Première spécialité / Fonctions de références et dérivées

D'autres exercices pour ce chapitre sont disponibles en suivant le lien :
https://chingatome.fr/chapitre/hp-lycee/derivees

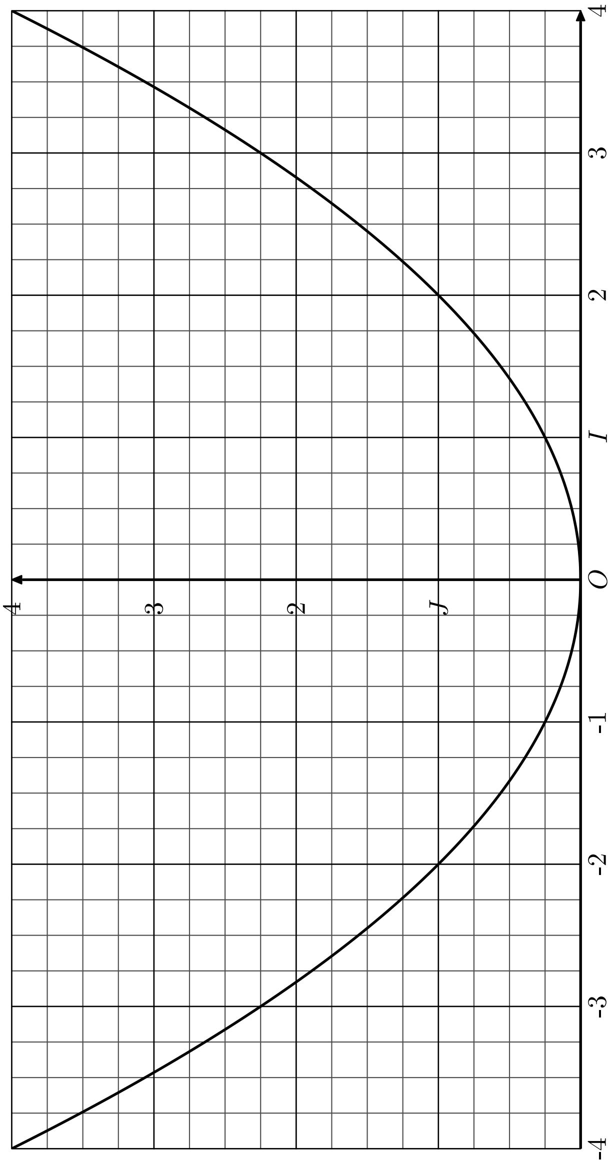
ChingQuizz : 4 exercices disponibles pour l'´evaluation par QCM :

1. *Introduction aux fonctions dérivées (exemple 1)*

E.1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2$.

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en chacun de ses points.

1. On note $c(x)$ le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x : c'est-à-dire de la tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par le point de coordonnée $(x\,;f(x))$.
   Compléter le tableau suivant :

x	-3	-1	0	2	4
$c(x)$					

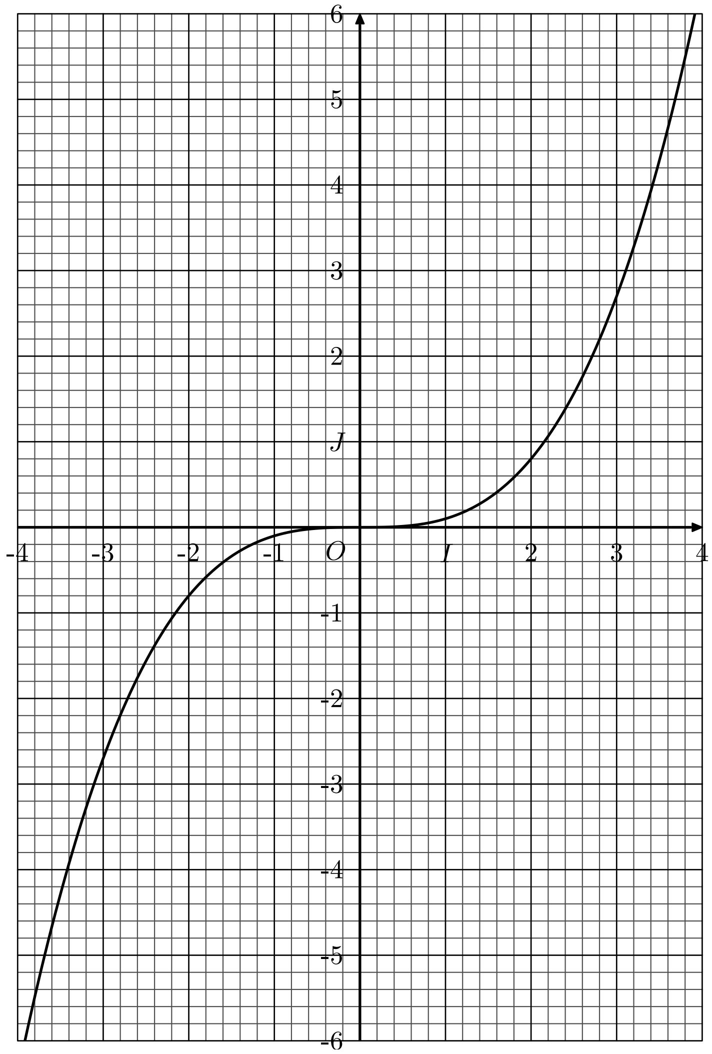
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $g(x) = 0{,}5 \cdot x$.
   Compléter le tableau suivant :

x	-3	-1	0	2	4
$g(x)$					

E.2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{10} \cdot x^3.$$

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en chacun de ses points.

Indication : les calculs seront arrondis au centième près.

1. On note $c(x)$ le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x : c'est-à-dire de la tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par le point de coordonnée $(x\,;f(x))$.
Compléter le tableau suivant :

x	$-3{,}5$	-1	0	2	3
$c(x)$					

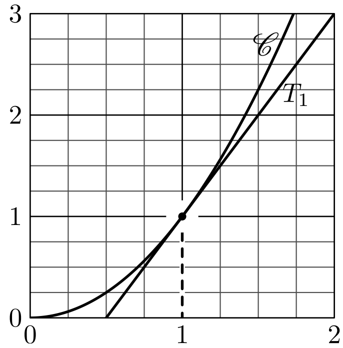
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \frac{3}{10} \times x^2.$$
Compléter le tableau suivant :

