Première spécialité / Etude de suites

ChingEval : 7 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. *Variations des premiers termes de suites arithmétiques et géométriques*

E.1

Définition :

Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- la suite (u_n) est dite **strictement croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} > u_n$
- la suite (u_n) est dite **strictement décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} < u_n$
- la suite (u_n) est dite **constante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = u_n$

On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme 5 et de raison 2.

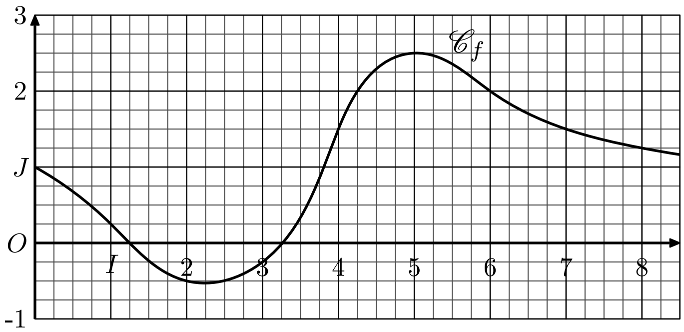
1. Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Exprimer la valeur du terme u_n en fonction de son rang n.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant à la variation des termes de la suite (u_n) ?

E.2 Dans chaque cas, préciser, si possible, le sens de variation des suites :

1. (u_n) est une suite arithmétique dont le premier terme est positif et la raison négative.
2. (v_n) est une suite géométrique dont le premier terme est négatif et la raison est strictement supérieure à 1.
3. (w_n) est une suite géométrique dont le premier terme est positif et la raison est négative.

2. *Variations et conjecture : suite définie explicitement*

E.3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée dans le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



On définit la suite (u_n) par la relation :
$u_n = f(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que le terme u_4 a pour valeur $\dfrac{3}{2}$.
2. a. Déterminer la valeur des termes :
   u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5 ; u_6

   b. Dire si les affirmations ci-dessous sont exacts ou non :
   - "*Les termes de la suite (u_n) pour $i \in \{0\,;1\,;2\}$ sont ordonnés dans l'ordre décroissant.*"
   - "*Les termes de la suite (u_n) pour $i \in \{3\,;4\,;5\}$ sont ordonnés dans l'ordre croissant.*"

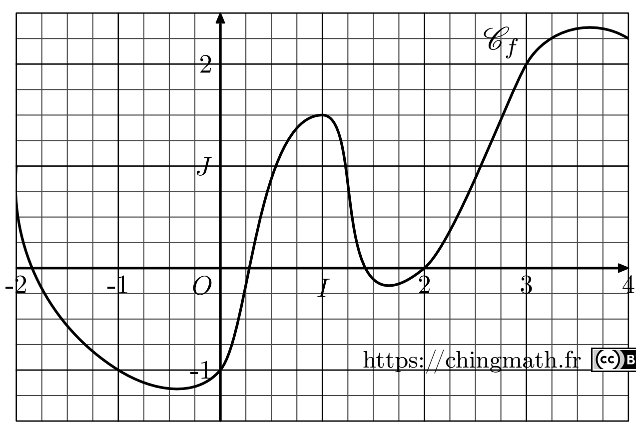
E.4 On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$:

$$u_n = 2{\cdot}n^2 - n + 1 \quad ; \quad v_n = \frac{4-n}{1+n}$$

1. Déterminer les 5 premiers termes de ces deux suites.
2. Conjecturer le sens de variations de la suite (u_n) et (v_n).

3. *Variations et conjecture : suite définie par récurrence*

E.5 On considère la fonction f définie sur $[-2\,;4]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Compléter le tableau suivant avec les premiers termes de la suite (u_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n										

