Première spécialité / Fonctions dérivées

D'autres exercices pour ce chapitre sont disponibles en suivant le lien :
https://chingatome.fr/chapitre/hp-lycee/derivees

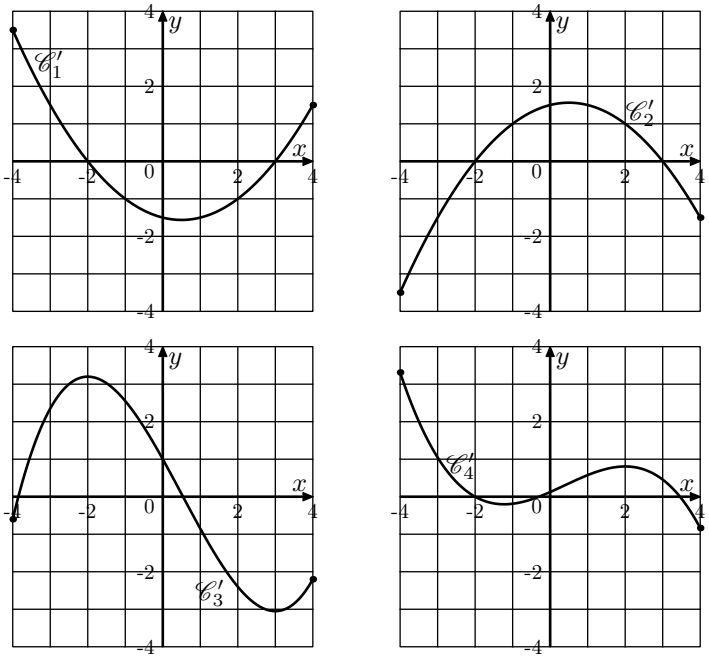
ChingEval : 4 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. Fonction dérivée : relation graphique

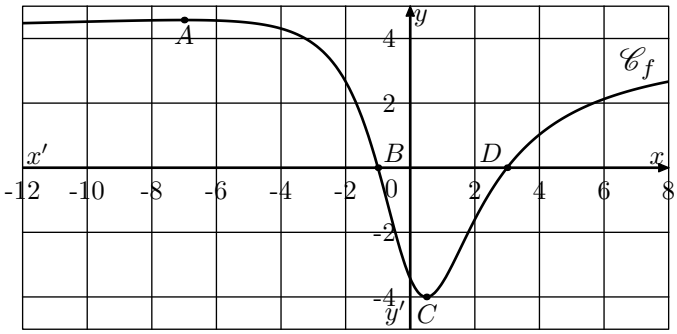
E.1 On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;4]$ et dont on connait les propriétés suivantes :

- la fonction f admet un maximum en -2 sur l'intervalle $[-3\,;0]$.
- la fonction f admet un minimum en 3 sur l'intervalle $[1\,;4]$.

Parmi les quatre courbes représentatives ci-dessous, une seule est la courbe représentative de la fonction f' dérivée de la fonction f.



E.2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé :



- La courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux tangentes horizontales aux points A et C d'abscisses respectives -7 et $\dfrac{1}{2}$;
- La courbe $\mathscr{C}_f$ intercepte l'axe des abscisses aux points B et D de coordonnées respectives $(-1\,;0)$ et $(3\,;0)$.

1. On considère la fonction g qui admet pour dérivée la fonction f *($g'=f$)*. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
2. On considère la fonction h qui est la dérivée de la fonction f *($f'=h$)*. Dresser le tableau de signes de la fonction h.

2. Dérivés de produits : fonction polynôme

E.3 On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$u(x) = 3{\cdot}x - 2 \quad ; \quad v(x) = 2 - x$

On définit la fonction f définie par la relation $f = u{\cdot}v$.
Déterminer les images ci-dessous par la fonction f :

a) $f(1)$ b) $f(3)$ c) $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

CC BY-NC

E.4

Pour deux fonctions u et v définies sur un intervalle I, la fonction produit $u{\cdot}v$ admet pour dérivée la fonction notée $(u{\cdot}v)$ définie pour tout $x \in I$ par :

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

1. Compléter le tableau ci-dessous, où la fonction u' *(resp.* v'*)* est la fonction dérivée de la fonction u *(resp.* v*)*:

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3{\cdot}x^2{+}3{\cdot}x$	$2{\cdot}x+2$		
x^8	$3-x$		

2. Pour chacune des lignes du tableau, montrer que la fonction f admet la fonction f' pour fonction dérivée :

$f(x)$	$f'(x)$
$(3{\cdot}x^2+3{\cdot}x)(2{\cdot}x+2)$	$18{\cdot}x^2+24{\cdot}x+6$
$x^8{\cdot}(3-x)$	$x^7{\cdot}(24-9{\cdot}x)$

E.5

1. Pour chacune des fonctions u *(resp.* v*)*, donner l'expression de sa fonction dérivée u' *(resp* v'*)*:

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3{\cdot}x^2-2$	$8-x$		

2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto (3{\cdot}x^2-2)(8-x)$$

E.6 Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

1. $f\colon x \longmapsto x^5{\cdot}(x^2{-}1)$
2. $g\colon x \longmapsto (2{\cdot}x^2{-}5x{+}1)(1{-}x^2)$

3. *Dérivés de produits : fonction inverse*

E.7

Pour deux fonctions u et v définies sur un intervalle I, la fonction produit $u{\cdot}v$ admet pour dérivée la fonction notée $(u{\cdot}v)$ définie pour tout $x \in I$ par :

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

1. Compléter le tableau ci-dessous, où la fonction u' *(resp.* v'*)* est la fonction dérivée de la fonction u *(resp.* v*)*:

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$\dfrac{1}{x}$	x^5+1		
$\dfrac{1}{x}$	$3-x^2$		

