

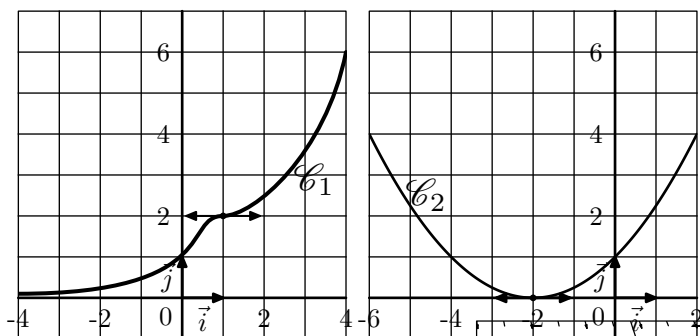


1. Introduction (champs des tangentes)

E.1 On considère une fonction f vérifiant les deux conditions ci-dessous :

$$f(0) = 1 \quad ; \quad f'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Justifier que les courbes ci-dessous ne sont pas la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f .



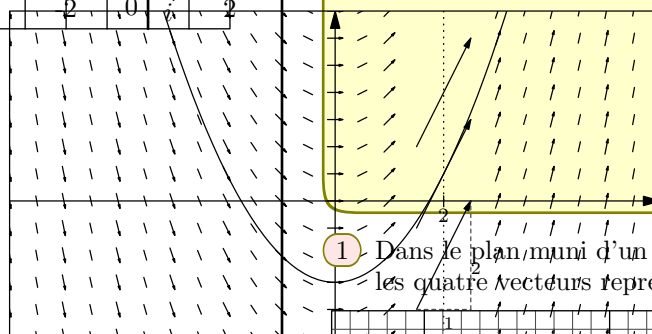
E.2

Dans le plan muni d'un repère, un "champ de tangentes" est un ensemble de vecteurs associé à chaque point du plan.

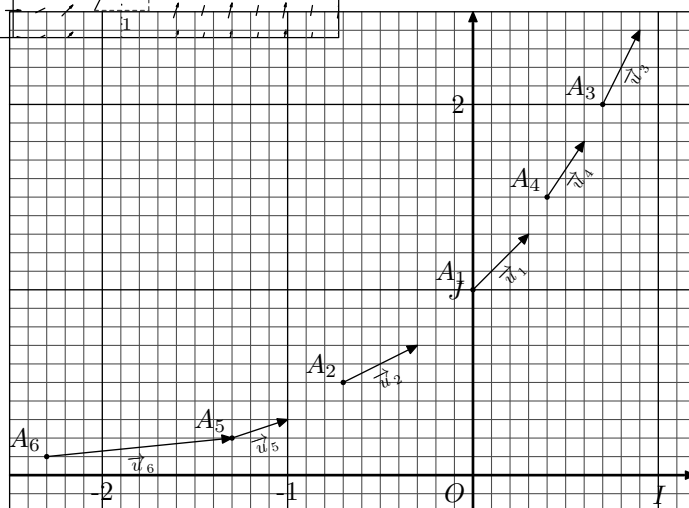


Une courbe dans un champ de tangente est une courbe qui, en chaque point, le vecteur associé au champ de tangente est un vecteur directeur de sa tangente.

Le champ de tangentes ci-dessous est construit sur la relation $f'(x) = x$: au point d'abscisse 2 la courbe admet une tangente de coefficient directeur 2 :



1 Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les quatre vecteurs représentés ci-dessous :



On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et notons $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative

- a
- La fonction f passe par le point A_1 et la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A_1 admet le vecteur $\vec{u}_1$ pour vecteur directeur.
Donner le coefficient directeur de la tangente (T) .
 - La fonction f passe par le point A_2 et la tangente (T') à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A_2 admet le vecteur $\vec{u}_2$ pour vecteur directeur.
Donner le coefficient directeur de la tangente (T) .

- La fonction f passe par le point A_3 et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en A_3 dont $\vec{u}_3$ est un vecteur directeur.

Donner le nombre dérivé de la fonction f en 0,7.

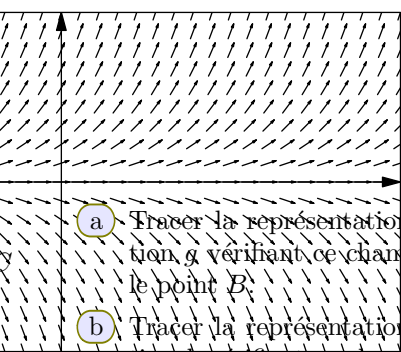
- (b) Quelles relations, parmi celles proposées, peut-on conjecturer pour la fonction f ?

- $f'(x) = x$
- $f'(x) = 2 \cdot x$
- $f'(x) = f(x)$
- $f'(x) = 2 \cdot f(x)$

- (c) Pour tout $k \in \{1; 2; \dots; 6\}$, la fonction f passe par le point A_k et admet une tangente dont $\vec{u}_k$ est un vecteur directeur.

Tracer une représentation possible de la courbe $\mathcal{C}_f$.

- (2) Ci-dessous est donnée un champ de tangente dans le plan muni d'un repère :



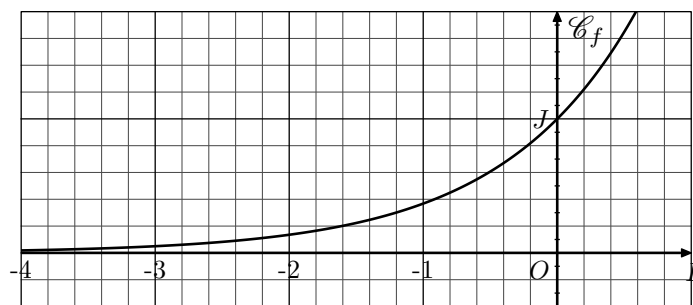
- (a) Tracer la représentation de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g vérifiant ce champ de tangentes et passant par le point B.

- (b) Tracer la représentation de la courbe $\mathcal{C}_h$ d'une fonction h vérifiant ce champ de tangentes et passant par le point C.

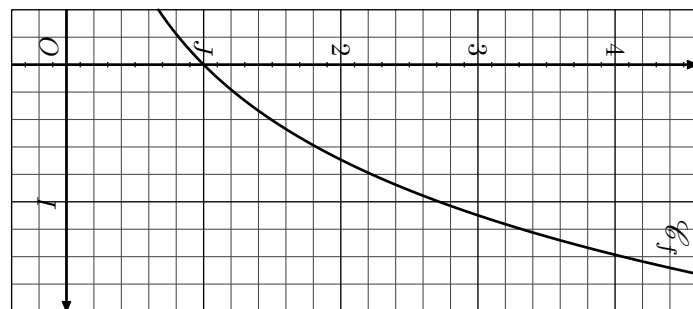
E.3 Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on con-

sidère la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ représentée ci-dessous :

- Sur l'intervalle $[-4; 1]$:



- Sur l'intervalle $[-\frac{2}{5}; \frac{9}{5}]$:



- (1) (a) Tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 et donner le coefficient directeur de cette tangente.

- (b) Comparer les nombres $f(0)$ et $f'(0)$.

- (2) De même, comparer les nombres $f(-1)$ et $f'(-1)$.