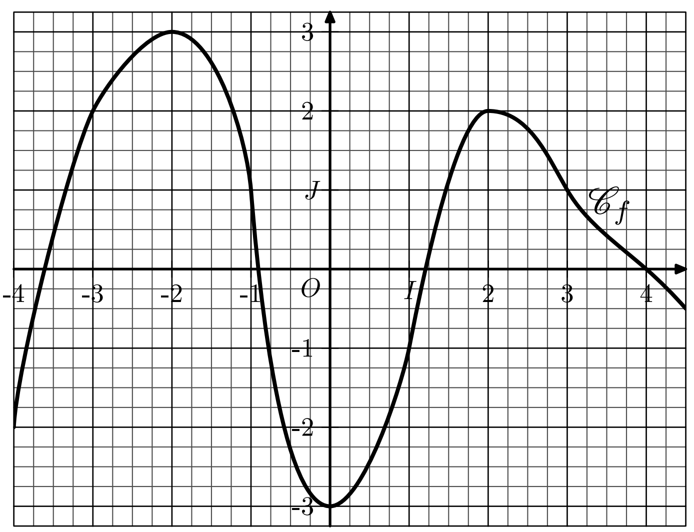
2. Pour chacune des affirmations ci-dessous, préciser si elles sont vraies ou fausses :
   - *"la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$."*
   - *"la suite (u_n) est constante à partir du rang 3."*

E.6

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par : $u_0=2$; $u_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot u_n-\frac{1}{4}$
   a. Déterminer les 4 premiers termes de la suite (u_n).
   b. Conjecturer la variation de la suite (u_n)
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par : $v_0=-1$; $v_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot v_n-\frac{1}{4}$
   a. Justifier les comparaisons : $v_0<v_1<v_2<v_3$
   b. Conjecturer la variation de la suite (v_n)

4. Variations et conjecture : suites périodiques

E.7 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère la représentation $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$:



1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ définie par :
   $$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$$
   a. Déterminer la valeur des 6 premiers termes de la suite (u_n).
   b. Déterminer la valeur du terme u_{100}.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ définie par :
   $$v_0 = -2 \quad ; \quad v_{n+1} = f(v_n)$$
   Déterminer la valeur du terme v_{100}.

E.8 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1-u_n}{1+u_n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. Montrer qu'on a la relation suivante :
   $$u_{n+2} = u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
3. Que peut-on dire des termes de cette suite?
4. On admet que le terme de rang n de la suite (u_n) admet une expression de la forme :
   $$u_n = a\cdot\left[1-(-1)^n\right]+b \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
   où a et b sont deux nombres réels $(a,b\in\mathbb{R})$.
   Déterminer les valeurs de a et de b.

5. Variations : suites explicites

E.9 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme de rang n est donné par la formule : $u_n = n^2-7\cdot n+1$

1. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n											

2. Après avoir donner le tableau de variations de la fonction f dont l'image de x est définie par :
   $$f(x) = x^2-7\cdot x+1$$
   Établir que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

6. *Variations : suites explicites avec dérivées*

E.10 La suite (u_n) est définie par : $u_n = \frac{2 \cdot n^2+1}{2 \cdot n+5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2 \cdot x^2+1}{2 \cdot x+5}$

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Établir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression sur $\mathcal{D}_f$: $f'(x) = \dfrac{4 \cdot x^2+20 \cdot x-2}{(2 \cdot x+5)^2}$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Justifier que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.
5. Peut-on dire que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$?

7. *Variations des suites arithmétiques*

E.11 On considère la suite (u_n) arithmétique, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, de premier terme de 2 et de raison 3 :

1. Donner l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction de leur rang n.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression $u_{n+1} - u_n$
3. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Proposition : soit (u_n) une suite arithmétique :

- (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, sa raison est strictement négative ;
- (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, sa raison est strictement positive ;
- (u_n) est constante si, et seulement si, sa raison est nulle ;

E.12 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

1. Relier les assertions correspondantes :

	• $u_0>0$ et $r>0$
(u_n) est croissante •	
	• $u_0>0$ et $r<0$
	• $u_0<0$ et $r>0$
(u_n) est décroissante •	
	• $u_0<0$ et $r<0$

2. À quelle*(s)* condition*(s)* une suite arithmétique est constante?