2. Pour chacune des lignes du tableau, montrer que la fonction f admet la fonction f' pour fonction dérivée :

$f(x)$	$f'(x)$
$\dfrac{1}{x}{\cdot}(x^5+1)$	$\dfrac{4x^5-1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x}{\cdot}(3-x^2)$	$\dfrac{-x^2-3}{x^2}$

E.8

1. Pour chacune des fonctions u *(resp.* v*)*, donner l'expression de sa fonction dérivée u' *(resp* v'*)*:

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$\dfrac{1}{x}$	x^2-1		
$5{\cdot}x+\dfrac{2}{x}$	$3-2{\cdot}x^3$		

2. Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer l'expression de sa fonction dérivée :

a. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}{\cdot}(x^2-1)$ c. $g : x \longmapsto \left(5{\cdot}x+\dfrac{2}{x}\right)(3-2{\cdot}x^3)$

E.9 Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

1. $f\colon x \longmapsto (3-x){\cdot}\dfrac{1}{x}$
2. $g : x \longmapsto x{\cdot}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

On donnera l'expression des fonctions dérivées sous la forme d'un **quotient simplifié**.

4. *Dérivés de produits : fonction racine carrée*

E.10

Pour deux fonctions u et v définies sur un intervalle I, la fonction produit $u{\cdot}v$ admet pour dérivée la fonction notée $(u{\cdot}v)$ définie pour tout $x \in I$ par :

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

BY-NC

1 Compléter le tableau ci-dessous, où la fonction u' *(resp. v')* est la fonction dérivée de la fonction u *(resp. v)*:

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$2{\cdot}x^2{+}1$	$\sqrt{x}$		
$\dfrac{2}{x}$	$\sqrt{x}$		

2 Pour chacune des lignes du tableau, montrer que la fonction f admet la fonction f' pour fonction dérivée:

$f(x)$	$f'(x)$
$(2{\cdot}x^2+1)\sqrt{x}$	$\dfrac{10{\cdot}x^2+1}{2\sqrt{x}}$
$\dfrac{2}{x}{\cdot}\sqrt{x}$	$-\dfrac{1}{x{\cdot}\sqrt{x}}$

E.11

1 Pour chacune des fonctions u *(resp. v)*, donner l'expression de sa fonction dérivée u' *(resp v')*:

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
x	$\sqrt{x}$		
x^2+1	$\sqrt{x}$		

2 Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer l'expression de sa fonction dérivée:

a $f: x \longmapsto x{\cdot}\sqrt{x}$ b $g: x \longmapsto (x^2+1){\cdot}\sqrt{x}$

E.12 Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction g définie ci-dessous:

$g: x \longmapsto (x^2-3){\cdot}\sqrt{x}$

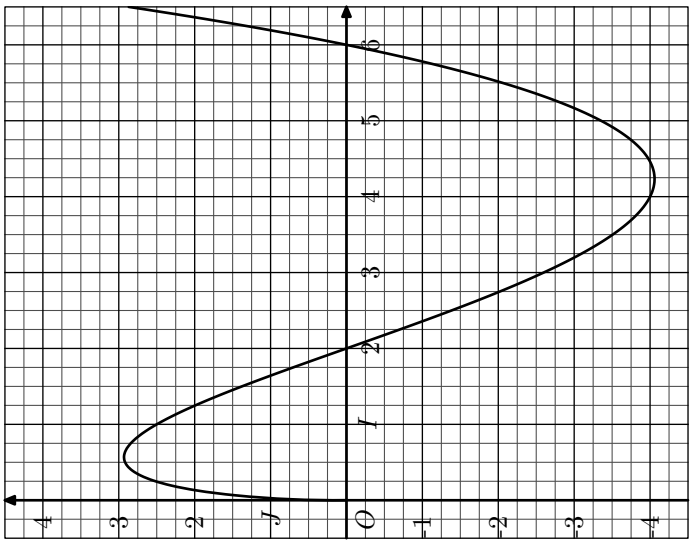
On donnera l'expression de la fonction dérivée g' sous la forme d'un **quotient simplifié**.

5. *Produits: fonctions dérivées vers tangentes*

E.13 On considère la fonction f définie par la relation est:

$$f(x) = \sqrt{x}{\cdot}\left(\frac{1}{2}{\cdot}x^2 - 4x + 6\right)$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f:



1 a Effectuer le tracé de la droite (d) dont l'équation est:

$$y = -\frac{1}{2}{\cdot}x - 2$$

b Effectuer le tracé de la droite (Δ) dont l'équation est:

$$y = -\frac{7}{4}{\cdot}x + \frac{17}{4}$$

2 a Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction f.

b Donner les valeurs des nombres dérivées de la fonction f en 1 et 4.

6. *Produits: tangentes*

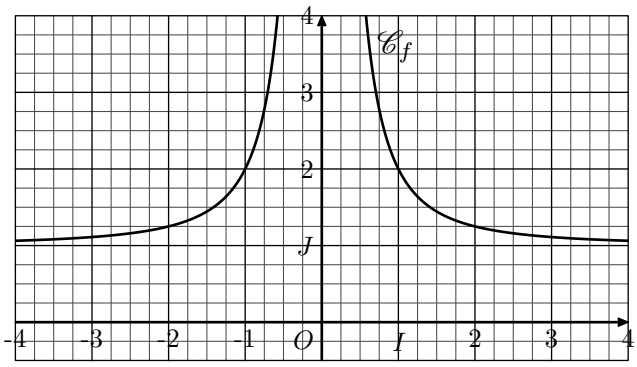
E.14 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par:

$$f(x) = \frac{1}{x}{\cdot}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

1 Établir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression: $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

2 On donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$:

CC BY-NC



a) Donner la valeur des nombres $f(2)$ et $f'(2)$.