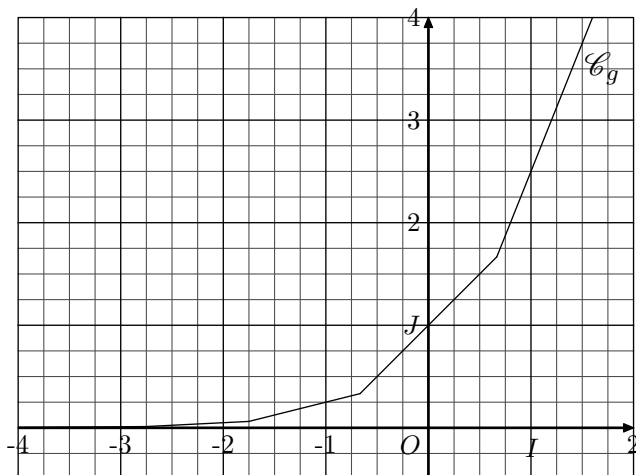
- (3) Graphiquement, établir les égalités ci-dessous :

$$f(1) = f'(1) \quad ; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right).$$

2. Introduction (méthode d'Euler)

E.4 On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$:

- (1) On considère la fonction g , affine par morceaux, définie sur $\mathbb{R}$ et dont la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ est donnée ci-dessous :



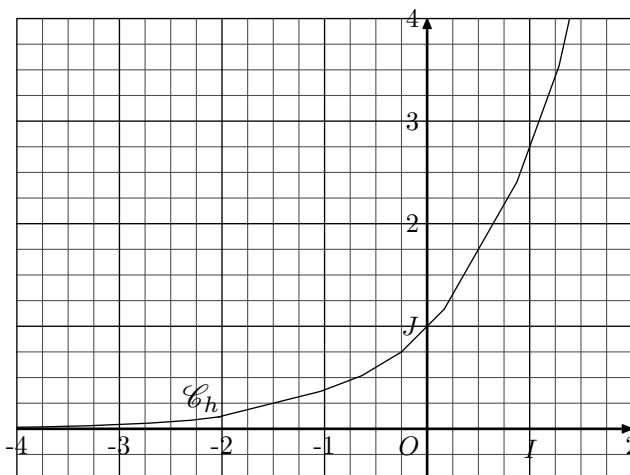
Établir les égalités ci-dessous :

- (a) $g'(-1) = g(-1)$ (b) $g'(0) = g(0)$ (c) $g'(1) = g(1)$

La vidéo suivante montre qu'il existe une infinité de fonctions affines par morceaux vérifiant ces trois propriétés.



- (2) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ et dont la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ est donnée ci-dessous :



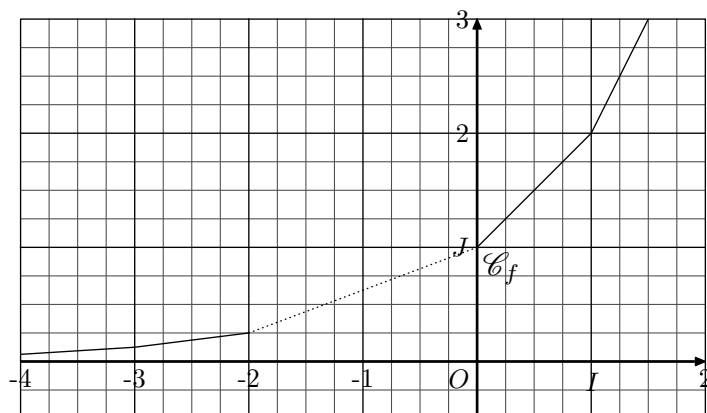
Établir les égalités ci-dessous :

- (a) $h'(-1) = h(-1)$ (b) $h'(0,5) = h(0,5)$ (c) $h'(1) = h(1)$

La fonction h , représentée ci-dessus, vérifie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $-8 \leq n \leq 4$, la relation : $h'\left(\frac{n}{2}\right) = h\left(\frac{n}{2}\right)$

E.5 Partie A - pas de 1.

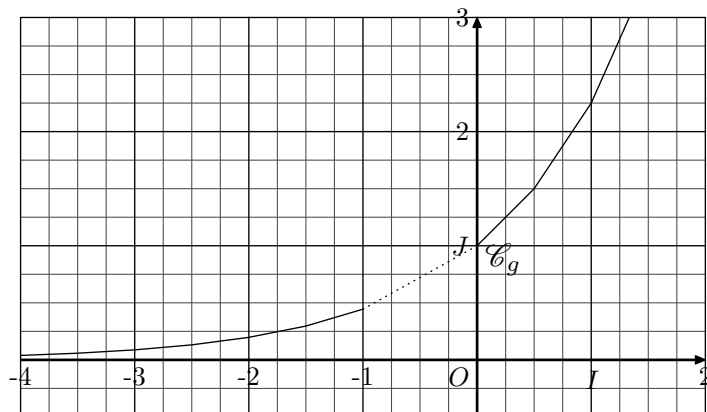
La fonction f , représentée ci-dessous dans un repère, est une fonction continue où sur chacun des intervalles $[i; i+1]$ ($i \in \mathbb{Z}$), la fonction f est une fonction affine dont le coefficient directeur est $f(i)$.



- 1
 - a Donner la valeur de $f(0)$ et le coefficient directeur de la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$
 - b Donner la valeur de $f(1)$ et le coefficient directeur de la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[1; 2]$
- 2 Déterminer la valeur de $f(-1)$ afin que $f(0)=1$ et que la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[-1; 0]$ soit une fonction affine de coefficient directeur $f(-1)$.
- 3 Compléter correctement le tracer de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Partie B - pas de $\frac{1}{2}$.

La fonction g , représentée ci-dessous dans un repère, est une fonction affine continue où, sur chacun des intervalles $\left[\frac{1}{2} \cdot i; \frac{1}{2} \cdot (i+1)\right]$ ($i \in \mathbb{Z}$), la fonction g est une fonction affine dont le coefficient directeur est $g\left(\frac{1}{2} \cdot i\right)$.



- 1
 - a Donner la valeur de $g(0)$ et le coefficient directeur

3. Introduction C

E.7  On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé ci-dessous :

de la restriction de la fonction g sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

- b Donner la valeur de $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et le coefficient directeur de la restriction de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

- 2 Déterminer la valeur de $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ afin que $g(0)=1$ et que la restriction de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ soit une fonction affine de coefficient directeur $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.
- 3 Compléter correctement le tracer de la courbe $\mathcal{C}_g$.

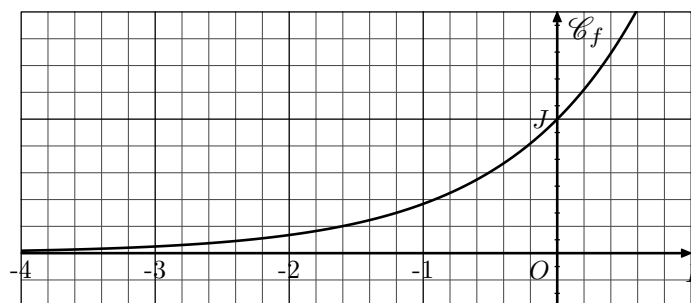
Remarque : les parties **A** et **B** représentent les deux premières étapes de construction de la courbe de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler.