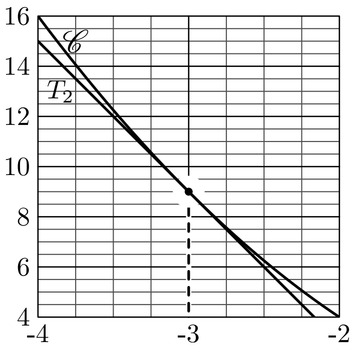
x	$-3{,}5$	-1	0	2	3
$g(x)$					

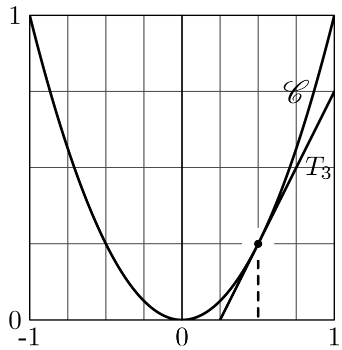
2. *Introduction aux fonctions dérivées (exemple 2)*

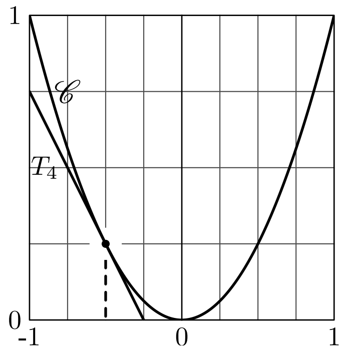
E.3 Ci-dessous est représentée, dans des repères orthogonaux, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction carrée.

Dans chacune de ces représentations, une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ est tracée :









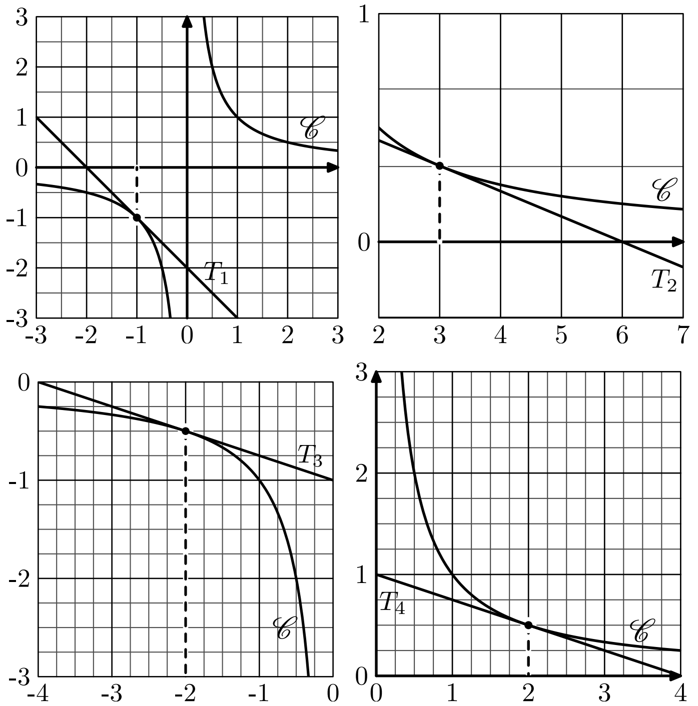
1. Par lecture graphique, compléter le tableau suivant :

x	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$					
Coeff. dir. tangente					

2. Émettre une conjecture quant à l'expression d'une fonction associant au nombre x réel le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x.

E.4 Ci-dessous est représentée, dans des repères orthogonaux, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction inverse.

Dans chacune de ces représentations, une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ est tracée :



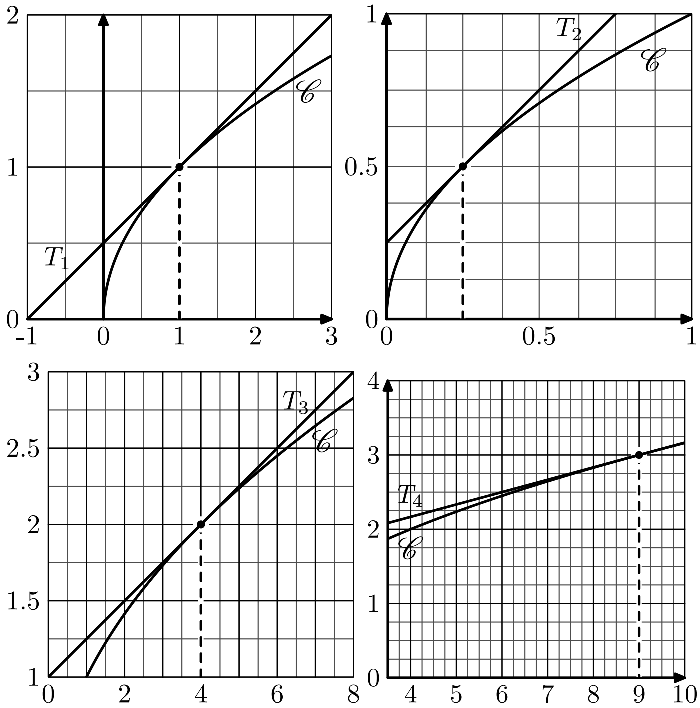
1. Par lecture graphique, compléter le tableau suivant :

x	-2	-1	2	3
$f(x)$				
Coeff. dir. tangente				

2. Émettre une conjecture quant à l'expression d'une fonction associant au nombre x réel le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x.

E.5 Ci-dessous est représentée, dans des repères orthogonaux, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction racine carrée.

Dans chacune de ces représentations, une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ est tracée :



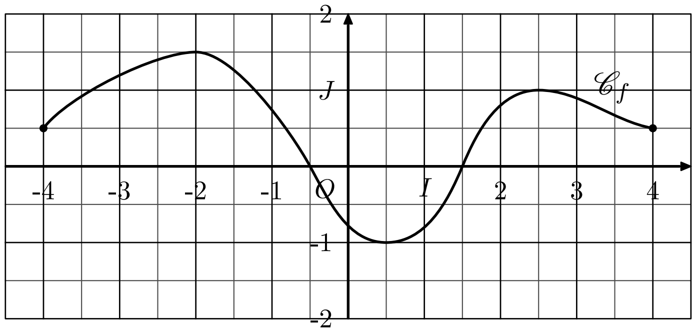
1. Par lecture graphique, compléter le tableau suivant :

x	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$f(x)$				
Coeff. dir. tangente				

2. Émettre une conjecture quant à l'expression d'une fonction associant au nombre x réel le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x.

3. *Variations et nombre dérivé*

E.6 On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;4]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé ci-dessous :



On répondra à l'ensemble des questions de cet exercice en se référant au graphique ci-dessus.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[-4\,;4]$.

2. a. On considère la tangente (T_1) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3. Donner le signe du coefficient directeur de la tangente (T_1).

   b. On considère la tangente (T_2) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. Donner le signe du coefficient directeur de la tangente (T_2).

   c. On considère la tangente (T_3) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2. Donner le signe du coefficient directeur de la tangente (T_3).

3. a. Quel est le signe du nombre dérivé de la fonction f en $x=-1$?

   b. Quel est le signe du nombre dérivé de la fonction f en $x=2$?

   c. Quel est le signe du nombre dérivé de la fonction f en

$x = 2{,}5$?

