Première spécialité / Etude de suites

ChingQuizz : 7 exercices disponibles pour l'´evaluation par QCM :

1. Variations des premiers termes de suites arithmétiques et géométriques

E.1

Définition :

Soit (u_n) une suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

- la suite (u_n) est dite **strictement croissante** si pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} > u_n$
- la suite (u_n) est dite **strictement décroissante** si pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} < u_n$
- la suite (u_n) est dite **constante** si pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = u_n$

On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme 5 et de raison 2.

1. Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Exprimer la valeur du terme u_n en fonction de son rang n.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant à la variation des termes de la suite (u_n) ?

E.2 On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme 24 et de raison $\dfrac{1}{2}$.

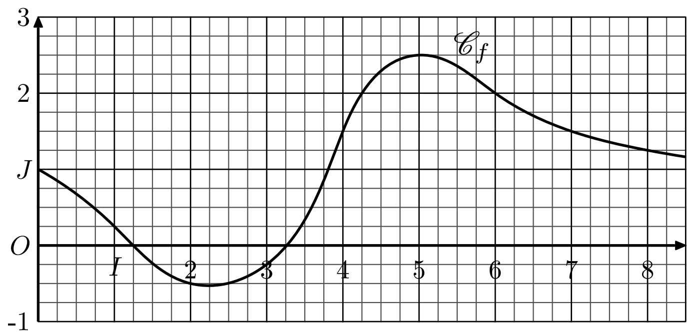
1. Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Donner l'expression du terme général de la suite (u_n) en fonction de son rang n.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant à la variation des termes de la suite (u_n) ?

E.3 Dans chaque cas, préciser, si possible, le sens de variation des suites :

1. (u_n) est une suite arithmétique dont le premier terme est positif et la raison négative.
2. (v_n) est une suite géométrique dont le premier terme est négatif et la raison est strictement supérieure à 1.
3. (w_n) est une suite géométrique dont le premier terme est positif et la raison est négative.

2. Variations et conjecture : suite définie explicitement

E.4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée dans le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



On définit la suite (u_n) par la relation :
$u_n = f(n)$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$.

1. Justifier que le terme u_4 a pour valeur $\dfrac{3}{2}$.
2. (a) Déterminer la valeur des termes :
   u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5 ; u_6
   (b) Dire si les affirmations ci-dessous sont exacts ou non :
   - *"Les termes de la suite (u_n) pour $i\in\{0\,;1\,;2\}$ sont ordonnés dans l'ordre décroissant."*
   - *"Les termes de la suite (u_n) pour $i\in\{3\,;4\,;5\}$ sont ordonnés dans l'ordre croissant."*

E.5 On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$:

$$u_n = 2{\cdot}n^2 - n + 1 \quad ; \quad v_n = \frac{4-n}{1+n}.$$

1. Déterminer les 5 premiers termes de ces deux suites.
2. Conjecturer le sens de variations de la suite (u_n) et (v_n).

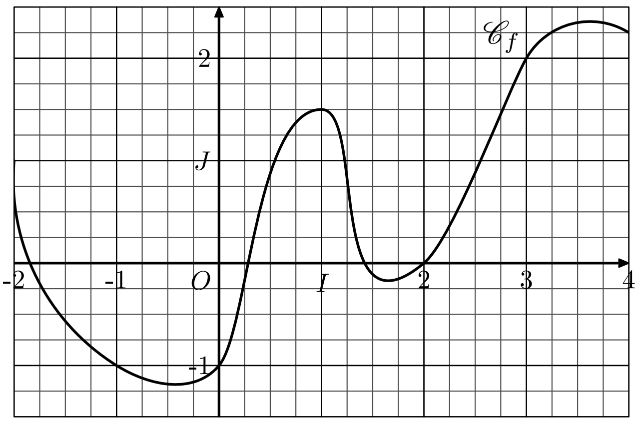
E.6 On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout nombre entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par :

$$u_n = n^3 - 3{\cdot}n^2 + 2{\cdot}n + 2 \quad ; \quad v_n = 3{\cdot}\big[1+(-1)^n\big] + 2$$

1. Déterminer les 5 premiers termes des suites (u_n) et (v_n).
2. Pour chacune des conjectures, dire si elles sont probables ou non :
   - *"la suite (u_n) est constante."*
   - *"la suite (v_n) est constante."*