Pour voir les étapes successives de cette construction et leurs "convergences" vers une unique courbe, vous pouvez regarder cette animation :

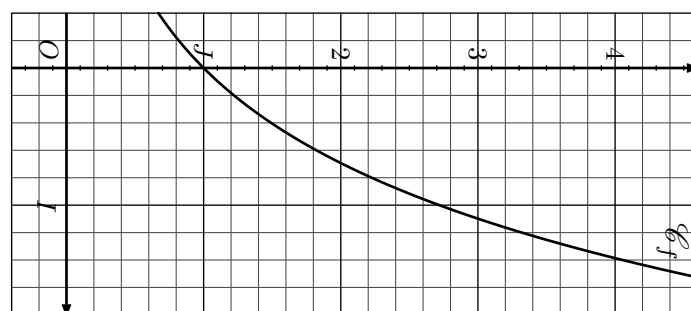


E.6  Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

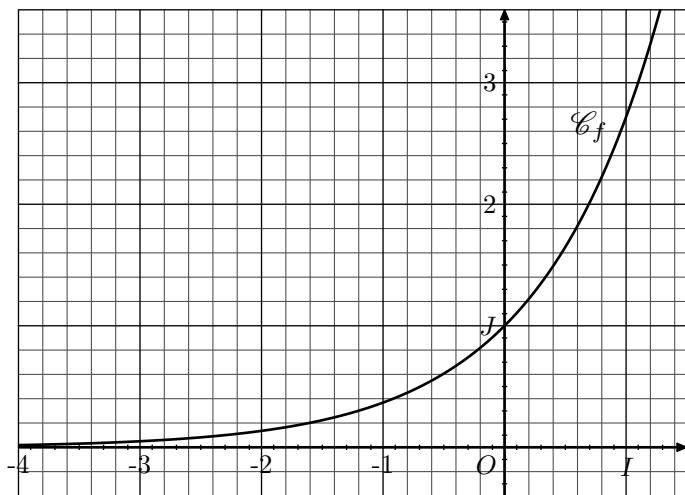
- 1 Ci-dessous est donnée la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[-4; 1]$:



- a Tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. Comparer les nombres $f(0)$ et $f'(0)$.
- b Comparer les nombres $f(-1)$ et $f'(-1)$.
- 2 Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $\left[-\frac{2}{5}; \frac{9}{5}\right]$:



- a Comparer les nombres $f(1)$ et $f'(1)$.
- b Comparer les nombres $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.



On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie les trois propriétés ci-dessous :

$$f(0) = 1 \quad ; \quad \begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Conjecture :

- ① On considère le point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1.
 - a Placer le point A et tracer la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A .
 - b Donner l'abscisse du point B d'intersection de la tangente (T) avec l'axe des abscisses.
- ② Répéter la question ① avec le point B d'abscisse -1 .
- ③ Quelle conjecture peut-on émettre quant à l'abscisse du point de contact d'une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ et l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses?
- ④ Vérifier votre conjecture avec un troisième point de la courbe $\mathcal{C}_f$ choisi au hasard.

Preuve :

4. Fonctions exponentielles

E.9 On admet l'existence d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions : $f' = f$; $f(0) = 1$

Montrer que cette fonction f est unique. On la notera $\exp$.

Soit a un nombre réel quelconque.

- ⑤ Établir que la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a admet pour équation réduite :
 $(T) : y = f(a) \cdot (x - a + 1)$
- ⑥ Établir la conjecture faite à la question ③.

Prolongement :

- ⑦ À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, vérifier si les courbes représentatives des fonctions carrée, inverse et racine carrée vérifient cette propriété.

E.8 Le nombre d'atomes d'une source radioactive a tendance à diminuer dans le temps. On note $N(t)$ le nombre de noyaux à l'instant t . En observant ce phénomène sur une variation du temps, noté Δt , le nombre d'atomes a aussi connu une variation, noté $\Delta N(t)$. On a établi la formule suivante :

$$\frac{\Delta N(t)}{N(t)} = -\lambda \cdot \Delta t$$

où λ est une constante dépendant uniquement de la nature de la source radioactive observée.

- ① a La durée de demi-vie du Radon-220 est de 56 s. Déterminer la valeur de la constante λ dans le cas du Radon-220, arrondie à 10^{-4} .
- b On part d'un échantillon contenant 240 g contenant environ $6,02 \times 10^{23}$ noyaux de radon. Déterminer le temps à attendre pour que la quantité observée pèse :
 120 g ; 60 g
- ② a Établir l'égalité suivante : $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda \cdot N(t)$
- b Que représente la quantité $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}$ pour la fonction N ? En supposant que la fonction N est dérivable en fonction du temps t , en déduire la relation :
 $N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$

Indications :

Cette démonstration s'effectue en deux étapes :

- On montre que toute fonction vérifiant ces deux conditions ne peut pas s'annuler. Pour cela, on considère la fonction h définie par : $h(x) = f(x) \cdot f(-x)$ et on montre que la fonction h est constante.
- En supposant qu'il existe deux fonctions f et g vérifiant ces deux conditions, on considère la fonction j définie par : $j(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ et on montre que la fonction j est constante. Plus précisément que : $j(x) = 1$

Propriétés utilisées :

- La dérivée de la fonction produit $(u \cdot v)$ a pour expression : $(u \cdot v)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
- Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a : $[\exp(a \cdot x + b)]' = a \cdot \exp(a \cdot x + b)$

E.10

Objectif: le but de cet exercice est d'établir une propriété algébrique de la fonction exponentielle.

Propriétés utilisées:

- La fonction exponentielle est la seule fonction vérifiant : $f' = f$; $f(0) = 1$
- La dérivée de la fonction produit $(u \cdot v)$ a pour expression : $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a : $[\exp(a \cdot x + b)]' = a \cdot \exp(a \cdot x + b)$

- Pour cela, on considère la fonction g dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$
 - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = 0$
 - Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = 1$
- Déduire de la propriété précédente que la fonction exponentielle ne s'annule jamais. C'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) \neq 0$
 - Nous allons établir que : $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Remarque: la fonction exponentielle ne s'annulant pas et puisque $f(0) > 0$, on en déduit que la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

- La fonction exponentielle étant strictement positive et vérifiant $f' = f$, on en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

E.11

Objectif: le but de cet exercice est d'établir une propriété algébrique de la fonction exponentielle.

Propriétés utilisées:

- La fonction exponentielle est la seule fonction vérifiant : $f' = f$; $f(0) = 1$
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- La dérivée de la fonction produit $(u \cdot v)$ a pour expression : $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a : $[\exp(a \cdot x + b)]' = a \cdot \exp(a \cdot x + b)$

- Le but de cette question est de montrer que pour tous nombres réels x et y , on a : $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$
Pour cela, on considère la fonction f définie par : $f(x) = \exp(x+a) \cdot \exp(-x)$ où $a \in \mathbb{R}$
 - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 0$
 - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \exp(a)$
 - En déduire que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a : $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
- En déduire que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a : $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

5. Avec la calculatrice

E.12 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f(x) = 2^x - x^2 \quad ; \quad g(x) = -x + 2$$

Dans un repère $(O; I; J)$, on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives respectivement des fonctions f et g .

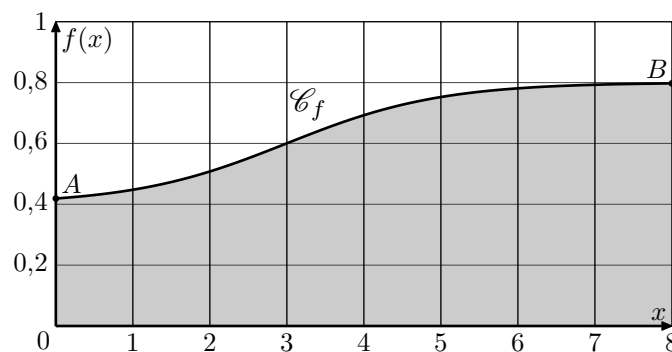
À l'aide de la calculatrice, déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

E.13 On considère la fonction définie sur $[0; 8]$ par :

$$f(x) = \frac{0,4}{20 \cdot e^{-x} + 1} + 0,4$$

Dans une région montagneuse, une entreprise étudie un projet de route reliant les villages A et B situés à deux altitudes différentes. La fonction f , définie dans la partie A, modélise le profil de ce projet routier. La variable x représente la distance horizontale, en kilomètres, depuis le village A et $f(x)$ représente l'altitude associée, en kilomètres.