E.13 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 3. Justifier que la suite (u_n) est une suite croissante sur $\mathbb{N}$.

E.14 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$u_n = -32n + 102 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que cette suite est décroissante.

E.15 Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$ et dont le terme de rang n admet l'expression :
$v_n = 4 - n$
Justifier que la suite (v_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

8. *Variations des suites géométriques*

E.16 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ géométrique de premier terme 3 et de raison 0,1.

1. Exprimer en fonction de n le terme de la suite (u_n) de rang n.
2. Simplifier et factoriser l'expression $u_{n+1} - u_n$.
3. En déduire le sens de variations de la suite (u_n).

Proposition : soit (u_n) géométrique de raison q.

- Si $u_0>0$ et $q>1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $q=1$ alors la suite (u_n) est constante.
- Si $u_0>0$ et $0<q<1$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

E.17 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

Indiquer, si possible, dans le tableau ci-dessous le sens de variation de la suite (u_n) en fonction de la valeur de ses éléments caractéristiques :

	$0<q<1$	$q=1$	$q>1$
$u_0<0$			
$u_0=0$			
$u_0>0$			

E.18 Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison r.

1. Relier les assertions correspondantes :

(u_n) est croissante •

(u_n) est décroissante •

- $u_0>0$ et $q>1$
- $u_0>0$ et $0<q<1$
- $u_0>0$ et $-1<q<0$
- $u_0>0$ et $q<-1$
- $u_0<0$ et $q>1$
- $u_0<0$ et $0<q<1$
- $u_0<0$ et $-1<q<0$
- $u_0<0$ et $q<-1$

2. À quelle*(s)* condition*(s)* une suite géométrique est constante?

9. *Variations : différence de termes consécutifs (suites explicites)*

E.19 La suite (u_n) est définie par la formule explicite :

$$u_n = \frac{5+n}{n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).

E.20 Soit (w_n) la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$w_n = 2n - \frac{25}{n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Montrer que la suite (w_n) est croissante.

E.21 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation explicite :

$$u_n = n^3 - 2n^2 - 3n$$

1. Donner l'expression réduite de : $u_{n+1}-u_n$.
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante pour n supérieur à 2.

E.22 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{n^2+10}{2\cdot n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Justifier que (u_n) est croissante à partir du rang 3.

10. *Variations : différence de termes consécutifs (suites définies par récurrence)*

E.23 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -3 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n - 3n + 7$$

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Déterminer à partir de quel rang la suite (u_n) est décroissante.

11. *Variations : quotient de termes consécutifs*

E.24

1. Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme 2 et de raison 4. Justifier que la suite (u_n) est croissante.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ et dont le terme de rang n admet l'expression : $v_n = 3\times 0{,}2^n$
Justifier que la suite (v_n) est décroissante.

E.25 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{3^n}{4} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Montrer que (u_n) est strictement croissante.

E.26 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par : $u_n = \dfrac{5^n}{n+2}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante sur $\mathbb{N}$.

E.27 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2^n}{n^2+1}$$

Déterminer à partir de quel rang la suite (u_n) est croissante.

12. *Variations à partir d'un rang : quotient de termes consécutifs*

E.28 On considère la suite (u_n) définie par la formule explicite :

$$u_n = \frac{1{,}2^n}{n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*.$$

1. Donner l'expression simplifiée de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
2. Montrer que (u_n) est croissante à partir du rang 5.

E.29 Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par la relation : $u_n = n\times(0{,}4)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

E.30 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la formule explicite :

$$u_n = \frac{1{,}2^n}{n^2} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*.$$

1. Établir l'identité suivante pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{n^2-10{\cdot}n-5}{5{\cdot}(n+1)^2}$$
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 11.