(4) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.

E.7 Soit f une fonction f définie sur $\left[-4\,;4\right[$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	-4		-2		-1		4
Variation de f	-2	↗	4	↘	-3	↗	-1 ‖

Déterminer le signe du nombre dérivé de la fonction f en 1.

E.8 On considère une fonction f dont on donne ci-dessous le tableau de signes de sa fonction dérivée :

x	-5		-2		1		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On considère la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Quel est le sens de variation de la tangente (T)?

E.9 On considère une fonction f définie sur $\left[-3\,;5\right]$ dont la dérivée admet le tableau de signes suivant :

x	-3		-1		2		5
Signe de f'		$+$	0	-	0	$+$	
Variation de f							

On a les valeurs et relations suivantes :

- $f(-1) = 3$
- $f(5) = -2 \cdot f(-1)$
- $f(-3) = f(5) + 5$
- $f(2) = f(-1) \cdot f(5)$

Dans le tableau précédent, compléter la ligne des variations de la fonction f.

E.10

(1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ admettant une dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$. De plus, on a l'information : $f(2) = 0$.

Dresser le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ admettant une dérivée g' vérifiant :

Pour tout réel x, on a : $g'(x) < 0$

De plus, on sait que : $g(-3) = 0$.

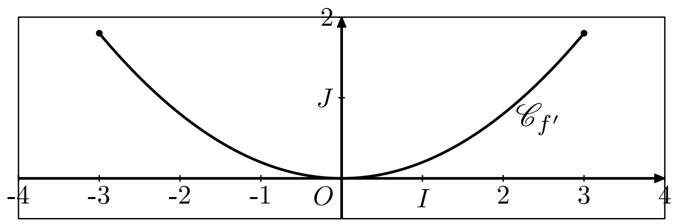
Dresser le tableau de signes de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

E.11 Le tableau ci-dessous représente le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-4		-2		-1		2		$+\infty$
Signe de f'											
Variation de f	1	↗	5	↘	0	↘	-2	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	-3
Signes de f											

Compléter les lignes du signe de la fonction f' et du signe de la fonction f.

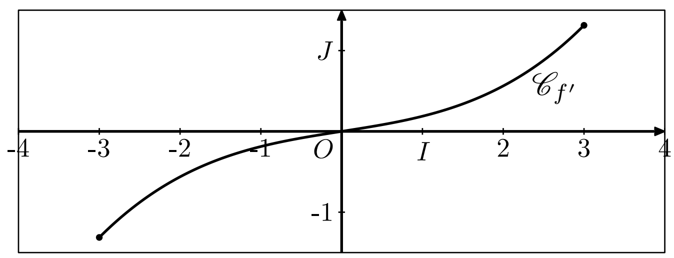
E.12 On considère une fonction f définie et dérivable sur $\left[-3\,;3\right]$. On note f' sa fonction dérivée.
La représentation graphique de la fonction f' est donnée dans le repère ci-dessous



(1) Justifier que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[-3\,;0\right[$.

(2) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $\left]0\,;3\right]$.

E.13 On considère une fonction f définie et dérivable sur $\left[-3\,;3\right]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
La représentation graphique de la fonction f' est donnée dans le repère ci-dessous



Déterminer les sens de variations de la fonction f sur $\left[-3\,;3\right]$.

4. *Polynômes : fonctions dérivées*

E.14

Proposition : les tableaux ci-dessous donnent les dérivées des monômes :

Pour tout $a\in\mathbb{R}$	$f(x)=a \rightsquigarrow f'(x)=0$
$f(x)=1 \quad \rightsquigarrow \quad f'(x)=0$	$f(x)=5 \quad \rightsquigarrow \quad f'(x)=0$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$	$f(x)=x^n \rightsquigarrow f'(x)=n{\cdot}x^{n-1}$
$g(x)=x \quad \rightsquigarrow \quad g'(x)=1$	$j(x)=x^3 \quad \rightsquigarrow \quad j'(x)=3x^2$
$h(x)=x^2 \quad \rightsquigarrow \quad h'(x)=2x$	$k(x)=x^4 \quad \rightsquigarrow \quad k'(x)=4x^3$

Pour tout $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$	$f(x)=a{\cdot}x^n \rightsquigarrow f'(x)=a\times n{\cdot}x^{n-1}$
$g(x)=2x \quad \rightsquigarrow \quad g'(x)=2$	$j(x)=7x^3 \quad \rightsquigarrow \quad j'(x)=21x^2$
$h(x)=-2x^2 \rightsquigarrow \quad h'(x)=-4x$	$k(x)=-x^4 \quad \rightsquigarrow \quad k'(x)=-4x^3$

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f(x)=5x^2+2x+3$
2. $g(x)=3x^4-5x+2$
3. $h(x)=5-3x^2$
4. $j(x)=3x^2-x+1$

E.15 Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f(x)=x^5+3{\cdot}x^2-x+10$
2. $f(x)=2{\cdot}x^7-x^2-2{\cdot}x+1$

E.16 Déterminer les nombres dérivés en 1 pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto 2x+4$
2. $g : x \longmapsto 5-3x$
3. $k : x \longmapsto x^4+x^2+1$
4. $\ell : x \longmapsto 2x^4-2x^3-8x$

E.17 On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{5}{3}{\cdot}x^3-\frac{2}{3}{\cdot}x^2+3{\cdot}x-4$$

Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

E.18 Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f : x \longmapsto -3{\cdot}x+2$
2. $g : x \longmapsto 4{\cdot}x^2-4$
3. $h : x \longmapsto 2{\cdot}x^2+3{\cdot}x$
4. $j : x \longmapsto 5{\cdot}x^3-2{\cdot}x^2$

E.19 Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f : \longmapsto 3{\cdot}x+2$
2. $g : \longmapsto x^2+4$
3. $h : \longmapsto x^2+x$
4. $j : \longmapsto x^3+2{\cdot}x^2$

E.20 Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto 3{\cdot}x^2-4{\cdot}x+1$
2. $g : x \longmapsto 5{\cdot}x^6-3{\cdot}x^3-4$
3. $h : x \longmapsto 3{\cdot}x^2+5{\cdot}x$
4. $j : x \longmapsto \dfrac{8{\cdot}x^3-2{\cdot}x^2}{x}$

E.21 La fonction f est définie pour tout réel x élément de l'intervalle $[1\,;7]$ par :

$$f(x)=1{,}5{\cdot}x^3-9{\cdot}x^2+24{\cdot}x+48$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa dérivée seconde sur $[1\,;7]$. Pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;7]$:

1. Calculer $f'(x)$
2. Calculer $f''(x)$.

E.22 Déterminer les nombres dérivés en 1 pour chacune des fonctions suivantes :