La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse

Proposition 1

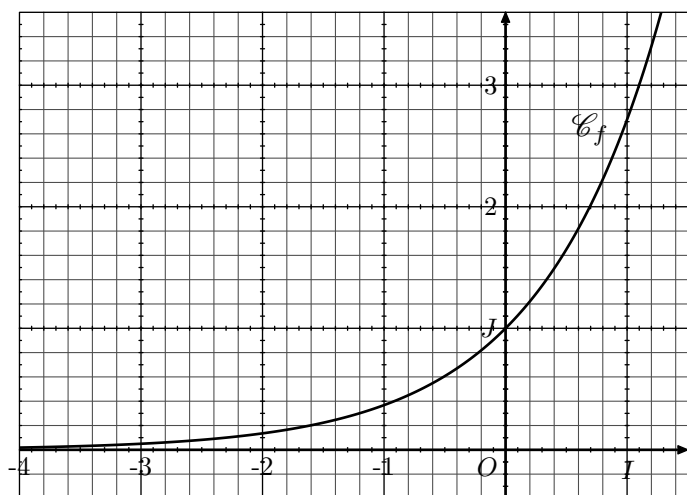
L'altitude du village B est $0,6 \text{ km}$.

Proposition 2

L'écart d'altitude entre les villages A et B est 378 mètres, valeur arrondie au mètre.

6. Introduction aux propriétés algébriques

E.14 Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on donne la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f exponentielle :



Conjecture :

- ① Avec la précision possible par lecture graphique, compléter le tableau de valeurs de la fonction f :

x	-1,4	-1	-0,4	0	0,6	1
$\exp(x)$						

- ② À l'aide des résultats précédents, donner des approximations des produits suivants :

- $\exp(-1) \times \exp(-0,4)$ • $\exp(-1) \times \exp(0,6)$
- $\exp(0) \times \exp(1)$ • $\exp(-0,4) \times \exp(1)$

- ③ Quelle conjecture peut-on établir sur le produit $\exp(a) \cdot \exp(b)$ pour tout réel a et b ?

Vers la preuve :

Nous admettons que la fonction exponentielle est non-nulle sur $\mathbb{R}$ et nous n'allons établir qu'un cas particulier de la preuve :

$$\text{Pour tout nombre réel } x, \text{ on a : } \exp(1+x) = \exp(1) \cdot \exp(x) \quad (*)$$

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

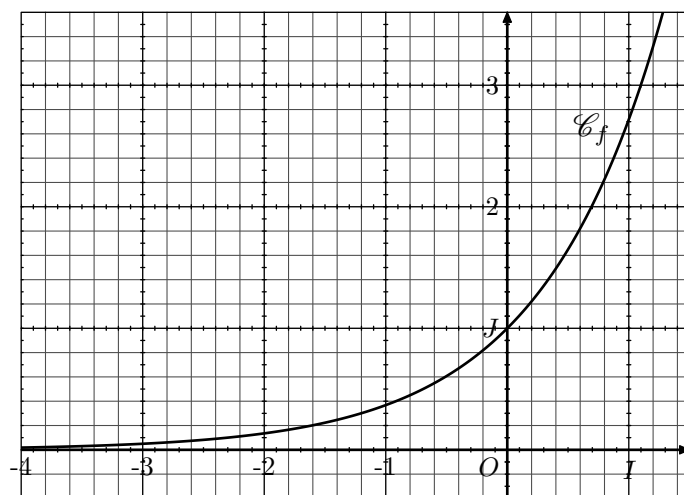
$$g(x) = \frac{\exp(x+1)}{\exp(x)}$$

- ④ Déterminer l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g .
- ⑤ En déduire que la forme simplifiée de la fonction g et établir la propriété (*).

Prolongement :

- ⑥ Établir la propriété ci-dessous pour tout $x \in \mathbb{R}$:
- $$\exp(2+x) = \exp(2) \times \exp(x)$$
- ⑦ Quelle simplification de l'expression $\exp(n) \times \exp(x)$ peut-on conjecturer, pour tout entier naturel n et tout nombre réel x ?

E.15 Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on donne la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f exponentielle :



Conjecture :

- ① Avec la précision possible par lecture graphique, compléter le tableau de valeurs de la fonction f :

x	-1,9	-1,2	-0,8	-0,1	0,4	0,7	1,1
$\exp(x)$							

- ② À l'aide des résultats précédents, donner les valeurs des produits suivants :

- $\exp(-1,9) \times \exp(1,1)$ • $\exp(-1,2) \times \exp(0,4)$
- $\exp(-0,8) \times \exp(0,7)$ • $\exp(0,4) \times \exp(0,7)$

- ③ Quelle conjecture peut-on établir sur le produit $\exp(x) \cdot \exp(y)$ pour tout réel x et y ?

Preuve :

On admet que la fonction exponentielle ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. Pour un nombre réel a quelconque, on considère la fonction g_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

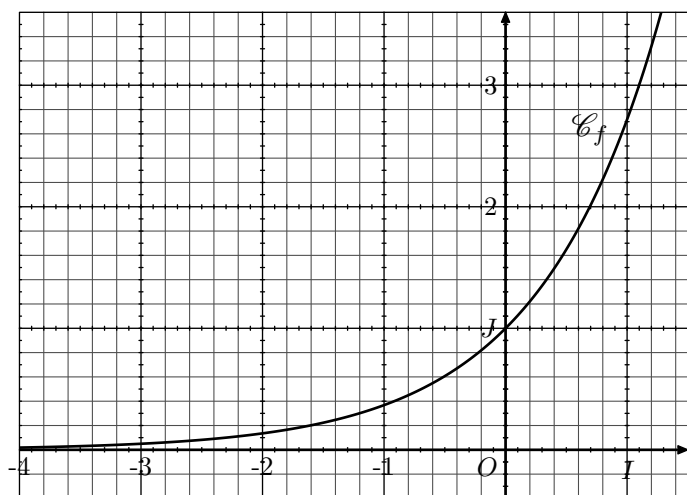
$$g_a(x) = \frac{\exp(x+a)}{\exp(x)} \quad (*)$$

- ④ Déterminer l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g .
- ⑤ Établir que pour tout réel x , on a $g_a(x) = \exp(a)$, puis établir l'identité suivante pour tous réels x et y :
- $$\exp(x) \times \exp(y) = \exp(x+y)$$

Prolongement :

- ⑥ Établir la propriété ci-dessous pour tout $x \in \mathbb{R}$:
- $$\exp(3 \cdot x) = [\exp(x)]^3$$
- ⑦ Établir la propriété ci-dessous pour tout $x \in \mathbb{R}$:
- $$\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$$

E.16 Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on donne la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f exponentielle :



Conjecture :

- ① Avec la précision possible par lecture graphique, compléter le tableau de valeurs de la fonction f :

x	-0,7	-0,5	-0,1	0	0,1	0,5	0,7
$\exp(x)$							

- ② À l'aide des résultats précédents, donner les valeurs des produits suivants :

$\bullet \exp(-0,7) \times \exp(0,7)$ $\bullet \exp(-0,5) \times \exp(0,5)$
 $\bullet \exp(-0,1) \times \exp(0,1)$ $\bullet \exp(0) \times \exp(0)$

- ③ Conjecturer une relation entre les nombres $\exp(a)$ et $\exp(-a)$ pour tout nombre réel a ?

Preuve :

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \exp(-x) \times \exp(x)$$

- ④ Déterminer l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g .