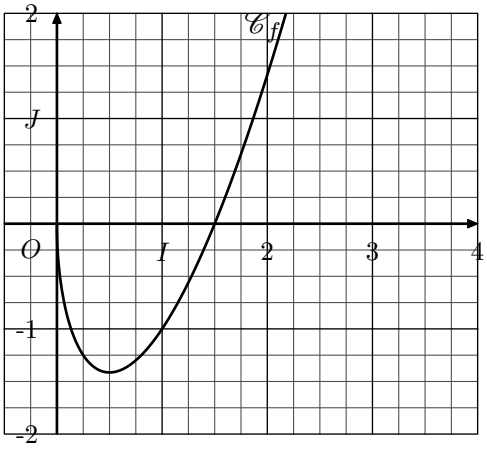
b) En déduire l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

c) Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

E.15 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = (2{\cdot}x - 3){\cdot}\sqrt{x}$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



1) Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{6x - 3}{2\sqrt{x}}$$

2) a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

b) Tracer dans le repère ci-dessus la tangente (T).

E.16 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = (2x + 2){\cdot}\sqrt{x}$$

1) Établir que : $f'(4) = \dfrac{13}{2}$

2) On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
En déduire l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

E.17 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = (3 - x){\cdot}\sqrt{x}$$

1) Établir que : $f'(9) = -4$

2) On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
En déduire l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 9.

E.18 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = (4 - x){\cdot}\sqrt{x}$$

1) Établir que : $f'(8) = -\dfrac{5{\cdot}\sqrt{2}}{2}$

2) On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
En déduire l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 8.

7. *Produits : variations*

E.19 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par l'expression :

$$f(x) = \left(5x^2 + 5x - 4\right){\cdot}\sqrt{x}$$

1) Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{25{\cdot}x^2 + 15{\cdot}x - 4}{2{\cdot}\sqrt{x}}$$

2) Dresser le tableau de signes de la fonction f' sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) En admettant les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto 0^+} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto +\infty} f(x) = +\infty$$

Dresser le tableau de variations de la fonction f.

E.20 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par l'expression :

$$f\colon x \longmapsto \sqrt{x}{\cdot}\left(-5x^2 - 5x - 1\right) + \frac{1}{2}$$

1) Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de f.

2) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.
On admet la limite suivante : $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x) = -\infty$

3) a) Justifier que la fonction f s'annule une seule fois sur son ensemble de définition.

b) Justifier, à l'aide de valeur approchée, que la fonction f s'annule entre $\dfrac{1}{10}$ et $\dfrac{15}{100}$.

CC BY-NC

8. Produits : tangentes et variations

E.21 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = (x^2 - x)\cdot\sqrt{x}$$

1. Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{5\cdot x^2 - 3x}{2\cdot\sqrt{x}}$
2. Dans le repère $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.
   Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
3. a. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.
   b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

E.22 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = (3\cdot x^2 - 5\cdot x)\cdot\sqrt{x}$$

1. Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression :
   $$f'(x) = \frac{15x\cdot(x-1)}{2\cdot\sqrt{x}}$$
2. Dans le repère $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.
   Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

9. Quotients : fonction dérivée

E.23 On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$u(x) = 3\cdot x - 2 \quad ; \quad v(x) = 2 - x$$

On définit la fonction g définie par la relation $g = \dfrac{u}{v}$.
Déterminer, si possible, les images ci-dessous par la fonction g :

a. $g(0)$ b. $g(2)$ c. $g\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

E.24

Proposition :
Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I telles que v ne s'annule pas sur v. On considère la fonction f définie sur I par : $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

La fonction f admet pour fonction dérivée la fonction f' définit par :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$$

1. Pour chaque ligne, donner l'expression de la fonction u' *(resp. v')* dérivée de la fonction u *(resp. u')* :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$5\cdot x + 2$	$3\cdot x - 2$		
$x^2 - 3$	$x + 1$		

2. Pour chacune des fonctions f ci-dessous, on établira l'expression proposée de sa fonction dérivée f' :

$f(x)$	$f'(x)$
$\dfrac{5\cdot x + 2}{3\cdot x - 2}$	$\dfrac{-16}{(3\cdot x - 2)^2}$
$\dfrac{x^2 - 3}{x + 1}$	$\dfrac{x^2 + 2\cdot x + 3}{(x+1)^2}$

E.25

1. Pour chaque ligne, donner l'expression de la fonction u' *(resp. v')* dérivée de la fonction u *(resp. u')* :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3 - 2x$	$x + 1$		
x^2	$2x + 1$		

2. Pour chacune des lignes ci-dessous, établir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$f(x)$	$f'(x)$
$\dfrac{3 - 2\cdot x}{x + 1}$	$-\dfrac{5}{(x+1)^2}$
$\dfrac{x^2}{2\cdot x + 1}$	$\dfrac{2\cdot x^2 + 2\cdot x}{(2\cdot x + 1)^2}$

E.26 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3}{2 - x}$$

Déterminer l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.

E.27 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x + 3}$$

Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{-8x + 8}{(x^2 - 2x + 3)^2}$

E.28 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2\cdot x + 1}$$

Déterminer l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.