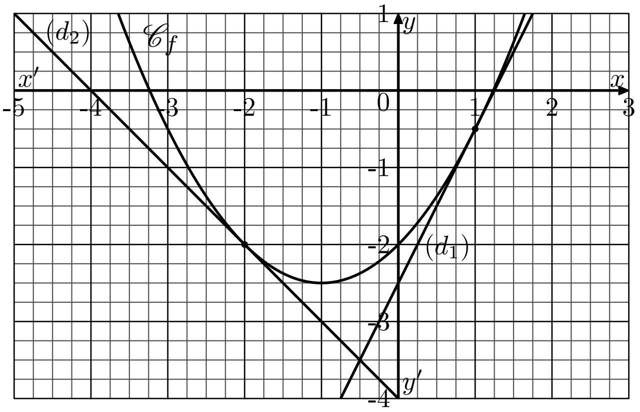
1. $h : x \longmapsto 2x^2+3$
2. $j : x \longmapsto 5x-3x^2-1$
3. $k : x \longmapsto -2{\cdot}x^2+2{\cdot}x$
4. $\ell : x \longmapsto 3x^2-2{\cdot}x$

E.23 Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f : x \longmapsto (3{\cdot}x+11)(4-x)$
2. $g : x \longmapsto (x+1)(2{\cdot}x-4)$

5. *Polynômes : lien entre fonction dérivée et tangente*

E.24 On considère la fonction f du second degré dont la courbe représentative est donnée dans le repère ci-dessous :



1. a. La droite (d_1) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(1\,;-0{,}5)$.
   Déterminer le coefficient directeur de la droite (d_1).
   b. La droite (d_2) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(-2\,;-2)$.
   Déterminer le coefficient directeur de la droite (d_2).
2. L'expression de la fonction est définie par :
   $f(x)=0{,}5{\cdot}x^2+x-2$
   a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   b. Calculer les images suivantes par la fonction f' :
   - $f'(1)$
   - $f'(-2)$

6. *Polynômes : tangentes*

E.25

Proposition : soit a un nombre réel et f une fonction dérivable en a.
La tangente (T) au point d'abscisse a à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f a pour équation réduite :

$$y = f'(a)\cdot(x-a) + f(a)$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot x^3 - \frac{3}{2}\cdot x^2 + x + 1$$

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.
   b. Donner la valeur de $f'(2)$.
2. a. Donner les coordonnées du point A de $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse 2.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
3. Vérifier à l'aide de la calculatrice que la droite obtenue est bien la tangente (T).

E.26 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = -\frac{2}{3}\cdot x^3 - 3\cdot x^2 + x + 10$$

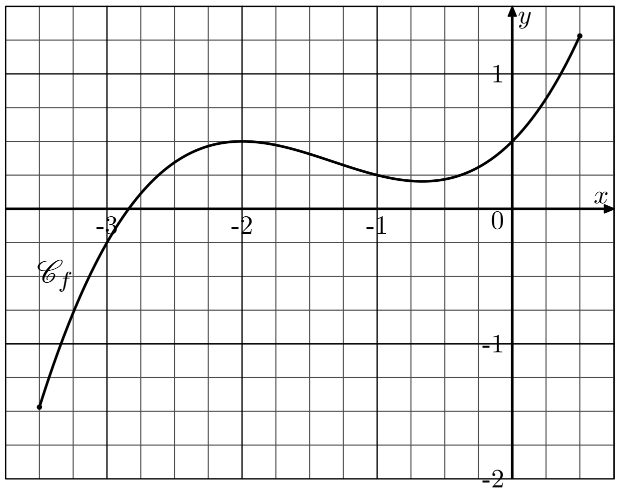
Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.
   b. Donner la valeur de $f'(-3)$.
2. a. Donner les coordonnées du point A de $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse -3.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3.
3. Vérifier à l'aide de la calculatrice que la droite obtenue est bien la tangente (T).

E.27 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-3{,}5\,;0{,}5]$ par la relation :

$$f(x) = 0{,}25\cdot x^3 + x^2 + x + 0{,}5$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-dessous :

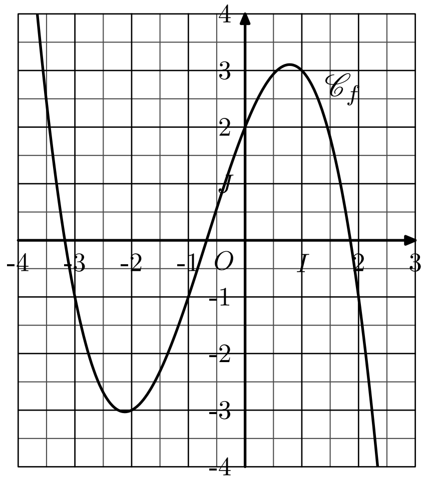


1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

E.28 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = -\frac{1}{2}\cdot x^3 - x^2 + \frac{5}{2}\cdot x + 2$$

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :

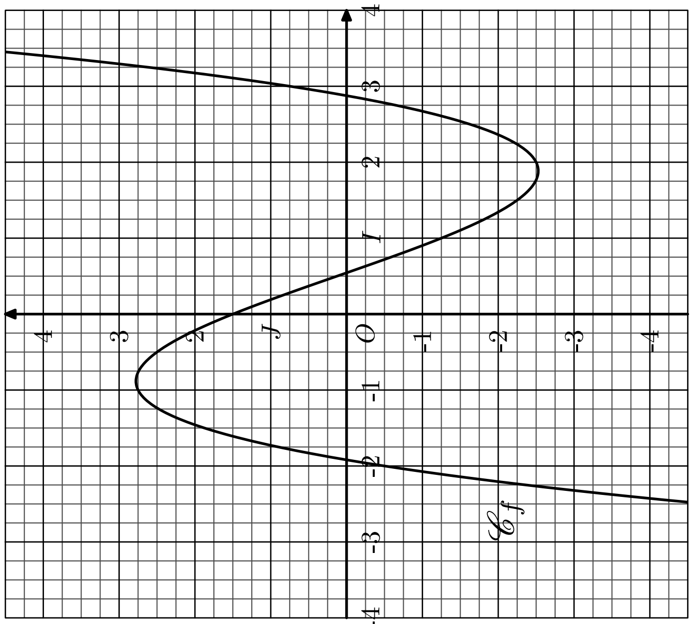


1. a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.
   b. Donner la valeur de $f'(-2)$.
2. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.
   b. Effectuer le tracé de la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

E.29 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot x^3 - \frac{3}{4}\cdot x^2 - \frac{5}{2}\cdot x + \frac{3}{2}$$

Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

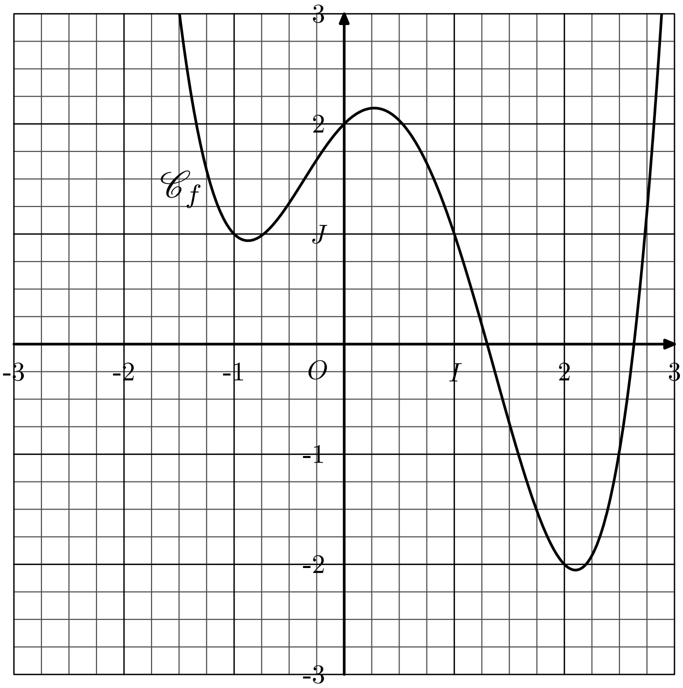
2. On considère la fonction affine g définie par :
$$g(x) = \frac{1}{2}\cdot x + \frac{13}{4}$$
   a. Tracer la droite (d) représentative de la fonction g.
   b. Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en -1.
   c. Démontrer que la droite (d) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.

3. a. Résoudre l'équation : $f'(x) = \dfrac{1}{2}$
   b. En déduire l'équation réduite d'une droite (Δ) parallèle à (d) et tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en un autre point.

E.30 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot x^4 - x^3 - \frac{3}{2}\cdot x^2 + x + 2$$

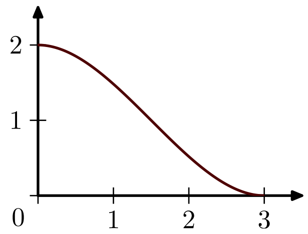
On munit le plan d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé dans lequel est représentée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. a. Tracer la droite (d) d'équation $y = -x$.
   b. Quelle conjecture peut-on établir sur la droite (d) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$?

2. Établir la conjecture précédente.

E.31



Une entreprise souhaite fabriquer, pour de jeunes enfants, des toboggans dont le profil a l'allure de la courbe ci-contre.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j})$. On prendra $3\,cm$ pour unité graphique.

L'objet de l'exercice est de modéliser ce profil à l'aide de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;3]$ vérifiant les conditions suivantes :

- La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $A(0\,;2)$ et $B(3\,;0)$;
- La courbe $\mathscr{C}$ admet en chacun des points A et B une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Partie 1

1. a. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=-\frac{2}{3}\cdot x^2+2$$
Étudier les variations de la fonction f *(on ne demande pas l'étude des limites)*.

b. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par :
$$g(x)=\frac{1}{3}\cdot x^2-2\cdot x+3$$
Étudier les variations de la fonction g *(on ne demande pas l'étude des limites)*.

2. On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.

a. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ passent par le point $K\left(1\,;\frac{4}{3}\right)$ et ont la même tangente T en ce point.

b. Tracer sur un même graphique, la droite T, la partie de $\mathscr{C}_f$ correspondant aux points d'abscisses comprises entre 0 et 1, et la partie de $\mathscr{C}_g$ correspondant aux points d'abscisses comprises entre 1 et 3.

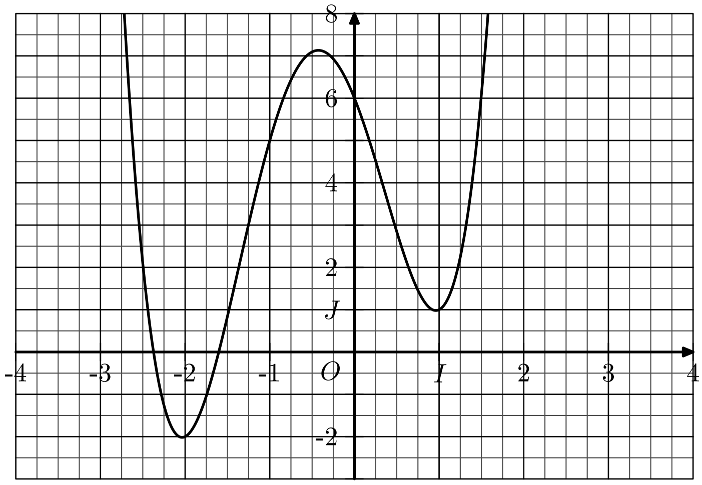
La courbe obtenue en réunissant les deux parties de courbes est une représentation au problème posé.

Partie 2

Le bureau d'étude a établi que l'on pouvait également modéliser le profil du toboggan à l'aide d'une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x)=\frac{4}{27}\cdot x^3-\frac{2}{3}\cdot x^2+2$$

1. Démontrer que la fonction h vérifie les conditions (1) et (2).
2. Déterminer les coordonnées du point de $\mathscr{C}_h$ d'abscisse 1 et le coefficient directeur de la tangente en ce point.

E.32 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f : x \longmapsto \frac{3}{2}\cdot x^4+3\cdot x^3-\frac{9}{2}\cdot x^2-5\cdot x+6$$
On donne, ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$:



La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de cette fonction admet une droite (d) de coefficient directeur 1 comme tangente en deux points.

Déterminer l'équation de cette droite et les coordonnées de ces deux points.

Toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

7. *Polynômes : tangentes, point d'intersection, positions relatives*

E.33 On considère la fonction définie par la relation :
$f(x)=x^2-6\cdot x+5$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

On note (d) et (Δ) les deux tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ respectivement aux points d'abscisses 2 et 5.

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Déterminer l'équation de la tangente (d).
3. Déterminer l'équation de la tangente (Δ).
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (Δ).

E.34 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x)=x^3-2\cdot x^2+3\cdot x-2$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\;J)$

1. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

b. En déduire l'expression de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

2. a. Étudier le signe du polynôme $x\cdot(x^2-2\cdot x+1)$.

b. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et (T).