- ⑤ En se basant sur la valeur de $g(0)$, déduire la forme simplifiée de la fonction g et établir la conjecture précédente. Justifier également que la fonction exponentielle ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

Prolongement :

- ⑥ Justifier que la fonction exponentielle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

7. Propriétés algébriques

E.17

Proposition : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$\bullet \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$
 $\bullet \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$ $\bullet \exp(n \cdot x) = [\exp(x)]^n$

a $\exp(3) \cdot \exp(5)$ b $\exp(-2) \cdot \exp(4)$
 c $\frac{1}{\exp(-5)}$ d $[\exp(5)]^3$

E.18 Simplifier les expressions suivantes :

a $(e^3)^{-2} \cdot e^5$ b $\frac{e^6 - e^3}{e \cdot e^2}$

E.19 Simplifier les expressions suivantes :

a $e \cdot e^{2x+1}$ b $e^{3-2x} \cdot e^{x+5}$ c $e^{2 \cdot x-1} \cdot e^{3-x}$

E.20 Simplifier les écritures suivantes :

a $\exp(2x+4) \times \exp(3-x)$ b $\frac{\exp(x)^2}{\exp(3-2x)}$

E.21

Proposition : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$\bullet e^{x+y} = e^x \times e^y$ $\bullet e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ $\bullet e^{n \cdot x} = (e^x)^n$

Simplifier les expressions suivantes :

a $e^3 \cdot e^4$ b $e^4 \cdot e^{-4}$ c $(e^4)^3 \cdot e^4$
 d $\frac{e^5 \cdot e^{-3}}{e^{-2}}$ e $e^5 \cdot e^6$ f $\frac{e^6 \cdot e^{-2}}{e^{-4}}$

E.22 Simplifier les écritures suivantes :

a $e^{3x+1} \cdot e^{2-2x}$ b $\frac{e^{x-2}}{e^{3-x}}$ c $e^{-x} - \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$

E.23 Simplifier les expressions suivantes :

a $3 \cdot (e^{5x})^4 - (2 \cdot e^{10x})^2$ b $e^{9x} - 2 \cdot (e^{3x})^3$

E.24 Simplifier les expressions suivantes :

a $\frac{(e^{2 \cdot x-1})^2}{e^{7 \cdot x-2}}$ b $3 \cdot e^{-2 \cdot x} + \frac{e^x + 1}{e^{2 \cdot x}}$

E.25 Établir les égalités suivantes :

a $\frac{2 + 3 \cdot e^x + e^{2x}}{e^{2x}} = 2 \cdot e^{-2x} + 3 \cdot e^{-x} + 1$
 b $\frac{1 - e^x}{e^{2x}} = e^{-2x} - e^{-x}$

E.26 Simplifier les expressions suivantes :

a) $(e^5 - e^4)^2 - (e^5 + e^4)^2$ b) $(e^2 + e^{-2}) \cdot (e^2 - e^{-2})$

E.27 Simplifier les expressions suivantes :

a) $(e^{3x})^2 - e^{2x} \cdot (e^{2x} + e^{-2})^2$
 b) $(e^{3x})^2 + (e^{-3x})^2 - (e^{3x} - e^{-3x})^2$

E.28 Recopier les identités ci-dessous en complétant correctement les pointillés :

a) $e^x + e^{-x} = e^x \cdot (\dots + \dots)$ b) $\frac{e^x}{x^2} = \left(\frac{e^{\dots}}{\dots}\right)^2$
 c) $1 + e^{-x} = \frac{\dots + \dots}{e^x}$ d) $\frac{1 + e^x}{e^{2x}} = \dots + \dots$
 e) $\frac{e^{3x} - e^x}{e^{3x} + e^{2x}} = \frac{1 - \dots}{1 + \dots}$ f) $e^{16x} = (e^{\dots})^2$

E.29 Simplifier les expressions suivantes :

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

E.30 Établir les égalités suivantes :

a) $\frac{e^{3x} + 2}{e^{3x} - 1} = \frac{1 + 2 \cdot e^{-3x}}{1 - e^{-3x}}$ b) $\frac{e^{3x} - e^{2x}}{e^{3x} + e^{2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{(e^x + 1)^2}$

8. Equations

E.31

Proposition : pour tous nombres réels a et b
 $a = b \iff e^a = e^b$

Résoudre les équations suivantes :

a) $e^{5x+1} = e^{2x}$ b) $e^{3x+1} = 1$ c) $\frac{e^{1-3x}}{e} = 1$

E.32 Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $\exp(x) = e$ b) $\exp(-x) = 1$
 c) $\exp(2x-1) = e$ d) $e^x - e^{-x} = 0$

E.33 Résoudre les équations :

a) $e^x \cdot (e^{2x} - e^2) = 0$ b) $(e^{3x-1} - 1)(e^{2-x} - e) = 0$
 c) $x \cdot e^x - x = 0$

E.34 Résoudre les équations suivantes :

a) $e^x + e^{-x} = 0$ b) $e^{3x+1} = e^{-2x+3}$
 c) $e^{2x} - 1 = 0$ d) $x \cdot e^{2x} - 2 \cdot e^{2x} = 0$

E.35 Résoudre les équations suivantes :

a) $e^{x^2+1} = e^x$ b) $(e^{x+1})^2 = e^{x^2+1}$ c) $e^{x^2+1} + e^x = 0$

E.36 Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $e^{x^2+x} = 1$ b) $e^{x^2+5} = (e^{x+2})^2$

9. Inéquations

E.37

Proposition : la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et admet pour tableau de variation :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
Variation de exp		0	1	e	$+\infty$

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $e^x < 1$ b) $e^{-x} > 0$
 c) $e^{-x} > 1$ d) $e^{2x} - 1 \geq 0$

E.38 Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $\exp(x) < e$ b) $\exp(-x) \geq 1$

E.39

Proposition : Pour tout nombre réels a et b :

• $e^a > e^b \iff a > b$
 • $e^a < e^b \iff a < b$

Remarque : cette propriété vient de la stricte croissance de la fonction f .

Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $e^{2x-4} \geq 1$ b) $e^{2x-1} < e^x$

E.40 Résoudre les inéquations suivantes :

a) $e^x - e^{-x} > 0$ b) $x \cdot e^{-x} - 3 \cdot e^{-x} < 0$

E.41 🔧 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $e^{x^2-3x+5} < e$ (b) $e^{[(3x+1)^2]} < 0$

E.42 🔧 Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

(a) $e^{2x} + 3e^x < 4$ (b) $e^x + e^{-x} < 2$

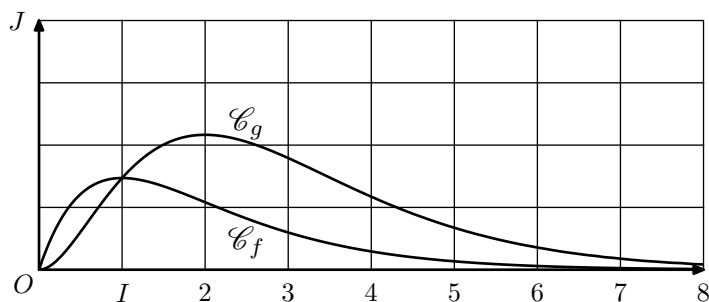
Indication : on identifiera ces inéquations à des inéquations polynomiales de degré 2.