3. Variations et conjecture : suite définie par récurrence

E.7 On considère la fonction f définie sur $[-2\,;4]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Compléter le tableau suivant avec les premiers termes de la suite (u_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n										

2. Pour chacune des affirmations ci-dessous, préciser si elles sont vraies ou fausses :

- *"la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$."*
- *"la suite (u_n) est constante à partir du rang 3."*

E.8

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par : $u_0=2$; $u_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot u_n-\frac{1}{4}$

   a. Déterminer les 4 premiers termes de la suite (u_n).

   b. Conjecturer la variation de la suite (u_n)

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par : $v_0=-1$; $v_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot v_n-\frac{1}{4}$

   a. Justifier les comparaisons : $v_0<v_1<v_2<v_3$

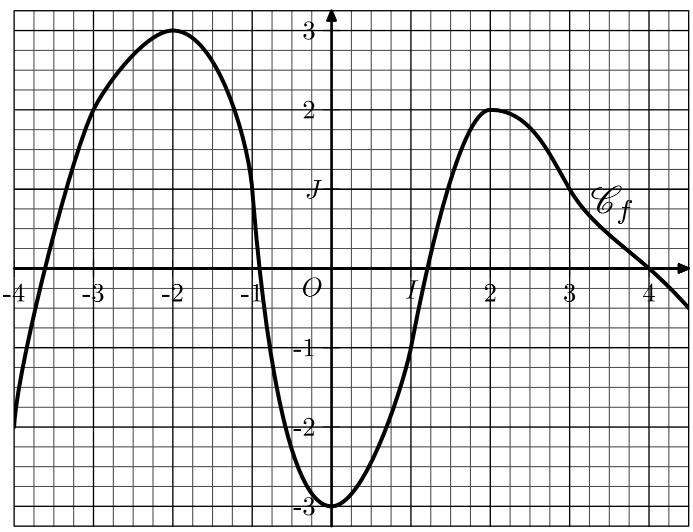
   b. Conjecturer la variation de la suite (v_n)

E.9 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par : $u_0 = 1$; $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+\dfrac{2}{u_n}}$

1. Déterminer les 5 premiers termes de la suite (u_n).
2. Conjecturer le sens de variations de la suite (u_n).
3. Conjecturer l'expression explicite du terme général de la suite (u_n) en fonction de son rang n.

4. *Variations et conjecture : suites périodiques*

E.10 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère la représentation $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$:



1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ définie par :
   $$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

   a. Déterminer la valeur des 6 premiers termes de la suite (u_n).

   b. Déterminer la valeur du terme u_{100}.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ définie par :
   $$v_0 = -2 \quad ; \quad v_{n+1} = f(v_n)$$
   Déterminer la valeur du terme v_{100}.

E.11 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :
$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1-u_n}{1+u_n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. Montrer qu'on a la relation suivante :
   $$u_{n+2} = u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
3. Que peut-on dire des termes de cette suite?
4. On admet que le terme de rang n de la suite (u_n) admet une expression de la forme :
   $$u_n = a\cdot\left[1-(-1)^n\right]+b \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
   où a et b sont deux nombres réels $(a,b\in\mathbb{R})$.
   Déterminer les valeurs de a et de b.

5. *Variations : suites explicites*

E.12 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$u_n = -2{\cdot}n^2 - 3{\cdot}n + 2 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$

Étudier la monotonie de chacune des suites ci-dessous, en étudiant la fonction f vérifiant la relation :
$u_n = f(n) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$

E.13 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme de rang n est donné par la formule : $u_n = n^2 - 7{\cdot}n + 1$

1. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n											

2. Après avoir donné le tableau de variations de la fonction f dont l'image de x est définie par :
$f(x) = x^2 - 7{\cdot}x + 1$
Établir que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

6. Variations : suites explicites avec dérivées

E.14 La suite (u_n) est définie par :

$u_n = \dfrac{2{\cdot}n^2+1}{2{\cdot}n+5}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2{\cdot}x^2+1}{2{\cdot}x+5}$

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Établir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression sur $\mathcal{D}_f$: $f'(x) = \dfrac{4{\cdot}x^2+20{\cdot}x-2}{(2{\cdot}x+5)^2}$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Justifier que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.
5. Peut-on dire que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$?