13. *Lien entre formule récurrente et formule explicite*

E.31

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme de rang n est définie par la relation de récurrence :
$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}{\cdot}u_n + 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n).
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie explicitement par :
$$v_n = \frac{1}{2}{\cdot}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n + \frac{3}{2}$$
   a. Calculer les 4 premiers termes de la suite (v_n)
   b. Établir que pour tout entier naturel n, on a :
$$v_{n+1} - \frac{1}{3}{\cdot}v_n = 1$$
3. En déduire l'égalité des suites (u_n) et (v_n).

E.32

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite définie par la relation de récurrence et la condition initiale :
$$u_1 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{u_n}} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$
Calculer les 4 premiers termes de la suite.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n a pour valeur : $v_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
   a. Donner la valeur de v_1.
   b. Établir l'identité suivante pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$$1 + \frac{1}{v_n} = n+1$$
   c. En déduire que la suite (v_n) suit la relation de récurrence ci-dessous pour tout entier naturel non-nul :
$$v_{n+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{v_n}}$$
3. Que pouvez-vous dire des suites (u_n) et (v_n) ?

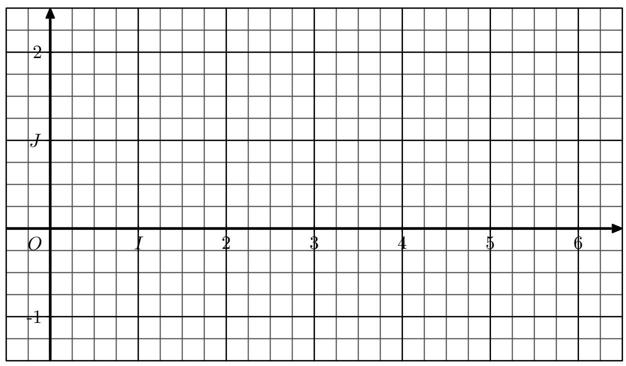
14. *Notions de limites : suites définies explicites*

E.33 On considère la suite (u_n) dont les termes sont définis pour tout entier naturel n par la relation : $u_n = \dfrac{10{\cdot}n-1}{5{\cdot}n+1}$

1. a. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs ci-dessous avec des valeurs arrondies au centième près :

n	0	1	2	3	4	5
u_n						

   b. Dans le repère ci-dessous et pour n , placer la suite des points (A_n) dont les coordonnées sont définies par : $A_n(\,n\,;u_n\,)$



2. a. À l'aide de la calculatrice, observer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé de la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{10{\cdot}x-1}{5{\cdot}x+1}$$
   b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

E.34 À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de chacun des suites définies ci-dessous lorsque n tend vers $+\infty$:

- la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par : $u_n=\dfrac{4\cdot n}{1+12\cdot n}$
- la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par : $v_n=n^2+2\cdot n-3$
- la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par : $w_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$

15. *Notions de limites : somme des termes d'une suite*

E.35 On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 5 et de raison $\dfrac{2}{3}$.

On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n) : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}+u_n$

1. Justifier que la suite (S_n) est croissante.
2. Donner l'expression du terme S_n en fonction de n.
3. a. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous en arrondissant les valeurs au millième près :

n	0	1	2	10	20	24
S_n						

   b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

   c. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite des termes de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

E.36 Un coureur se lance un défi : il souhaite faire le tour de l'Europe.
Le premier jour, il parcourt $50\,km$. Par la fatigue, de jour en jour, sa distance parcourue quotidiennement se réduit de $1\,\%$.

On note u_n la longueur parcourue par le coureur le n-ième jour. En supposant que le coureur poursuit indéfiniment sa course, on obtient une suite (u_n) définie pour tout entier naturel non-nul.

1. Déterminer la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. a. Quelle est la nature de la suite (u_n)? Donner les éléments caractéristiques de la suite (u_n).

   b. Exprimer le terme u_n en fonction du rang n.

   c. Quelle distance sera parcourue par le coureur le 100^e jour? On arrondira la valeur au dixième de kilomètre.
3. Pour tout entier naturel n, on note S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n) : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

   a. Exprimer la somme S_n en fonction du rang n.