10. Position relative des courbes

E.43 🔧 Soit f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \cdot e^{-x} \quad ; \quad g(x) = x^2 \cdot e^{-x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



1 Graphiquement, conjecturer les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

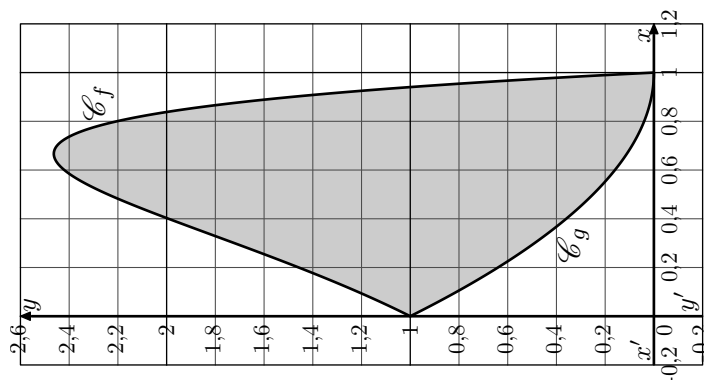
2 (a) Factoriser l'expression $f(x) - g(x)$.

(b) En déduire les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

E.44 🔧 Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.

Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies pour tout réel x de $[0; 1]$ par :

$$f(x) = (1-x) \cdot e^{3x} \quad ; \quad g(x) = x^2 - 2 \cdot x + 1$$



1 Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives $(1; 0)$ et $(0; 1)$ sont des points communs aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2 On admet que : pour tout x dans $[0; 1]$:

$$f(x) - g(x) = (1-x)(e^{3x} - 1 + x)$$

(a) Justifier que pour tout x dans $[0; 1]$:

$$e^{3 \cdot x} - 1 \geq 0$$

(b) En déduire que pour tout x dans $[0; 1]$:

$$e^{3 \cdot x} - 1 + x \geq 0$$

(c) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x dans $[0; 1]$.

11. Dérivées

E.45 🔧 Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction dérivée :

1 $f(x) = 2 \cdot e^x + x^2$ 2 $g(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{3x+1} + e^{-2x}$

E.46 🔧 On considère la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif par : $f(t) = a \cdot e^{-\frac{t}{5}} + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$

On admet que $f(0) = 1000$ et que f vérifie la relation :

$$f'(t) + \frac{1}{5} \cdot f(t) = 4 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Déterminer les valeurs de a et de b , et donner l'expression de

la fonction f

E.47 🔧

Proposition : soit a et b deux nombres réels et la fonction f définie par : $f(x) = e^{ax+b}$

La fonction f' , dérivée de f , admet pour expression :

$$f'(x) = a \cdot e^{ax+b}$$

Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

(a) $f(x) = e^x$ (b) $f(x) = e^{2 \cdot x}$ (c) $f(x) = e^{3-x}$

12. Dérivées et étude de fonctions

E.48 🔧 On considère la fonction f définie par : $f(x) = 3 \cdot e^{1-2x}$

1 Déterminer l'expression de la fonction f' , dérivée de la

fonction f . Puis, en déduire le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

2 En déduire le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

E.49 Pour chacune des deux fonctions ci-dessous définies sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de leur fonction dérivée ainsi que leur sens de variation sur $\mathbb{R}$:

① $f(x) = 3 \cdot e^{5x+1}$ ② $g(x) = 2 - 3 \cdot e^{-x}$

E.50 Pour chacune des fonctions ci-dessous définies sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de leur fonction dérivée, puis étudier leur sens de variations sur $\mathbb{R}$:

① $f(x) = x - e^{-x}$ ② $g(x) = 6x + 3 \cdot e^{-2x}$

E.51 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = e^{4x-4} - 4 \cdot e^{-x}$

Déterminer l'expression de leur fonction dérivée, puis étudier leur sens de variations sur $\mathbb{R}$:

E.52 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

• $f(x) = \frac{e^{1+x} + e^{1-x}}{2}$ • $g(x) = \frac{e^{1+x} - e^{1-x}}{2}$

Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, on donne les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ respectivement représentative des fonctions f et g :

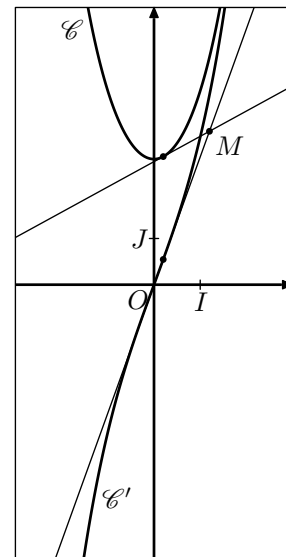
- ① Établir que, pour tout nombre réel x : $f(x) - g(x) > 0$
- ② Établir que, pour tout réel x , on a :
 $f'(x) = g(x)$; $g'(x) = f(x)$
- ③ Considérons a un nombre réel quelconque :
 - a Justifier que l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a a pour expression :
 $y = g(a) \cdot (x - a) + f(a)$
 - b Justifier que l'équation réduite de la tangente (T') à la courbe $\mathcal{C}'$ au point d'abscisse a a pour expression :
 $y = f(a) \cdot (x - a) + g(a)$
- ④ Justifier que les tangentes (T) et (T') sont sécantes et en déduire l'abscisse du point d'intersection.

E.53

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

• $f(x) = \frac{e^{1+x} + e^{1-x}}{2}$
 • $g(x) = \frac{e^{1+x} - e^{1-x}}{2}$

Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, on donne les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ respectivement représentative des fonctions f et g :



Partie A : étude de la position relative des deux courbes

- ① Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ se situe toujours au-dessus de la courbe $\mathcal{C}'$.

Partie B : étude d'un lieu géométrique

Soit a un nombre réel quelconque. On considère :

- la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a ;
- la tangente (T') à la courbe $\mathcal{C}'$ au point d'abscisse a ;

On admet que les droites (T) et (T') ne sont jamais parallèles. On note M leur point d'intersection.

- ② a Donner l'expression de l'équation réduite de la tangente (T) en fonction de a .
- b Donner l'expression de l'équation réduite de la tangente (T') en fonction de a .
- ③ Déterminer l'abscisse du point M .
- ④ a Déterminer les coordonnées du M .
- b Justifier que le point M appartient à la courbe d'une des fonctions de références qu'on précisera.

E.54 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x$

On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- ① Soit a un nombre réel. Démontrer que la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point P d'abscisse $a-1$.
- ② Soit N le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses. Démontrer que : $\overrightarrow{NP} = -\vec{i}$

13. Dérivées d'un produit

E.55

Proposition : soit f une fonction définie sur un intervalle I par le produit : $f(x) = u(x) \times v(x)$
 où les fonctions u et v sont définies et dérivables sur I .

Alors la fonction f est dérivable sur I et sa fonction dérivée est définie par : $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

a $f(x) = x \cdot e^x$ b $f(x) = (1 - 2 \cdot x) \cdot e^x$

E.56 Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

a $f(x) = (3 - x) \cdot e^x$ b $g(x) = (x + 1) \cdot e^x$

E.57 On considère la fonction f définie par :
 $f(x) = (2 \cdot x - 1) \cdot e^x$

Donner l'ensemble de définition de la fonction f et l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .

Indication : on donnera l'expression de f' sous forme factorisée.

E.58 On considère une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3; 2]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . On donne les informations suivantes sur la fonction f :

$$f(0) = 3 \quad ; \quad f'(1) = 0 \quad ; \quad f'(0) = 0,5$$

On admet qu'il existe trois réels a, b, c pour lesquels la fonction f définie ci-dessus est définie, pour tout x de $[-3; 2]$, par : $f(x) = (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) \cdot e^x + 5$.