CC BY-NC

E.29 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{2\cdot x^2-1}$

Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{-2\cdot x^2-6\cdot x-1}{(2\cdot x^2-1)^2}$

E.30 On considère la fonction h dont l'image de x est défini par la relation : $h(x) = \dfrac{x^2-2\cdot x+1}{x^2-5\cdot x+6}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Montrer que le nombre de dérivé de h en x s'exprime par : $h'(x) = \dfrac{-3\cdot x^2+10\cdot x-7}{(x^2-5\cdot x+6)^2}$

E.31 On considère la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{5\cdot x-x^2}{3-x^2}$

Établir l'égalité suivante : $g'(x) = \dfrac{5\cdot x^2-6\cdot x+15}{\left(3-x^2\right)^2}$

E.32 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+4\cdot x-1}{2\cdot x-1}$

Montrer que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{2\cdot x^2-2\cdot x-2}{(2\cdot x-1)^2}$

E.33 On considère la fonction f est définie par : $\dfrac{2\cdot x-1}{x^2+x}$

Montrer que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression : $f'(x) = -\dfrac{2\cdot x^2-2\cdot x-1}{x^2\cdot(x+1)^2}$

E.34 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{4\cdot x^2+x-3}{3\cdot x^2+2\cdot x-1}$

Montrer que la fonction f', dérivée de la fonction f admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{5}{\left(3\cdot x-1\right)^2}$

E.35 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{4\cdot x^2+x}{3\cdot x^2-x}$

Montrer que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{7}{\left(3\cdot x-1\right)^2}$

10. *Quotients : fonctions dérivées et racines carrées*

E.36 Le tableau ci-dessous vous présente, pour chaque ligne, l'expression de l'image de x par une fonction et l'expression du nombre dérivé en x de cette fonction. Vérifier l'exactitude de l'expression du nombre dérivé en x :

Fonction	Image de x	Nombre dérivé en x
f	$\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$	$\dfrac{-x+1}{2\sqrt{x}\cdot(x+1)^2}$
g	$(x^2-3)\cdot\sqrt{x}$	$\dfrac{5\cdot x^2-3}{2\cdot\sqrt{x}}$

E.37 On considère les deux fonctions f et g définies par les relations :

$$f(x) = \left(x^2-3\cdot x\right)\cdot\sqrt{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

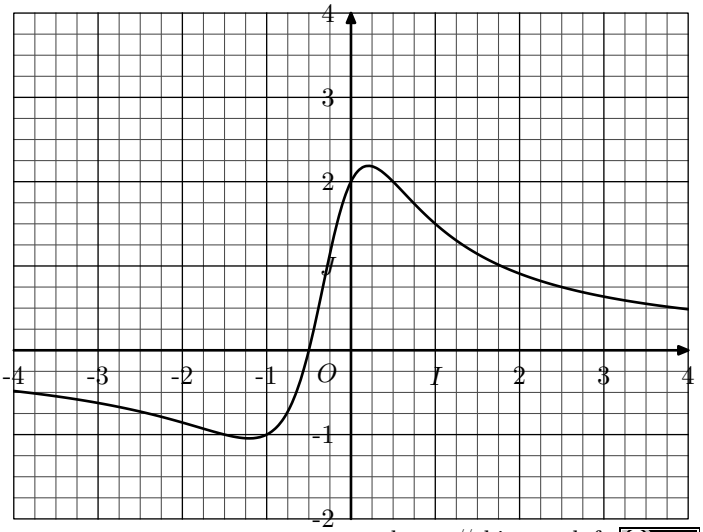
Déterminer les expressions des fonctions dérivées f' et g' sous la forme de quotients simplifiés.

11. *Quotients : fonctions dérivées et tangentes*

E.38 On considère la fonction f définie par la relation est :

$$f(x) = \frac{4\cdot x+2}{2\cdot x^2+x+1}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :



CC BY-NC

1 a Effectuer le tracé de la droite (d_1) dont l'équation est :

$$y = \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2}$$

b Effectuer le tracé de la droite (d_2) dont l'équation est :

$$y = 2\cdot x + 2$$

c Effectuer le tracé de la droite (d_3) dont l'équation est :

$$y = -x + \frac{5}{2}$$

2 a Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction f.

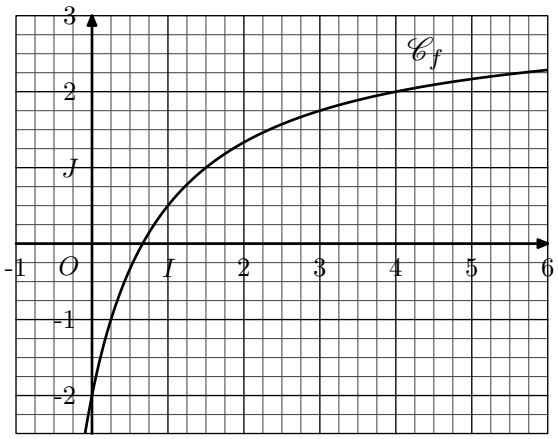
b Donner les valeurs des nombres dérivées de la fonction f en -1, 0 et $\frac{1}{2}$.

12. *Quotients : tangentes*

E.39 On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ et dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



On note (d) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

1 Déterminer l'équation réduite de la droite (d).

2 Tracer la tangente (d) dans le repère $(O\,;I\,;J)$.

E.40 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image de x est définie par la relation :

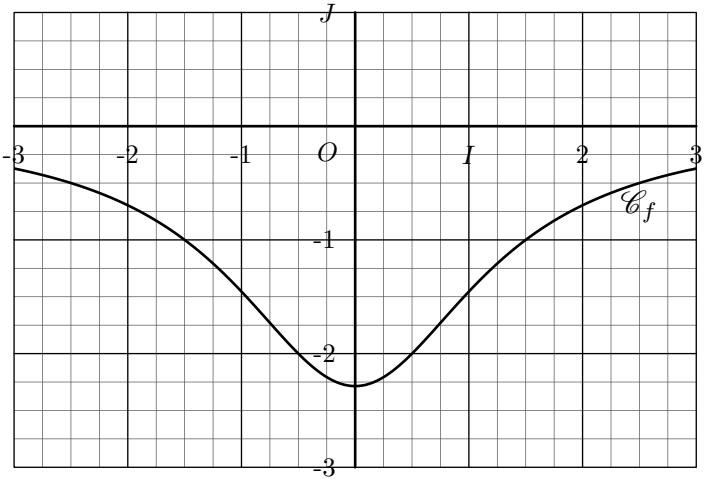
$$f(x) = \frac{-16}{4\cdot x^2+7}$$

1 Établir que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

$$f'(x) = \frac{128\cdot x}{\left(4\cdot x^2+7\right)^2}$$

2 Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

3 Dans, le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, est représentée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f. Tracer la représentation graphique de (T).