E.35 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

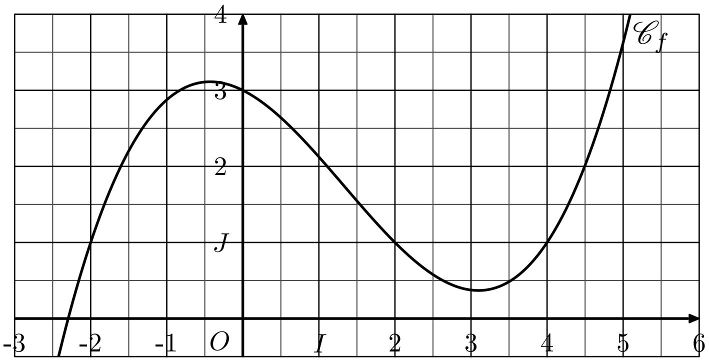
$$f(x) = 2{\cdot}x^3 - 4{\cdot}x^2 + 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\ J)$

1. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   b. En déduire l'expression de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
2. a. Étudier le signe du polynôme $2{\cdot}x{\cdot}(x^2-2{\cdot}x+1)$.
   b. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et (T).

E.36 On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{8}{\cdot}x^3 - \frac{1}{2}{\cdot}x^2 - \frac{1}{2}{\cdot}x + 3$$



On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Donner l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. On considère la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
   a. Donner la valeur du coefficient directeur de (T).
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T).
   c. Dans le repère ci-dessous, tracer la tangente (T).
3. On considère la droite (d) admettant l'équation réduite :
   $(d)\ :\ y = -x + 3$
   Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (d) et de la courbe $\mathscr{C}_f$.

E.37 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = -x^3 + 2{\cdot}x^2 - 2x + 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\ J)$

On considère la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

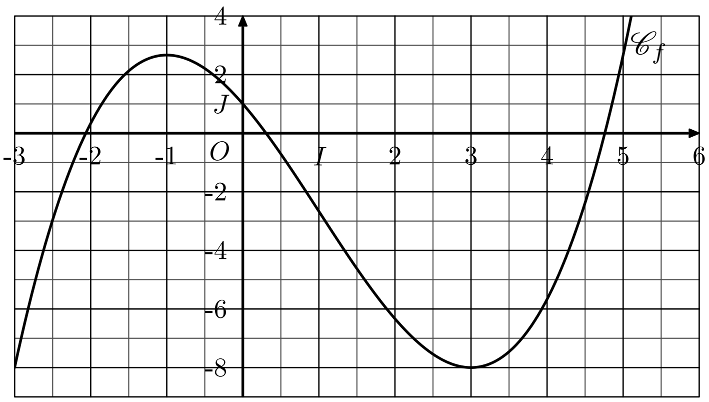
Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et (T).

8. *Polynôme : introduction aux variations*

E.38 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{3}{\cdot}x^3 - x^2 - 3x + 1$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthogonal ci-dessous :

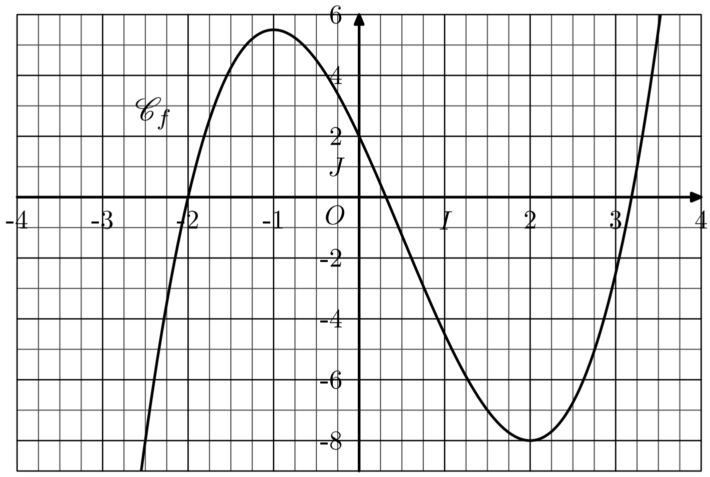


1. Graphiquement, dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;6]$. *(on n'indiquera pas les valeurs des images)*
2. a. Déterminer l'expression de la fonction f'.
   b. Dresser le tableau de signes de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.
3. Que remarque-t-on?

E.39 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}{\cdot}x^2 - 6{\cdot}x + 2$$

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. Graphiquement et sur l'intervalle $\left[-\frac{5}{2}\,;\frac{11}{4}\right]$, dresser le tableau de variations de la fonction f .
2. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   b. Étudier le tableau de signes de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.
3. Quelle conjecture peut-on faire entre le signe de la fonction dérivée f' et du sens de variation de la fonction f?

9. *Polynômes : variations*

E.40

Proposition : soit f une fonction dérivable sur I.

- Si $f'(x)>0$ pour tout $x\in I$ alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f'(x)<0$ pour tout $x\in I$ alors f est strictement décroissante sur I.
- Si $f'(x)=0$ pour tout $x\in I$ alors f est constante sur I.

Exemple : on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x^2-2x+3$

La fonction dérivée de la fonction f admet pour expression :

$f'(x)=2x-2$

La fonction f' admet le tableau de signe :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$2x-2$		$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$f(x)=-2{\cdot}x^3+3{\cdot}x^2+12{\cdot}x-2$

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Établir le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

E.41 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre réel x est donnée par la formule :

$f(x)=x^3-6{\cdot}x^2+9{\cdot}x+3$

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Établir le tableau de signes de la fonction f'.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

E.42 Chacune des fonctions ci-dessous est définie sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de chacune de ces fonctions :

1. $f(x)=x^3-9{\cdot}x^2+15{\cdot}x-7$
2. $g(x)=-x^3-3{\cdot}x^2-3{\cdot}x+3$
3. $h(x)=-\dfrac{1}{3}{\cdot}x^3+\dfrac{1}{2}{\cdot}x^2-\dfrac{1}{2}{\cdot}x-1$

(on indiquera dans le tableau de variations les valeurs des extrémums locaux)

E.43 On considère la fonction f définie par la relation :

$f(x)=x^3+3{\cdot}x^2-9{\cdot}x+5$

1. (a) Déterminer la valeur des réels a, b et c réalisant l'égalité : $f(x)=(x+5)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c)$
   (b) Dresser le tableau de signes de la fonction f.
2. (a) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   (b) Dresser le tableau de signes de la fonction f'.
   (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

E.44 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=-2{\cdot}x^3-4{\cdot}x^2+8{\cdot}x+1$

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Indication : on n'indiquera pas les valeurs dans le tableau de variation

E.45 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=8{\cdot}x^3+x^2-x+5$

1. Déterminer l'expression de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Dresser le tableau de signes de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

10. *Polynômes : tangentes et variations*

E.46 On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x^3-5x^2+7x-2$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentation de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Déterminer l'équation réduire la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
3. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

E.47 On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x^3+6x^2+9x+9$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentation de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Déterminer l'équation réduire la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.
3. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

E.48 On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentation de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Déterminer l'équation réduire la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.
3. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

E.49 On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = -x^3 - 3x^2 - 2x + 4$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentation de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Déterminer l'équation réduire la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.
3. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

11. *Polynômes : tableaux de signes et variations*

E.50 On considère la fonction f définie par la relation :

$f(x) = x^3 + 3{\cdot}x^2 - 2$

1. a. Établir l'égalité : $f(x) = \big(x+1\big)\big(x^2+2{\cdot}x-2\big)$
   b. Dresser le tableau de signes de la fonction f.
2. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   b. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f *(on indiquera les valeurs exactes des extrémums locaux).*

E.51 On considère la fonction f définie par la relation :

$f(x) = -x^3 + 3{\cdot}x^2 + 9{\cdot}x - 2$

1. a. Établir l'égalité : $f(x) = (x+2)(-x^2+5{\cdot}x-1)$
   b. Dresser le tableau de signes de la fonction f.
2. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   b. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

12. *Polynômes : extrémum*

E.52 Une entreprise fabrique chaque jour des pièces métalliques pour l'industrie automobile. La production quotidienne varie entre 0 et 25 pièces.