E.15 Établir la monotonie sur $\mathbb{N}$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule explicite :

$u_n = \dfrac{n^2-1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

7. Variations des suites arithmétiques

E.16 On considère la suite (u_n) arithmétique, définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, de premier terme de 2 et de raison 3 :

1. Donner l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction de leur rang n.
2. Pour $n\in\mathbb{N}$, simplifier l'expression $u_{n+1}-u_n$
3. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Proposition : soit (u_n) une suite arithmétique :

- (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, sa raison est strictement négative ;
- (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, sa raison est strictement positive ;
- (u_n) est constante si, et seulement si, sa raison est nulle ;

E.17 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

1. Relier les assertions correspondantes :

(u_n) est croissante •

(u_n) est décroissante •

• $u_0>0$ et $r>0$

• $u_0>0$ et $r<0$

• $u_0<0$ et $r>0$

• $u_0<0$ et $r<0$

2. À quelle*(s)* condition*(s)* une suite arithmétique est constante?

E.18 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 3. Justifier que la suite (u_n) est une suite croissante sur $\mathbb{N}$.

E.19 Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n *($n\in\mathbb{N}$)* et dont le terme de rang n admet l'expression :
$v_n = 4 - n$
Justifier que la suite (v_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

E.20 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :

$u_n = -32n + 102 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$

Montrer que cette suite est décroissante.

8. Variations des suites géométriques

E.21 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ géométrique de premier terme 3 et de raison 0,1.

1. Exprimer en fonction de n le terme de la suite (u_n) de rang n.
2. Simplifier et factoriser l'expression $u_{n+1}-u_n$.
3. En déduire le sens de variations de la suite (u_n).

Proposition : soit (u_n) géométrique de raison q.

- Si $u_0>0$ et $q>1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $q=1$ alors la suite (u_n) est constante.
- Si $u_0>0$ et $0<q<1$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

E.22 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

Indiquer, si possible, dans le tableau ci-dessous le sens de variation de la suite (u_n) en fonction de la valeur de ses éléments caractéristiques :

	$0<q<1$	$q=1$	$q>1$
$u_0<0$			
$u_0=0$			
$u_0>0$			

E.23 Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison r.

1. Relier les assertions correspondantes :

(u_n) est croissante •

(u_n) est décroissante •

- • $u_0>0$ et $q>1$
- • $u_0>0$ et $0<q<1$
- • $u_0>0$ et $-1<q<0$
- • $u_0>0$ et $q<-1$
- • $u_0<0$ et $q>1$
- • $u_0<0$ et $0<q<1$
- • $u_0<0$ et $-1<q<0$
- • $u_0<0$ et $q<-1$

2. À quelle*(s)* condition*(s)* une suite géométrique est constante?

9. *Variations : différence de termes consécutifs (suites explicites)*

E.24 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1-n}{1+n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Déterminer une expression simplifiée de $u_{n+1}-u_n$.
2. En déduire les variations de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$.

E.25 On considère la suite (u_n) définie par la relation :

$$u_n = n^3 - 4{\cdot}n^2 + n - 3 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Établir l'identité ci-dessous pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = 3{\cdot}n^2 - 5{\cdot}n - 2$.
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 2.

E.26 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation explicite :

$$u_n = n^3 - 2n^2 - 3n$$

1. Donner l'expression réduite de : $u_{n+1}-u_n$.
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante pour n supérieur à 2.

E.27 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{n^2+10}{2{\cdot}n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Justifier que (u_n) est croissante à partir du rang 3.

E.28 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$u_n = \frac{5n-1}{(n+1)^2}$$

1. Donner la forme simplifiée et factorisée de la différence : $u_{n+1} - u_n$
2. Justifier que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

E.29 Soit (u_n) la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$u_n = \sqrt{2n-1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

1. Établir l'identité ci-dessous pour tout entier naturel n strictement positif *(*$n\in\mathbb{N}^*$*)* :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$
2. en déduire que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

E.30 Soit (w_n) la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$w_n = 2n - \frac{25}{n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Montrer que la suite (w_n) est croissante.

E.31 La suite (u_n) est définie par la formule explicite :

$$u_n = \frac{5+n}{n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).