1 En utilisant une des informations précédentes, justifier que $c = -2$.

2 On admet que la fonction dérivée f' est donnée, pour tout réel x de $[-3; 2]$, par :

$$f'(x) = [a \cdot x^2 + (2 \cdot a + b) \cdot x - 2 + b] \cdot e^x$$

En utilisant les informations précédentes, justifier que $b = 2,5$, puis, que $a = -1$.

14. Dérivées d'un produit et composition linéaire

E.59 Déterminer l'expression des fonctions dérivées suivantes :

$$1 \quad f(x) = (x + 3) \cdot e^{-x} \quad 2 \quad g(x) = x \cdot e^{2 \cdot x - 1}$$

E.60 Déterminer l'expression des fonctions dérivées suivantes :

$$1 \quad h(x) = x \cdot e^{x+1} \quad 2 \quad j(x) = (x^2 + 1) \cdot e^{3x+1}$$

E.61 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = (x + 1) \cdot e^{-2x+3}$.

Parmi les quatre propositions proposées, laquelle est vraie? La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' est donnée par :

- a $f'(x) = -2 \cdot e^{-2x+3}$ b $f'(x) = e^{-2x+3}$
 c $f'(x) = (-2x+3)e^{-2x+3}$ d $f'(x) = (-2x-1)e^{-2x+3}$

E.62 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0; 5]$ par :

$$f(x) = (a \cdot x - 2) \cdot e^{-x}$$

où a est un nombre réel.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0; 5]$.

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f et on admet que :

$$f(0) = -2 \quad ; \quad f'(0) = 10$$

1 Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 5]$, on a :
 $f'(x) = (-a \cdot x + a + 2) \cdot e^{-x}$

2 Dédire des questions précédentes que $a = 8$.

3 Donner l'expression de $f'(x)$.

15. Dérivées d'un produit et étude de fonctions

E.63 Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) = (x + 1) \cdot e^x$

1 À l'aide de la calculatrice, conjecturer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2 On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Démontrer que pour tout réel x : $f'(x) = (x + 2)e^x$

3 Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

E.64 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = (-6 \cdot x^2 + 5 \cdot x) \cdot e^x$

1 Établir que la fonction f' , dérivée de la fonction f , a pour expression : $f'(x) = (-6 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 5) \cdot e^x$

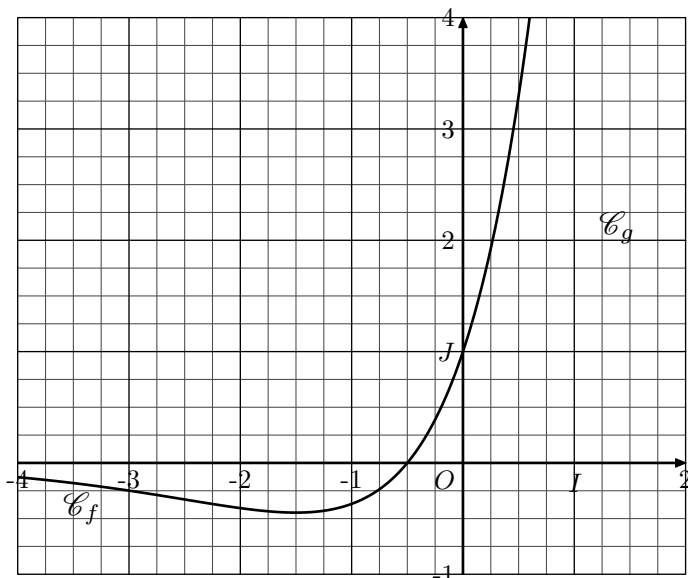
2 Établir le tableau de signe de la fonction f' .

3 Donner les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Indications : les valeurs des images et limites aux bornes ne sont pas demandées.

E.65  Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = (2x + 1) \cdot e^x$.

Sur le graphique ci-dessous est tracée la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f .



- ① Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
- ② Montrer que, pour tout x réel, que : $f'(x) = (2x + 3)e^x$
- ③ Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis préciser les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- ④ On considère la droite (T) tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 :
 - a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) .
 - b) Tracer dans le repère ci-dessous la tangente (T) .
 - c) Justifier graphiquement que, pour tout réel x , on a : $(2x+1)e^x \geq 3x+1$
- ⑤ On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g définie par : $g(x) = (2x + 1)e^{1-x}$
 Étudier les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

16. Dérivées d'un produit, composition linéaire et étude de fonctions

E.66  On admet que la fonction f est définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-2; 4]$ par : $f(x) = (x + 2) \cdot e^{-x+1}$

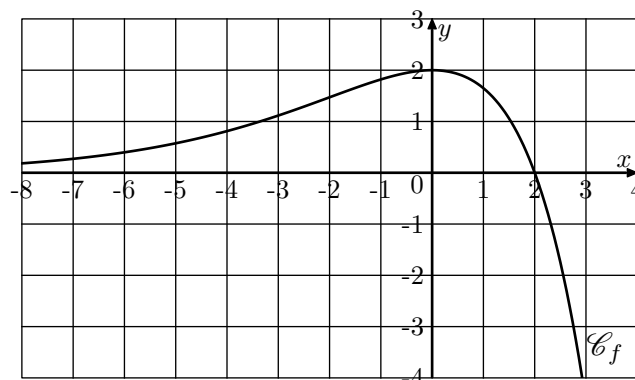
On note f' la fonction dérivée de f .

- ① Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[-2; 4]$, on a : $f'(x) = -(x + 1) \cdot e^{-x+1}$
- ② Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-2; 4]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

E.67  On admet que la fonction f est définie par :
 $f(x) = (x^2 - 2 \cdot x + 1) \cdot e^{-2 \cdot x + 6}$

- ① Montrer que $f'(x) = (-2 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 4) \cdot e^{-2 \cdot x + 6}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .
- ② Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, 7; 6]$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, 7; 6]$.
 On ne demande pas de calculer les ordonnées.

E.68  On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.



On suppose que f est de la forme $f(x) = (b - x) \cdot e^{a \cdot x}$ où a et b désignent deux constantes.

On sait que :

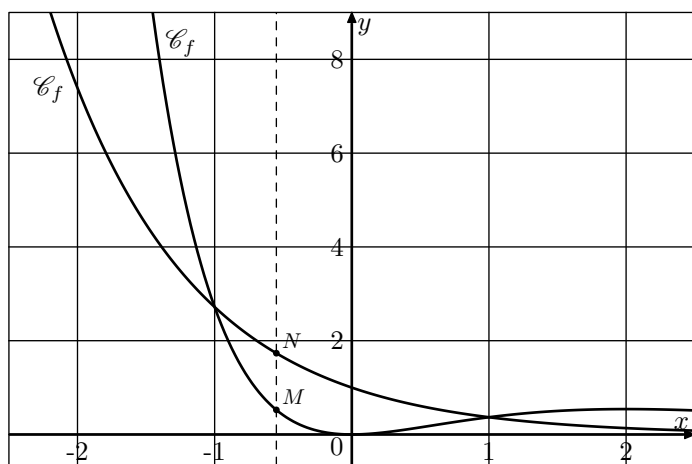
- Les points $A(0; 2)$ et $D(2; 0)$ appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_f$.
- La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

On note f' la fonction dérivée de f , définie sur $\mathbb{R}$.

- ① Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.
- ② Calculer $f'(x)$.
- ③ En utilisant les questions précédentes, montrer que a et b sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} b - 2 = 0 \\ a \cdot b - 1 = 0 \end{cases}$$
- ④ Calculer a et b et donner l'expression de $f(x)$.