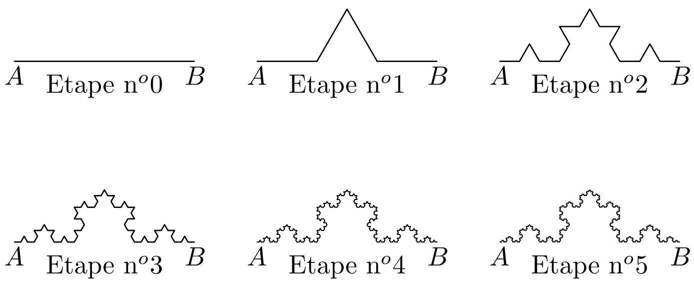
   b. Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième de kilomètres :

n	10	100	500	750	1000
u_n					

E.37 On construit le flocon de Heige Von Koch de la manière suivante :

- On part d'un segment $[AB]$ de longueur $9\,cm$.
- Pour passer d'une étape à la suivante, on découpe chaque segment de la figure en trois parties égales et on remplace le segment "*central*" par un triangle équilatéral.

Voici la représentation des 6 premières étapes de cette construction :



À chaque étape n, on note u_n la longueur de la "*ligne brisée*" ainsi obtenue. On construit ainsi une suite de nombres (u_n) définie pour tout entier naturel n.

1. Déterminer la mesure des trois premiers termes de la suite (u_n).
2. a. À l'étape n, exprimer le nombre de segments s_n formant la "*ligne brisée*" en fonction de n.

   b. À l'étape n, exprimer la longueur ℓ_n de chacun des segments formant la "*ligne brisée*" en fonction de n.
3. On note L_n la longueur de la "*ligne brisée*" à l'étape n. On obtient ainsi une suite (L_n) de termes numériques définie pour tout entier naturel n.

   a. Exprimer les termes de la suite (L_n) en fonction de leur rang n.

   b. Compléter le tableau ci-dessous en arrondissant les valeurs au centième de centimètre près :

n	0	1	10	20	30
L_n					

16. Approfondissement : suite arithmético-géométrique et variation

E.38 On considère la suite (u_n) définie par la relation :

$u_0=-2 \quad ; \quad u_{n+1}=2{\cdot}u_n+0{,}5 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. On définit la suite (v_n) définie par la relation :
$v_n=u_n+0{,}5 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   a. Établir, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'égalité : $\quad v_{n+1}=2{\cdot}v_n$
   b. Donner la nature et les éléments caractéristiques de la droite (v_n).
   c. Donner le sens de variation de la suite (v) sur $\mathbb{N}$. Justifier votre réponse.
2. a. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, établir : $\quad u_{n+1}-u_n=v_{n+1}-v_n$
   b. En déduire le sens de variations de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$.

E.39 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$u_1=0 \quad ; \quad u_{n+1}=0{,}2{\cdot}u_n+0{,}04 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

1. On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}^*$ par la relation :
$v_n=u_n-0{,}05$
   a. Établir l'égalité pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\quad v_{n+1}=0{,}2{\cdot}v_n$
   b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la suite (v_n).
2. a. Établir l'égalité pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$u_{n+1}-u_n=v_{n+1}-v_n$
   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)

17. Approfondissement : suite arithmético-géométrique et formule explicite

E.40 On considère la suite (u_n) définie par la relation :

$u_0=8 \quad ; \quad u_{n+1}=0{,}95{\cdot}u_n+0{,}5 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. On définit la suite (v_n) définie par la relation :
$v_n=u_n-10 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   a. Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95. On précisera la valeur de son premier terme.
   b. Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n.
2. En déduire une expression de la suite (u_n) en fonction de n
3. Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

E.41 On souhaite étudier la suite (u_n) de premier terme $u_0=5$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+4 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On définit la suite (v_n) par : $\quad v_n=u_n-6 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et sa raison.
   b. Exprimer v_n en fonction du rang n.
2. a. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   b. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, établir que : $\quad u_{n+1}-u_n=\dfrac{2}{3}{\cdot}\Big(\dfrac{1}{3}\Big)^n$
   c. En déduire le sens de variations de la suite (u_n).