10. Variations : différence de termes consécutifs (suites définies par récurrence)

E.32 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n - {u_n}^2 - 1 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Compléter le tableau ci-dessous des premiers termes de la suite (u_n) :

n	0	1	2	3	4
u_n					

2. En étudiant la différence de deux termes consécutifs, montrer que la suite (u_n) est décroissante.

E.33 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = -3 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n - 3n + 7$

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Déterminer à partir de quel rang la suite (u_n) est décroissante.

11. Variations : quotient de termes consécutifs

E.34

1. Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme 2 et de raison 4. Justifier que la suite (u_n) est croissante.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ et dont le terme de rang n admet l'expression :
$v_n = 3\times 0{,}2^n$
Justifier que la suite (v_n) est décroissante.

E.35 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{3^n}{4} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Montrer que (u_n) est strictement croissante.

E.36 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n\in\mathbb{N})$ par : $\quad u_n = \dfrac{5^n}{n+2}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante sur $\mathbb{N}$.

E.37 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{3^n}{2n+1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Déterminer les variations de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$.

E.38 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2^n}{n^2+1}$$

Déterminer à partir de quel rang la suite (u_n) est croissante.

E.39 La suite (u_n) est définie par la formule explicite :

$$u_n = \frac{2^n}{3{\cdot}n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).

12. Variations à partir d'un rang : quotient de termes consécutifs

E.40 On considère la suite (u_n) définie par la formule explicite :

$$u_n = \frac{1{,}2^n}{n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*.$$

1. Donner l'expression simplifiée de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
2. Montrer que (u_n) est croissante à partir du rang 5.

E.41 Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par la relation : $\quad u_n = n\times(0{,}4)^n \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

E.42 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la formule explicite : $\quad u_n = \dfrac{1{,}2^n}{n^2} \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Établir l'identité suivante pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{n^2 - 10{\cdot}n - 5}{5{\cdot}(n+1)^2}$$

2. En déduire que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 11.

E.43 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$u_n = \frac{n}{2^{n+1}} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Montrer que (u_n) est strictement décroissante à partir du rang 2.

13. *Lien entre formule récurrente et formule explicite*

E.44

(1) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme de rang n est définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n).

(2) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie explicitement par :

$$v_n = \frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{3}\Big)^n + \frac{3}{2}$$

(a) Calculer les 4 premiers termes de la suite (v_n)

(b) Établir que pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} - \frac{1}{3}\cdot v_n = 1$$

(3) En déduire l'égalité des suites (u_n) et (v_n).

E.45

(1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite définie par la relation de récurrence et la condition initiale :

$$u_1 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{u_n}} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Calculer les 4 premiers termes de la suite.

(2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n a pour valeur : $v_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

(a) Donner la valeur de v_1.

(b) Établir l'identité suivante pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$1 + \frac{1}{v_n} = n+1$$

(c) En déduire que la suite (v_n) suit la relation de récurrence ci-dessous pour tout entier naturel non-nul :

$$v_{n+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{v_n}}$$

(3) Que pouvez-vous dire des suites (u_n) et (v_n) ?

E.46 On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

- $u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = 3\cdot u_n - 2\cdot n + 3 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
- $v_n = 3^n + n - 1$

(1) (a) Établir que les deux suites (u_n) et (v_n) ont le même premier terme.

(b) Montrer que les termes de la suite (v_n) vérifient la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = 3\cdot v_n - 2\cdot n + 3$$

(2) Justifier l'égalité des deux suites (u_n) et (v_n).

E.47

(1) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = 2\cdot u_n - 3\cdot n + 2 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

(a) En étudiant la relation de récurrence précédente, montrer que $u_1 = 6$.

(b) Déterminer la valeur des termes u_2 et u_3.

(2) On définit les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation :

$$v_n = 2^n + 3n + 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

(a) Donner les 4 premiers termes de la suite (v_n).

(b) Pour tout entier naturel n *($n\in\mathbb{N}$)*, établir l'égalité :

$$2\cdot v_n - 3\cdot n + 2 = 2^{n+1} + 3\cdot(n+1) + 1$$

(3) En déduire l'égalité des suites (u_n) et (v_n).