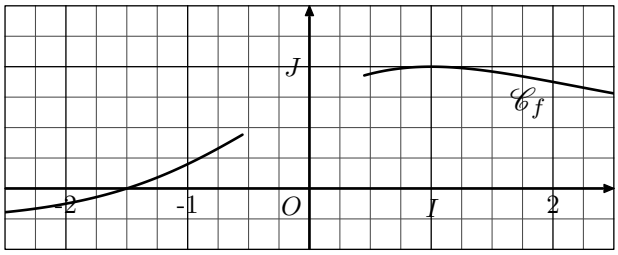


CC BY-NC

E.41 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{2\cdot x + 3}{x^2 + 4}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$. Ci-dessous est représentée une partie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

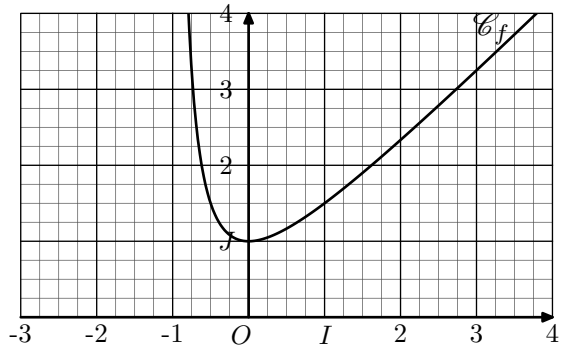


1. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 et effectuer son tracé dans le repère ci-dessus. *(on indiquera les coordonnées des deux points utilisés pour le tracé de la tangente).*
2. Déterminer le ou les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ où celle-ci admet une tangente horizontale.

E.42 On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ dont l'expression est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. Établir que la fonction f' dérivée de la fonction f a pour expression : $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2\cdot x}{(x+1)^2}$
2. On considère les droites (d) et (Δ) tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses respectives $-\dfrac{1}{2}$ et 1.
   a. Déterminer les équations réduites des tangentes (d) et (Δ).
   b. Tracer les droites (d) et (Δ).

E.43 On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ et on considère la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{3\cdot x^2 - x + 2}{x + 1}$$

On note $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative dans le plan.

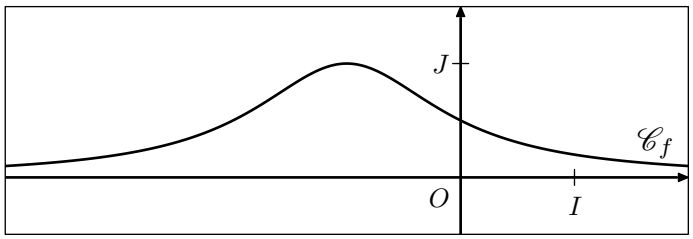
1. Déterminer l'équation de la tangente (Δ) à la courbe $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 2.
2. Vérifier vos résultats à l'aide de la calculatrice

13. *Quotients : tangentes et points d'intersection*

E.44 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2\cdot x + 2}$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ orthonormé ci-dessous :



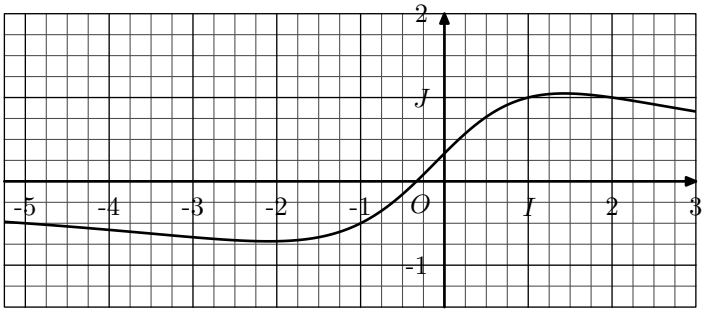
Soit (Δ) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

1. a. Établir que la fonction dérivée de la fonction f admet pour expression : $f'(x) = \dfrac{-2\cdot x - 2}{\left(x^2 + 2\cdot x + 2\right)^2}$
   b. Établir que l'équation réduite de la droite (Δ) admet pour expression : $y = -\dfrac{1}{2}\cdot x + \dfrac{1}{2}$.
2. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (Δ).

E.45 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3\cdot x + 1}{x^2 + 3}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. a. Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en 1.
   b. En déduire l'équation de la tangente (d) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   c. Effectuer le tracé de la droite (d).
3. a. Déterminer la valeur des réels a, b et c réalisant l'identité suivante :
   $x^3 + 3\cdot x^2 - 9\cdot x + 5 = (x-1)(a\cdot x^2 + b\cdot x + c)$
   b. En déduire la forme factorisée du polynôme :

BY-NC

$x^3+3\cdot x^2-9\cdot x+5$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :

$$f(x)=\frac{1}{4}\cdot x+\frac{3}{4}$$

4) Donner l'ensemble des coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente (d).

14. *Quotients : variations*

E.46 On considère la fonction f définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{2-3\cdot x}{4\cdot x^2+1}$$

1) Déterminer l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f.

2) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f'.

b) En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

E.47 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=\frac{4-3\cdot x}{x^2+1}$$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés :

L1	`f(x) :=(4-3*x)/(x^2+1)` $f(x)=\dfrac{4-3x}{x^2+1}$
L2	`g(x) :=Dérivée[f(x)]` $g(x)=\dfrac{3x^2-8x-3}{\left(x^2+1\right)^2}$
L3	`Résoudre[f(x)=0]` $\left\{x=\dfrac{4}{3}\right\}$
L4	`Résoudre[g(x)=0]` $\left\{x=-\dfrac{1}{3}\quad;\quad x=3\right\}$

1) Dresser le tableau de signes de la fonction f'.

2) Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)>0$.

E.48 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=\frac{3x-4}{x^2+1}$$

1) a) Déterminer l'expression de la fonction dérivée f'.

b) Dresser le tableau de signes de la fonction f'.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
On admettra les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)=0\quad;\quad\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=0$$

3) La fonction f admet-elle des extrémums? Si oui, préciser leurs caractéristiques.

E.49 On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation : $f(x)=\dfrac{x^2-x+3}{2x^2-2x+3}$

1) Montrer que le dénominateur ne s'annule jamais.

Ainsi, la fonction f est définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

2) Établir que la fonction dérivée f' de la fonction f admet pour expression : $f'(x)=\dfrac{-6x+3}{\left(2x^2-2x+3\right)^2}$

3) a) Dresser le tableau de signes de f' sur $\mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
On admettra les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)=\frac{1}{2}\quad;\quad\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$$

4) En déduire les extrémums de la fonction f.

E.50 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x)=\frac{3x^2-2x-2}{2x^2+x+1}$$

1) Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) a) Établir que la fonction dérivée f' admet l'expression suivante : $f'(x)=\dfrac{7x^2+14x}{\left(2x^2+x+1\right)^2}$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
On admet les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)=\frac{3}{2}\quad;\quad\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\frac{3}{2}$$

3) En déduire que la fonction f admet pour minorant le nombre -2 et pour majorant le nombre 2.

E.51 Pour $a\in\mathbb{R}$ fixé, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par : $f_a(x)=\dfrac{a\cdot x^2+1}{x+1}$

Déterminer l'ensemble des valeurs de a telles que la fonction f_a soit strictement décroissante sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Indication : toutes traces de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

15. *Quotients : modélisation problèmes économique*

E.52 Un supermarché souhaite acheter des fruits à un fournisseur.
Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandé.

Pour une commande de x kilogrammes de fruit, le prix $P(x)$ en euros du kilogramme de fruits est donné par la formule :

$$P(x)=\frac{x+300}{x+100}\quad\text{pour } x\in[100\,;+\infty[.$$

Par exemple si le supermarché achète 300 kilogrammes de

CC BY-NC

fruits, ces fruits lui sont vendus :

$$P(300) = \frac{600}{400} = 1{,}50 \text{ euros le kilogramme.}$$

Dans ce cas, le supermarché devra payer $300 \times 1{,}5 = 450$ euros au fournisseur pour cette commande.

Partie A : Étude du prix P proposé par le fournisseur.

1. Montrer que : $P'(x) = \dfrac{-200}{(x+100)^2}$ sur $[100\,;+\infty[$.

2. Donner le sens de variations de la fonction P sur $[100\,;+\infty[$.

Partie B : Étude de la somme S à dépenser par le supermarché.

On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits *(ces fruits vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme)*.
Cette somme est donc égale à :

$$S(x) = x \cdot P(x) \quad \text{pour } x \in [100\,;+\infty[.$$

1. Montrer que pour tout x appartenant à $[100\,;+\infty[$:

$$S'(x) = \frac{x^2 + 200 \cdot x + 30\,000}{(x+100)^2}$$

2. Montrer que pour tout x appartenant à $[100\,;+\infty[$:

$$S(x) = x + 200 - 20\,000 \times \frac{1}{x+100}$$

E.53 Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation.
Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

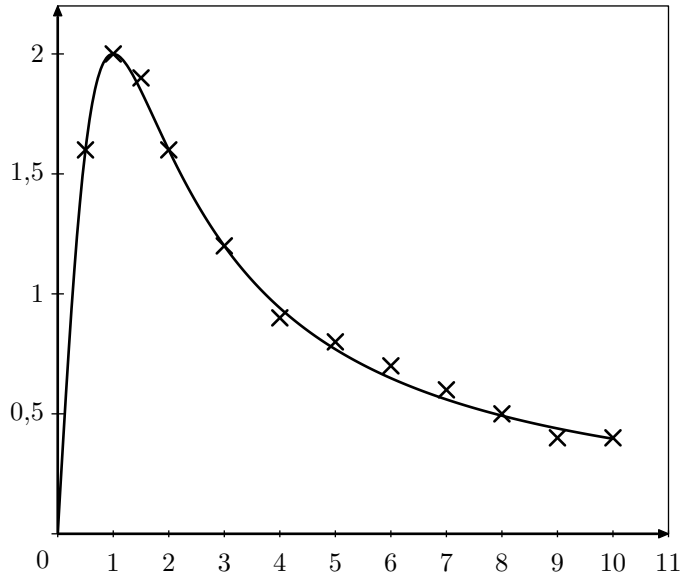
Temps en heure	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration en $^{mg}/_{\ell}$	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$g(t) = \frac{4 \cdot t}{t^2 + 1}$$

Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en $^{mg}/_{\ell}$ de l'antibiotique.

Le graphique ci-dessous représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g.



1. Par lecture graphique, donner sans justification :
   a. les variations de la fonction g sur $[0\,;10]$;
   b. la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;
   c. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à $1{,}2\ ^{mg}/_{\ell}$.

2. a. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0\,;10]$ et sa dérivée est g'.
   Montrer que : $g'(t) = \dfrac{4 \cdot (1 - t^2)}{(t^2+1)^2}$
   b. En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.