E.69 🔒 Le graphique ci-dessous représente, dans un repère $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x} \quad ; \quad g(x) = e^{-x}$$


- 1 a Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- b Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- 2 Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1; 1]$, on considère les points M de coordonnées $(x; f(x))$ et N de coordonnées $(x; g(x))$, et on note $d(x)$ la distance MN . On admet que : $d(x) = e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x}$.
On admet que la fonction d est dérivable sur l'intervalle $[-1; 1]$ et on note d' sa fonction dérivée.
 - a Montrer que : $d'(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 1)$
 - b En déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[-1; 1]$.
 - c Déterminer l'abscisse commune x_0 des points M_0 et N_0 permettant d'obtenir une distance $d(x_0)$ maximale, et donner la valeur de la distance M_0N_0 , arrondie à 0,1 près.

17. Dérivées d'un quotient

E.70 🔒

Proposition : soit f une fonction définie sur un intervalle I par le produit : $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où les fonctions u et v sont définies et dérivables sur I .

Alors la fonction f est dérivable sur I et sa fonction dérivée est définie par : $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

$$1 \quad f(x) = \frac{1}{1 - e^x} \quad 2 \quad g(x) = \frac{e^{x+1}}{2 \cdot x + 1}$$

E.71 🔒 Pour chaque ligne, le tableau ci-dessous donne l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f :

$f(x) = \frac{e^x}{x+1}$	$f'(x) = \frac{x \cdot e^x}{(x+1)^2}$
$f(x) = \frac{2 \cdot x + 1}{e^x}$	$f'(x) = \frac{-2 \cdot x + 1}{e^x}$
$f(x) = \frac{3 \cdot e^x + 1}{e^x - 1}$	$f'(x) = \frac{-4 \cdot e^x}{(e^x - 1)^2}$

Vérifier la véracité de chacune des expressions f' données.

18. Dérivées d'un quotient et composition linéaire

E.72 🔒 Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

$$1 \quad h(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{e^x} \quad 2 \quad j(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{2x}}$$

E.73 🔒

1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{0,5 + 100 \cdot e^{-x}}$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

Montrer que, pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{400 \cdot e^x}{(e^x + 200)^2}$$

2 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{100 \cdot e^{-x}}{0,5 + 100 \cdot e^{-x}}$$

On note g' la fonction dérivée de g sur $\mathbb{R}$.

Montrer que, pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = \frac{-200 \cdot e^x}{(e^x + 200)^2}$$

19. Dérivées d'un quotient et étude de fonctions

E.74 🔒 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

- 1 Montrer que la fonction f' , dérivée de la fonction f , admet pour expression : $f'(x) = \frac{(x-1) \cdot e^x}{x^2}$

2 a Sur $\mathbb{R}_+^*$, dresser le tableau de signes de la fonction f' .

b Sur $\mathbb{R}_+^*$, en déduire le tableau de variations de la fonction f .

Indication : on admet les deux limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

E.75 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 8 - \frac{4e^x}{e^x + 1}$$

1 Établir que la fonction f' dérivée de la fonction f s'exprime par :

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}$$

2 En déduire les variations de la fonction f .

E.76 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.

1 Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g .

2 Justifier que pour tout x , $(e^x - x)$ est strictement positif.

Partie B

1 a Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f .

b Étudier les sens de variations de f .

2 a Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

b À l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (T) .

E.77 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x + 1 - \frac{12 \cdot e^x}{e^x + 1}$$

1 On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Montrer que la fonction f' admet une expression de la forme :

$$f'(x) = 3 \cdot [g(x)]^2$$

où g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

2 En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

E.78 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x + 1 - \frac{16 \cdot e^x}{2 \cdot e^x + 1}$$

Déterminer les variations de la fonction f .

20. Dérivées d'un quotient, composition linéaire et étude de fonctions

E.79 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x + 1}$$

1 Établir que : $f'(x) = \frac{(2x + 1) \cdot e^{2x}}{(x + 1)^2}$

2 Dresser le tableau de variations de la fonction f .

21. Vers les équations différentielles

E.80 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = e^{2x+3}$$

1 Montrer que, pour tout nombre réel x , on a la relation : $2 \cdot f(x) - f'(x) = 0$

2 a Parmi les expressions suivantes d'une fonction g , laquelle vérifie la relation (*) :

• $g(x) = e^{2x+3} + 4$ • $g(x) = e^{8x+12}$

• $g(x) = 4 \cdot e^{2x+3}$ • $g(x) = e^{-2x-3}$

b Donner l'expression d'une troisième fonction h vérifiant la relation (*).

E.81 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x \cdot e^x$

1 a Montrer que la fonction f' , dérivée de la fonction f , par : $f'(x) = (x + 1) \cdot e^x$

b Déterminer l'expression de la fonction f'' , dérivée de la fonction f' .

2 On considère la fonction g définie par :

$$g = f'' - 2 \cdot f' + f$$

Justifier que la fonction g est la fonction nulle.

E.82 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = (x + 1) \cdot e^{2x}$$

Montrer que la fonction f vérifie la relation :

$$f''(x) - 4 \cdot f'(x) + 4 \cdot f(x) = 0$$

E.83 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = (-x - 1) \cdot e^x$$

Montrer que la fonction f vérifie pour tout nombre réel x :

$$f''(x) - 3 \cdot f'(x) + 2 \cdot f(x) = e^x$$

22. Variations et différentiations

E.84 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

- 1 Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .
- 2 Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.

E.85 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{2 \cdot e^x - 1}{e^{2x}}$$

- 1 Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .
- 2 Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-1; 10]$.

E.86 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$$

- 1 Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .
- 2 Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-1; 10]$.

E.87 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 2}{e^x - 1}$$

- 1 Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .
- 2 Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1; 10]$.

23. Fonctions exponentielles et suites

E.88 Soit a un nombre réel quelconque. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad ; \quad u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire :

$$u_{n+1} = e^{u_n} \cdot (e^{u_n} - 1).$$

On considère la fonction g définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x$$

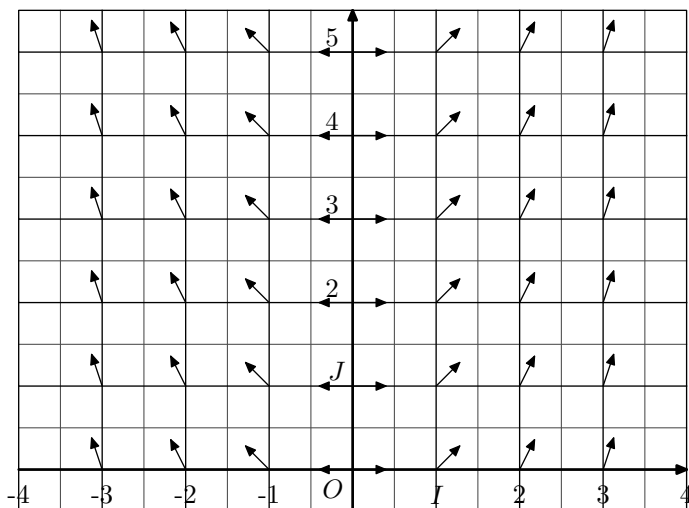
- 1 Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x :
 $g'(x) = (e^x - 1)(2 \cdot e^x + 1)$
- 2 Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
- 3 En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

24. Exercices non-classés

E.89 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$f'(x) = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

- 1 Donner au moins deux fonctions qui vérifient cette relation.
- 2 On propose le champ de tangentes représenté ci-dessous :



- a Vérifier que chaque tangente représentée sur la droite d'équation $x = 2$ a pour coefficient directeur 2.
- b Vérifier que pour chaque tangente ayant pour origine le point de coordonnées $(x; y)$, son coefficient directeur est x .
- 3 On considère maintenant la fonction f qui vérifie les deux conditions suivantes :

$$f(0) = \frac{3}{2} \quad ; \quad f'(x) = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f .