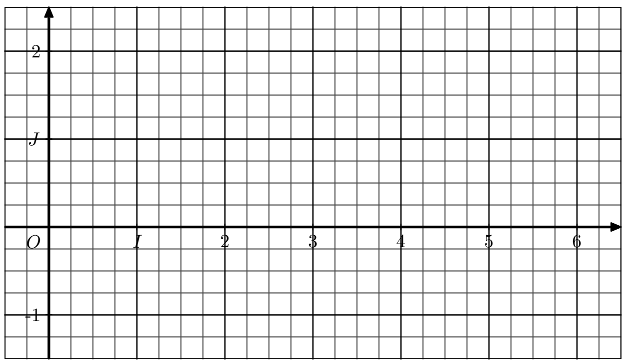
14. *Notions de limites : suites définies explicites*

E.48 On considère la suite (u_n) dont les termes sont définis pour tout entier naturel n par la relation : $u_n = \dfrac{10\cdot n - 1}{5\cdot n + 1}$

(1) (a) À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs ci-dessous avec des valeurs arrondies au centième près :

n	0	1	2	3	4	5
u_n						

(b) Dans le repère ci-dessous et pour n , placer la suite des points (A_n) dont les coordonnées sont définies par : $A_n(\,n\,;u_n\,)$



(2) (a) À l'aide de la calculatrice, observer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{10\cdot x - 1}{5\cdot x + 1}$$

(b) Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

E.49 À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de chacun des suites définies ci-dessous lorsque n tend vers $+\infty$:

- la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$ par : $u_n = \dfrac{4 \cdot n}{1+12 \cdot n}$
- la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$ par : $v_n = n^2+2 \cdot n-3$
- la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$ par : $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

E.50

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Compléter le tableau à double entrée ci-dessous en y indiquant, dans chaque cas, la valeur de $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n$

	$r>0$	$r<0$
$u_0>0$		
$u_0<0$		

2. Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Compléter le tableau à double entrée ci-dessous en y indiquant, dans chaque cas si possible, la valeur de $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n$

	$v_0>0$	$v_0<0$
$q>1$		
$0<q<1$		
$-1<q<0$		
$q<-1$		

15. *Notions de limites : somme des termes d'une suite*

E.51 On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 5 et de raison $\dfrac{2}{3}$.

On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n) : $\quad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$

1. Justifier que la suite (S_n) est croissante.
2. Donner l'expression du terme S_n en fonction de n.
3. a. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous en arrondissant les valeurs au millième près :

n	0	1	2	10	20	24
S_n						

   b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

E.52 Un coureur se lance un défi : il souhaite faire le tour de l'Europe.
Le premier jour, il parcourt $50\,km$. Par la fatigue, de jour en jour, sa distance parcourue quotidiennement se réduit de $1\,\%$.

On note u_n la longueur parcourue par le coureur le n-ième jour. En supposant que le coureur poursuive indéfiniment sa course, on obtient une suite (u_n) définie pour tout entier naturel non-nul.

1. Déterminer la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. a. Quelle est la nature de la suite (u_n)? Donner les éléments caractéristiques de la suite (u_n).
   b. Exprimer le terme u_n en fonction du rang n.
   c. Quelle distance sera parcourue par le coureur le 100^e jour? On arrondira la valeur au dixième de kilomètre.
3. Pour tout entier naturel n, on note S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n) : $\quad S_n = u_0+u_1+\cdots+u_n$
   a. Exprimer la somme S_n en fonction du rang n.
   b. Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième de kilomètres :

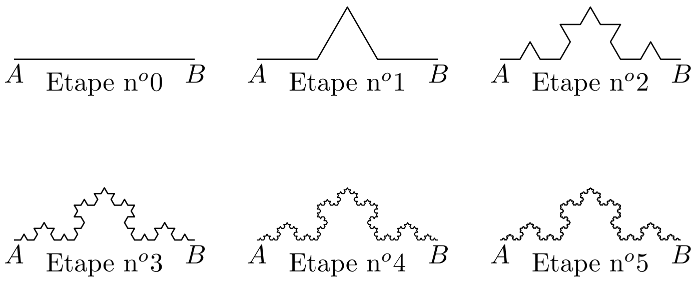
n	10	100	500	750	1000
u_n					

   c. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite des termes de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

E.53 On construit le flocon de Heige Von Koch de la manière suivante :

- On part d'un segment $[AB]$ de longueur $9\,cm$.
- Pour passer d'une étape à la suivante, on découpe chaque segment de la figure en trois parties égales et on remplace le segment "*central*" par un triangle équilatéral.