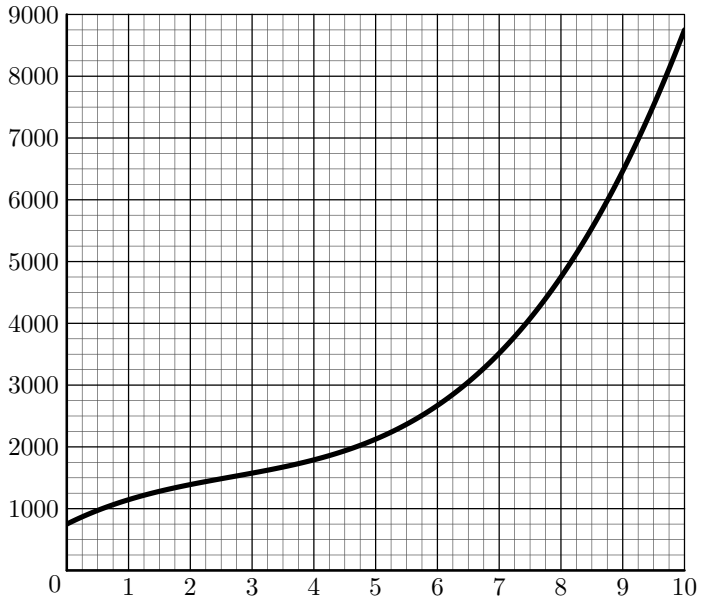
CC BY-NC

E.54 L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique de la fonction C.



Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : Étude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = p{\cdot}x$.

1. Tracer sur le graphique la droite D_1 d'équation :
   $y = 400{\cdot}x$.
   Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.

2. Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

   a. Tracer sur le graphique la droite D_2 d'équation :
   $y = 680{\cdot}x$.
   Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.

   b. On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;10[$ par :
   $B(x) = 680{\cdot}x - C(x)$
   Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;10]$, on a :
   $B'(x) = -45{\cdot}x^2 + 240{\cdot}x + 180$

   c. Étudier les variations de la fonction B sur $[0\,;10]$.
   En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum.
   Donner la valeur de ce bénéfice.

Partie B : Étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par : $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$

1. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;10]$, on a : $C'_M(x) = \dfrac{30{\cdot}(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$

2. a. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;10]$, $C'_M(x)$ est du signe de $(x-5)$.
   En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0\,;10]$.

   b. Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum?
   Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total?

E.55 **Partie A**

1. Le prix d'un article est de 120 euros. Ce prix subit une première évolution au taux de 25 %, puis une seconde évolution qui le ramène à sa valeur initiale. Quel est le taux de la deuxième évolution?

2. Le prix d'un article est de 120 euros. Ce prix subit une première évolution au taux de -20 %, puis une seconde évolution qui le ramène à sa valeur initiale. Quel est le taux de la deuxième évolution?

Partie B

D'une façon générale, un prix P subit deux évolutions successives, la première à un taux de x, et la deuxième à un taux de y. Il revient alors à sa valeur initiale P.

1. Montrer que x et y vérifient : $(1+x)(1+y)=1$.

On admet alors que : $y = \dfrac{-x}{1+x}$

2. On veut étudier sur l'intervalle $[-0{,}5\,;2]$ la fonction f telle que :
   $f(x) = \dfrac{-x}{1+x}$.
   Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

   a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.

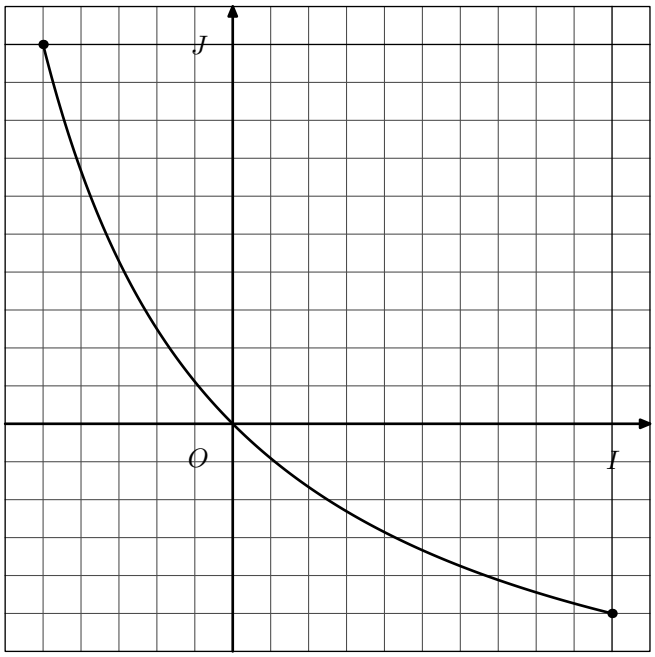
   b. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-0{,}5\,;2]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

3. À l'aide de la représentation graphique de la courbe $\mathscr{C}$ donnée en annexe, ou à l'aide d'un calcul, répondre aux questions suivantes :

   a. Quelle évolution faut-il faire subir à un prix augmenté de 50 % pour retrouver le prix initial?

   b. Quelle évolution faut-il faire subir à un prix diminué de 50 % pour retrouver le prix initial?

CC BY-NC

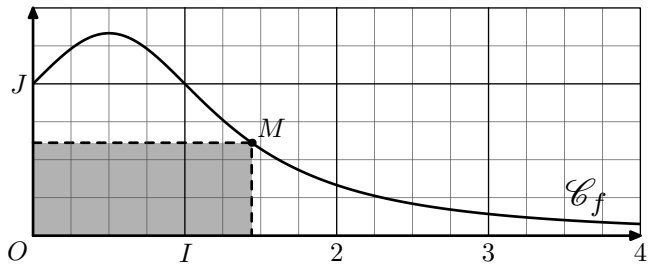


16. *Quotients : modélisation et fonctions*

E.56 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



On considère un point M de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et le rectangle représenté ci-dessus où :

- les points O et M en sont deux sommets opposés.
- ses côtés sont parallèles aux axes du repère.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de ce rectangle en fonction de la valeur de x.