Le montant des charges correspondant à la fabrication de x pièces, exprimé en euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $\big[0\,;25\big]$ par :

$C(x) = x^3 - 30{\cdot}x^2 + 400{\cdot}x + 100$

On suppose que l'entreprise vend chaque jour sa production journalière. Chaque pièce est vendue au prix de 247 euros.

1. On note B la fonction bénéfice, exprimée en euros. Justifier que l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $\big[0\,;25\big]$ est :
   $B(x) = -x^3 + 30{\cdot}x^2 - 153{\cdot}x - 100$
2. On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
   Calculer $B'(x)$, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\big[0\,;25\big]$.
3. Justifier le tableau suivant :

x	0		3		17		$+\infty$
Signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. En déduire le tableau de variations complet de la fonction B sur l'intervalle $\big[0\,;25\big]$.
5. Déterminer le nombre de pièces que l'entreprise doit produire chaque jour pour que le bénéfice réalisé soit maximal. Que vaut alors ce bénéfice maximal?

E.53 Une entreprise produit et vend un tissu en coton de forme rectangulaire de 1 mètre de large ; on note x sa longueur exprimée en kilomètre, x étant un nombre compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euro de ce tissu est donné, en fonction de x, par :

$C(x) = 15{\cdot}x^3 - 120{\cdot}x^2 + 350{\cdot}x + 1\,000$

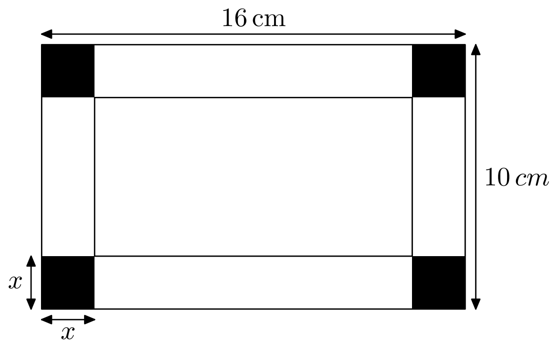
Le cours du marché offre un prix de 530 € le kilomètre de tissu fabriqué par l'entreprise.

Pour tout $x \in \big[0\,;10\big]$, on note $R(x)$ la recette et $B(x)$ le bénéfice générés par la production et la vente de x kilomètres de tissu par l'entreprise.

1. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
2. Montrer que pour tout $x \in \big[0\,;10\big]$:
   $B(x) = -15{\cdot}x^3 + 120{\cdot}x^2 + 180{\cdot}x - 1\,000$
3. Déterminer $B'(x)$ pour $x \in \big[0\,;10\big]$ où B' désigne la fonction dérivée de B.
4. Étudier le signe de $B'(x)$ et en déduire les variations de la fonction B sur $\big[0\,;10\big]$.
5. a. Pour quelle longueur de tissu produite et vendue l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal?
   b. Donner alors la valeur de ce bénéfice maximal?

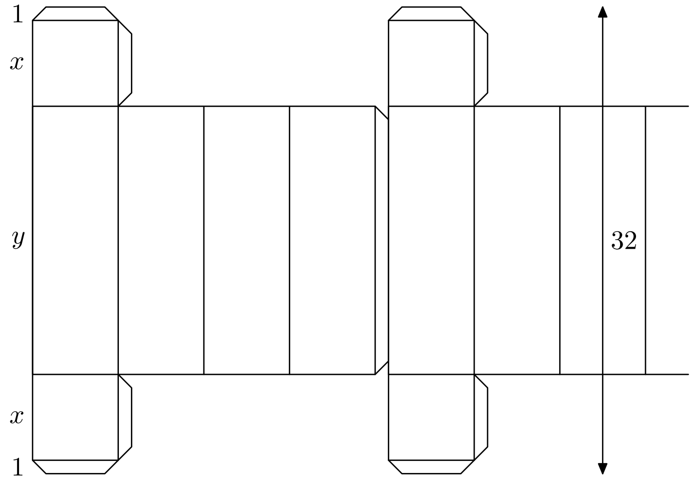
13. *Polynômes - modélisation : maximaliser l'aire d'une boite*

E.54 On veut réaliser, dans le patron ci-dessous une boîte rectangulaire sans couvercle. Les longueurs sont exprimées en *cm*.



1. Quelles sont les valeurs possibles de x?
2. Vérifier que le volume V de cette boîte s'exprime, en fonction de x, par :
   $\mathcal{V}(x) = 4\cdot x^3 - 52\cdot x^2 + 160\cdot x$.
3. a. Vérifier que : $V'(x) = 12\cdot x^2 - 104\cdot x + 160$
   Étudier son signe sur l'intervalle $[0;5]$.
   b. Construire le tableau de variations de la fonction V sur l'intervalle $[0;5]$.
   c. En déduire les dimensions de la boite finale afin que le volume maximal.

E.55 Un fabricant de boîtes en carton dispose, pour sa fabrication, de rouleaux donnant une bande de carton de $32\,cm$ de large dans laquelle il trace et découpe les patrons de boîtes avant de les coller. Il dispose ses patrons de la manière indiquée dans le dessin ci-dessous :

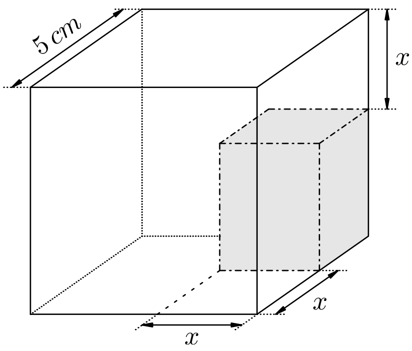


Les boîtes, en forme de pavés droits, comportent deux faces carrées de $x\,cm$ de côté, munies de deux languettes de $1\,cm$ de large pour le collage, et quatre autres faces dont les dimensions en cm sont x et y, ainsi qu'un rabat pour la fermeture.