Voici la représentation des 6 premières étapes de cette construction :



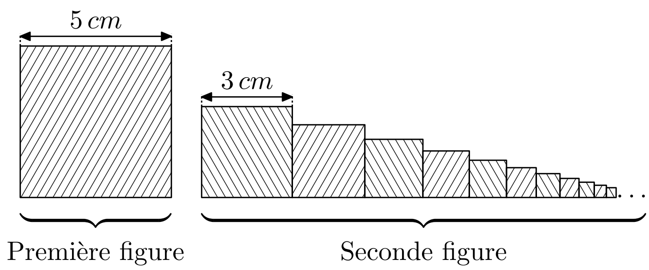
À chaque étape n, on note u_n la longueur de la "*ligne brisée*" ainsi obtenue. On construit ainsi une suite de nombres (u_n) définie pour tout entier naturel n.

1. Déterminer la mesure des trois premiers termes de la suite (u_n).
2. a. À l'étape n, exprimer le nombre de segments s_n formant la "*ligne brisée*" en fonction de n.
   b. À l'étape n, exprimer la longueur ℓ_n de chacun des segments formant la "*ligne brisée*" en fonction de n.
3. On note L_n la longueur de la "*ligne brisée*" à l'étape n. On obtient ainsi une suite (L_n) de termes numériques définie pour tout entier naturel n.
   a. Exprimer les termes de la suite (L_n) en fonction de leur rang n.
   b. Compléter le tableau ci-dessous en arrondissant les valeurs au centième de centimètre près :

n	0	1	10	20	30
L_n					

E.54 *Dans cet exercice, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. La qualité des justifications sera également prise en compte.*

On considère les deux figures ci-dessous :



- La première figure est un carré dont les côtés mesurent $5\,cm$;
- La seconde figure est composée d'un carré dont les côtés mesures $3\,cm$, pour compléter la figure, on y ajoute un nouveau carré dont les dimensions ont été réduites par le coefficient $\dfrac{4}{5}$. On répète un certain nombre de fois cette figure sans pour autant savoir combien de fois !

De ces deux figures, laquelle possède la plus grande aire?

16. *Approfondissement : suite arithmético-géométrique et variation*

E.55 On considère la suite (u_n) définie par la relation :
$u_0 = -2 \quad ; \quad u_{n+1} = 2{\cdot}u_n + 0{,}5 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$

1. On définit la suite (v_n) définie par la relation :
   $v_n = u_n + 0{,}5 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$
   a. Établir, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'égalité : $v_{n+1} = 2{\cdot}v_n$
   b. Donner la nature et les éléments caractéristiques de la droite (v_n).
   c. Donner le sens de variation de la suite (v) sur $\mathbb{N}$. Justifier votre réponse.
2. a. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, établir : $u_{n+1}-u_n=v_{n+1}-v_n$
   b. En déduire le sens de variations de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$.

E.56 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$u_1 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = 0{,}2{\cdot}u_n + 0{,}04 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$

1. On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}^*$ par la relation :
   $v_n = u_n - 0{,}05$
   a. Établir l'égalité pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $v_{n+1} = 0{,}2{\cdot}v_n$
   b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la suite (v_n).
2. a. Établir l'égalité pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
   $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n$
   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)

E.57 On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \left(1+\sqrt{2}\right){\cdot}u_n - \sqrt{6} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$

et la suite (v_n), définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, par : $v_n=u_n-\sqrt{3}$

1. Établir que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera les éléments caractéristiques et son sens de variations.
2. a. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, établir l'égalité :
   $u_{n+1}-u_n=v_{n+1}-v_n$
   b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

17. *Approfondissement : suite arithmético-géométrique et formule explicite*

E.58 On considère la suite (u_n) définie par la relation :
$u_0 = 8$; $u_{n+1} = 0{,}95 \cdot u_n + 0{,}5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. On définit la suite (v_n) définie par la relation :
$v_n = u_n - 10$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   a. Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95. On précisera la valeur de son premier terme.
   b. Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n.
2. En déduire une expression de la suite (u_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

E.59 On souhaite étudier la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On définit la suite (v_n) par : $v_n = u_n - 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et sa raison.
   b. Exprimer v_n en fonction du rang n.
2. a. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir que : $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$
   c. En déduire le sens de variations de la suite (u_n).

