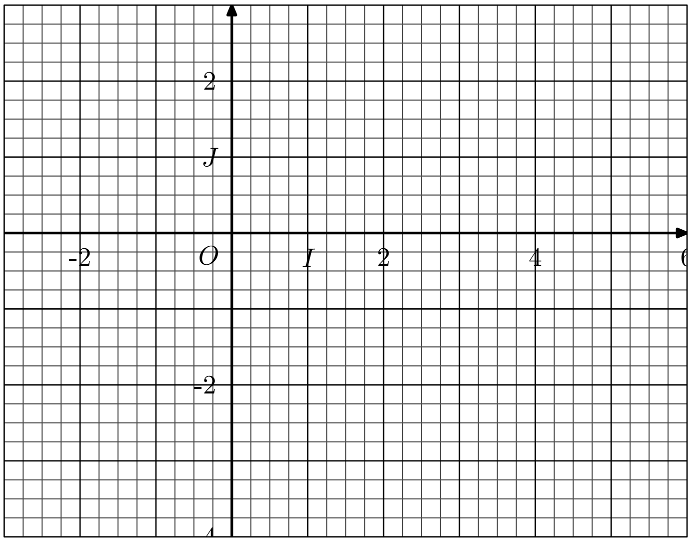
   a. Justifier que si $M(x;y)$ est un point d'intersection de la droite et du cercle alors ses coordonnées vérifient le système d'équation :
$$\begin{cases} x^2+y^2-2{\cdot}x-2{\cdot}y-7=0 \\ -2{\cdot}x+y+1=0 \end{cases}$$

   b. Par substitution, résoudre ce système d'équation.

E.31 On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et l'ensemble des points $\mathcal{E}$ défini par l'équation cartésienne :

$$(E):\ x^2+y^2-4{\cdot}x+6{\cdot}y+3=0$$

1. a. Écrire l'équation (E) sous la forme : $(x-a)^2+(y-b)^2=c$
   b. Justifier que l'ensemble $\mathcal{E}$ est un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera les caractéristiques.
2. a. Montrer que le point $A(3\,;0)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$.
   b. Déterminer une équation cartésienne de la tangente (d) au cercle $\mathscr{C}$ passant par le point A.
3. Après avoir montré que le point $B(-1\,;-2)$ est un point du cercle, donner une équation cartésienne de la droite (d') tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point B.
4. Déterminer les coordonnées du point M, intersection des droites (d) et (d').
5. Tracer dans le repère ci-dessous le cercle $\mathscr{C}$ *(ou une partie)* et ses deux tangentes.



E.32 On considère les deux cercles :

- $\mathscr{C}$ de centre $A(1\,;-2)$ et de rayon 2
- $\mathscr{C}'$ admettant pour diamètre $[BC]$ où $B(3\,;4)$ et $C(5\,;-2)$

1. Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.
2. Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}'$.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces deux cercles.

13. *Exercices non-classés*

E.33 On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$; les points A et B ont pour coordonnées respectives $(2\,;-3)$ et $(-1\,;1)$; on note I le milieu du segment $[AB]$; M représente un point quelconque du plan et ses coordonnées sont notées $(x\,;y)$:

1. On s'intéresse au lieu géométrique $\mathcal{E}$ défini par la relation : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=2$
   a. Déterminer une relation entre x et y caractérisant l'ensemble $\mathcal{E}$.
   b. Vérifier que le point de coordonnée $\left(2\,;\sqrt{6}-1\right)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.
   c. Quelle est la nature géométrique de $\mathcal{E}$? Donner ses éléments caractéristiques.
2. On s'intéresse au lieu géométrique $\mathcal{F}$ défini par la relation : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM}=-7{,}5$
   a. Déterminer une relation sur les coordonnées des points M appartenant à l'ensemble $\mathcal{F}$.
   b. Quelle est la nature géométrique de $\mathcal{F}$? Donner les éléments caractéristiques de $\mathcal{F}$.