1. Donner l'expression de la fonction $\mathcal{A}$.
2. a. Montrer que la fonction $\mathcal{A}'$ dérivée de la fonction $\mathcal{A}$ admet pour expression :

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{(1+x)(1-x)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

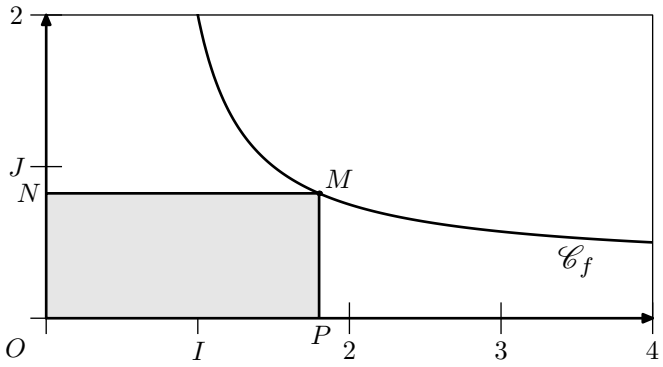
   b. Dresser le tableau de signes de la fonction $\mathcal{A}'$.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.
3. Justifier que l'aire du rectangle est maximale lorsque le point M a pour abscisse 1.

E.57 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x+1}{3x-2}$$

La représentation $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



On considère un point M appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$ et le rectangle $MNOP$ construit à partir du point O et M et dont les côtés sont parallèles aux axes.

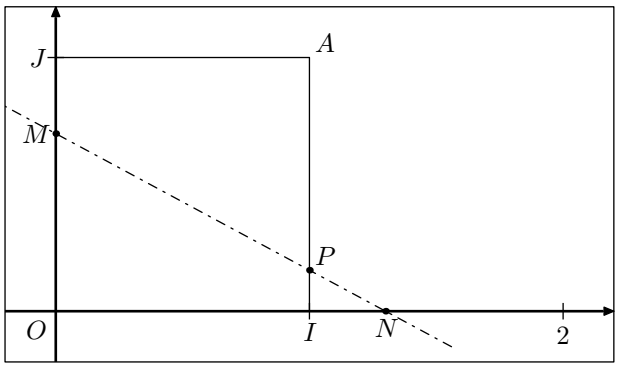
On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $MNOP$ où x est l'abscisse du point M. Le but de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de x, l'aire $\mathcal{A}(x)$ est minimale.

1. Donner l'expression de $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.
2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de $\mathcal{A}$.
3. Établir le sens de variation de la fonction $\mathcal{A}$.
4. En déduire la position du point M afin que l'aire du rectangle $MNOP$ soit minimale.

CC BY-NC

17. Modélisation : plus loin

E.58 On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé représenté ci-dessous :



Le point A a pour coordonnées $A(1\,;1)$.

Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, on considère les deux points M et N définis par :

- $M\in[OJ]$; $JM=x$
- $N\in[OI)$; $N\notin[OI]$; $IN=x$

Le point P est défini par l'intersection des droites (MN) et (AI).

Déterminer la valeur de x afin que l'ordonnée du point P soit maximale.

18. Composée par une fonction affine

Proposition :
Soit f une fonction dérivable sur I, a et b deux nombres réels quelconques. La fonction définit par :
$x\longmapsto f(a\cdot x+b)$
est une fonction dérivable sur tout intervalle J tel que :
$x\in J \iff ax+b\in J$
et sa fonction dérivée a pour expression :
$x\longmapsto a\cdot f'(a\cdot x+b)$

E.59

Déterminer, pour chaque fonction, l'expression de la fonction dérivée :

(a) $f : x\longmapsto (4x-2)^7$ (b) $g : x\longmapsto \dfrac{1}{5-3x}$

E.60 Déterminer l'expression, sous la forme d'un quotient simplifié, de la fonction f' *(resp. g')* dérivée de la fonction f *(resp. g)* :

(a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{3}x-2}$ (b) $g(x)=\sqrt{3x-1}$

19. Composée par une fonction affine : tangente et variation

E.61 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\cdot x+1\right)^4$$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f au point d'abscisse 2.

E.62 On considère deux fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\left[\frac{5}{3}\,;+\infty\right[$ par :

$f(x)=2(3-2x)^5$; $g(x)=\sqrt{3x-5}$

(1) Déterminer l'expression des fonctions dérivées f' et g' associées aux fonctions f et g.

(2) (a) Déterminer le signe des fonctions f' et g' sur leur ensemble de dérivation.

(b) Dresser le tableau de variations de chacune de ces fonctions.

20. Composée par une fonction affine :produit et quotient

E.63 Déterminer l'expression de la fonction dérivée pour chacune des fonctions ci-dessous :

(a) $f\colon x\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$ (b) $g\colon x\longmapsto (2x+1)\cdot\sqrt{3x-1}$

E.64 On considère la fonction f définie sur $\left[-\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$ par :

$f : x\longmapsto (3-2x)^3\cdot\sqrt{4x+1}$

On donnera l'expression de f' sous la forme $\dfrac{P(x)}{\sqrt{4x+1}}$ où $P(x)$ est un polynôme ayant $(3-2x)^2$ pour facteur

CC BY-NC

21. *Composée par une fonction affine : produit, quotient, tangente et variations*

E.65 On considère la fonction f dont l'image de x, pour $x \in [1\,;+\infty[$, est définie par la relation :

$$f(x) = (x^2 - 4x + 3)\sqrt{2x-2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 3.
2. Déterminer l'expression de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

E.66 Soit f la fonction définie par la relation :

$$f\colon x \longmapsto (x+5)\sqrt{1-2x}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f.
3. Dresser le tableau de signes de f'.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction f
5. Justifier que f admet un extrémum global en $-\dfrac{4}{3}$.

CC BY-NC