E.60 On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 3$; $u_{n+1} = \frac{3}{4} \cdot u_n + \frac{1}{2}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

1. On considère la suite (v_n) définie par la relation suivante pour tout entier naturel n :
$v_n = \frac{1}{2} \cdot u_n - 1$
   a. Établir l'égalité ci-dessous pour tout entier naturel n :
   $v_{n+1} = \frac{3}{4} \cdot v_n$
   b. Donner le sens de variation de la suite (v_n).
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

18. Approfondissement : autres utilisations de suites auxiliaires

E.61 On considère la suite (v_n) définie par :
$v_0 = 1$; $v_{n+1} = v_n + 2 \cdot n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n).
2. Quelle conjecture peut-on émettre sur les termes de la suite (v_n) ?

On définit la suite (w_n) définie par :
$w_n = v_{n+1} - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Justifier que la suite (w_n) est une suite arithmétique. On précisera les éléments caractéristiques de cette suite.
2. Déterminer l'expression de la somme S des n premiers termes de la suite (w_n).
3. En remarquant l'égalité $\left(\sum_{k=0}^{n-1} w_k\right) + v_0 = v_n$, en déduire l'expression du terme v_n en fonction de n.
4. Confirmer la conjecture faite à la question b.

19. Approfondissement : suites définies conjointements

E.62 On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ v_0 = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2 \cdot u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3 \cdot v_n}{3} \end{cases}$$

1. Déterminer les trois premiers termes des suites (u_n) et (v_n).
2. On admet que les termes des suites (u_n) et (v_n) sont des nombres strictement positifs.
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont croissantes sur $\mathbb{N}$.

E.63 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
- $u_0 = 0$; $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $v_0 = 12$; $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2 \cdot v_n}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis, que la suite (v_n) est décroissante.

20. Exercices non-classés

E.64

1) a) On considère la suite (u_n) définie par la relation :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

b) On considère la suite (v_n) définie par la relation :

$$v_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

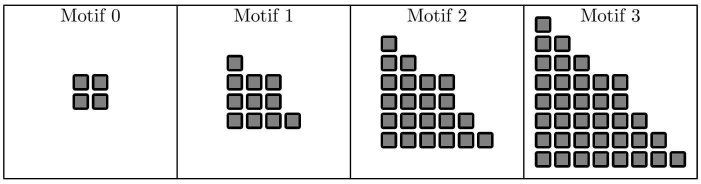
Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n).

c) Quelle conjecture peut-on faire à propos des suites (u_n) et (v_n) ?

2) a) Simplifier l'expression suivante : $v_{n+1} \cdot (2 - v_n)$

b) Justifier que les deux suites (u_n) et (v_n) sont égales.

E.65 On considère la construction de motif pas à pas dont les cinq premières étapes sont représentées ci-dessous :



1) Combien de carreaux faut-il pour construire le motif 4? le motif 5?

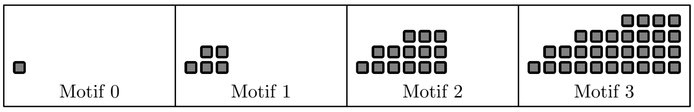
2) On note u_n le nombre de carreaux nécessaire pour construire le motif n.

a) Donner la formule de récurrence vérifiée par la suite (u_n).

b) Établir que les termes de la suite (u_n) admettent pour formule explicite :

$$u_n = 2n^2 + 5n + 4$$

E.66 On considère la construction de motif pas à pas dont les cinq premières étapes sont représentées ci-dessous :



1) Combien de carreaux faut-il pour construire le motif 4? le motif 5?

2) On note u_n le nombre de carreaux nécessaire pour construire le motif n.

a) Donner la formule de récurrence vérifiée par la suite (u_n).

b) Établir que les termes de la suite (u_n) vérifient la formule explicite :

$$u_n = \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{3}{2} \cdot n^2 + \frac{13}{6} \cdot n + 1$$