E.42 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0=3 \quad ; \quad u_{n+1}=\frac{3}{4}{\cdot}u_n+\frac{1}{2} \qquad \text{pour tout entier } n\in\mathbb{N}$$

1. On considère la suite (v_n) définie par la relation suivante pour tout entier naturel n :
$$v_n=\frac{1}{2}{\cdot}u_n-1$$
   a. Établir l'égalité ci-dessous pour tout entier naturel n :
$$v_{n+1}=\frac{3}{4}{\cdot}v_n$$
   b. Donner le sens de variation de la suite (v_n).
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

18. Approfondissement : suite définies conjointements

E.43 On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par les relations :

$$\begin{cases} u_0=3 \\ v_0=1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{2{\cdot}u_n+v_n}{2} \\[2mm] v_{n+1}=\dfrac{u_n+3{\cdot}v_n}{3} \end{cases}$$

1. Déterminer les trois premiers termes des suites (u_n) et (v_n).
2. On admet que les termes des suites (u_n) et (v_n) sont des nombres strictement positifs.
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont croissantes sur $\mathbb{N}$.

19. *Exercices non-classés*

E.44

1. a. On considère la suite $\big(u_n\big)$ définie par la relation :

$$u_0=0 \quad ; \quad u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Déterminer les quatre premiers termes de la suite $\big(u_n\big)$.

   b. On considère la suite $\big(v_n\big)$ définie par la relation :

$$v_n=\frac{n}{n+1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

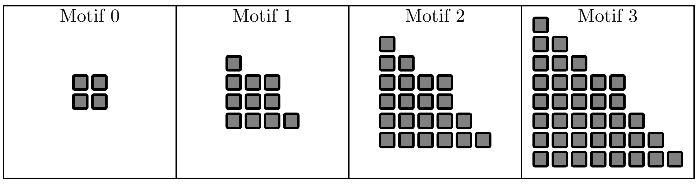
Déterminer les quatre premiers termes de la suite $\big(v_n\big)$.

   c. Quelle conjecture peut-on faire à propos des suites $\big(u_n\big)$ et $\big(v_n\big)$?

2. a. Simplifier l'expression suivante : $v_{n+1}\cdot\big(2-v_n\big)$

   b. Justifier que les deux suites $\big(u_n\big)$ et $\big(v_n\big)$ sont égales.

E.45 On considère la construction de motif pas à pas dont les cinq premières étapes sont représentées ci-dessous :



1. Combien de carreaux faut-il pour construire le motif 4? le motif 5?

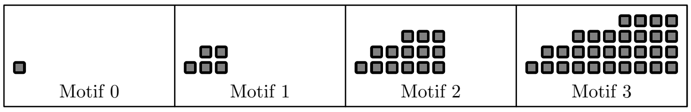
2. On note u_n le nombre de carreaux nécessaire pour construire le motif n.

   a. Donner la formule de récurrence vérifiée par la suite $\big(u_n\big)$.

   b. Établir que les termes de la suite $\big(u_n\big)$ admettent pour formule explicite :

$$u_n=2n^2+5n+4$$

E.46 On considère la construction de motif pas à pas dont les cinq premières étapes sont représentées ci-dessous :



1. Combien de carreaux faut-il pour construire le motif 4? le motif 5?

2. On note u_n le nombre de carreaux nécessaire pour construire le motif n.

   a. Donner la formule de récurrence vérifiée par la suite $\big(u_n\big)$.

   b. Établir que les termes de la suite $\big(u_n\big)$ vérifient la formule explicite :

$$u_n=\frac{1}{3}\cdot n^3+\frac{3}{2}\cdot n^2+\frac{13}{6}\cdot n+1$$