1. Le fabricant utilise toute la largeur de la bande de carton ; on a donc : $y = 30 - 2\cdot x$.
   a. Expliquer pourquoi on a nécessairement : $0 < x < 15$.
   b. Démontrer que le volume V, en cm^3 et en fonction de x, de la boîte admet pour expression :
   $V(x) = 30\cdot x^2 - 2\cdot x^3$
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;15]$ par :
   $f(x) = 30\cdot x^2 - 2\cdot x^3$
   a. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;\ 15]$.
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f. *(on n'y indiquera pas les valeurs)*
3. Pour quelle valeur de x, le volume V est-il maximum? Quelle est alors la valeur de ce volume? Quelle particularité présente la boîte dans ce cas-là?

E.56

On considère le cube ci-contre dont les arêtes mesurent $5\,cm$.



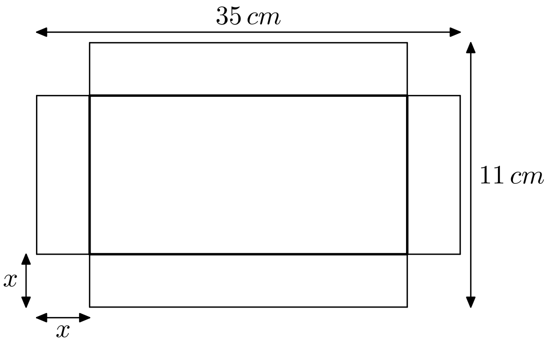
Dans ce cube, on découpe un pavé droit représenté en gris et dont certaines mesures sont indiquées sur la figure.
On note $\mathcal{V}$ le volume de ce pavé droit en cm^3.

1. a. Quelles sont les valeurs possibles pour x?
   b. Établir l'expression du volume $\mathcal{V}$ en fonction de x :
      $\mathcal{V} = x^3 - 10{\cdot}x^2 + 25{\cdot}x$
2. a. Déterminer l'expression de la fonction $\mathcal{V}'$ dérivée de la fonction $\mathcal{V}$.
   b. Dresser le tableau de signe de la fonction $\mathcal{V}'$.
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{V}$.

Indication : il n'est pas demandé de compléter les valeurs du tableau de variations.

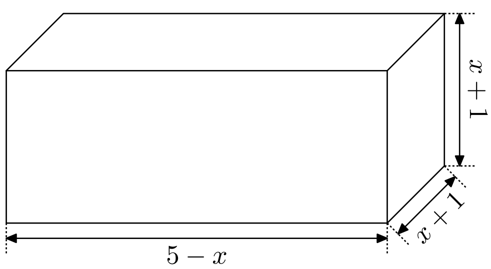
3. En déduire la valeur de x pour laquelle le volume $\mathcal{V}$ du pavé droit est maximal.

E.57 On veut réaliser, dans le patron ci-dessous une boîte rectangulaire sans couvercle. Les longueurs sont exprimées en cm.



1. a. Quelles valeurs peuvent prendre la variable x dans ce problème?
   b. Donner l'expression du volume $\mathcal{V}$ en fonction de la valeur de x.
2. a. Déterminer l'expression de la fonction $\mathcal{V}'$ dérivée de la fonction $\mathcal{V}$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{V}$.
   c. Justifier que la fonction $\mathcal{V}$ admet une valeur maximale sur l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{11}{2}\right]$.
3. Quelle est le volume maximal qu'on peut obtenir avec ce type de boite?

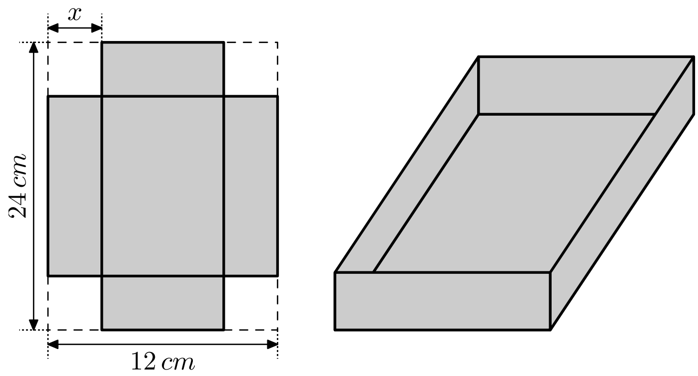
E.58 On considère le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous :



Le nombre x permet de définir les mesures de ce solide comme indiqué sur la figure.

1. Quelles valeurs la variable x peut-elle prendre?
2. On note $\mathcal{V}(x)$ le volume de ce solide en fonction de x. Donner la forme développée et réduite de $\mathcal{V}$.
3. a. Établir le tableau de variations de la fonction $\mathcal{V}$.
   b. Déterminer la valeur de x pour laquelle le volume du parallélépipède est maximal.

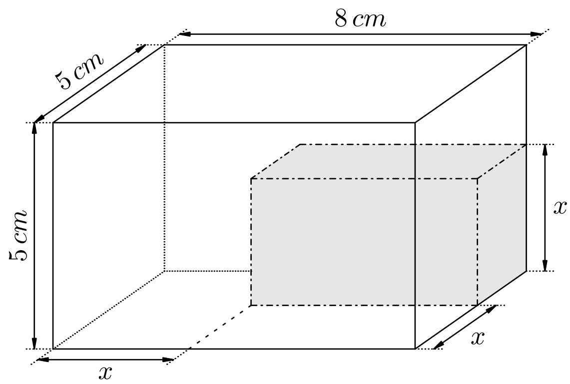
E.59 On souhaite construire une boîte de forme parallélépipédique à partir d'une feuille cartonnée de dimensions $12\,cm$ sur $24\,cm$.



Pour cela, on coupe quatre carrés dans les coins de cette feuille dont les côtés mesurent $x\,cm$. On admet que la valeur de x doit être comprise dans l'intervalle $\left]0\,;6\right[$.

Déterminer la valeur de x pour laquelle le volume de la boîte est maximal.

E.60 On considère le pavé droit ci-dessous de dimensions : $8cm{\times}5cm{\times}5cm$.



Sur cette figure, à l'aide d'un nombre x, on indique les dimensions d'un autre pavé droit représenté en gris et le volume est noté $\mathcal{V}$.

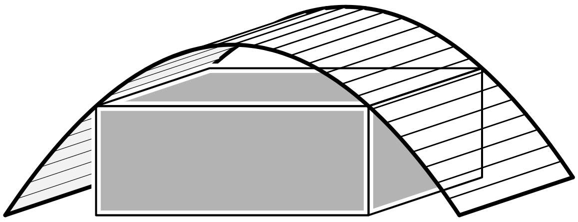
1. a. Quelles sont les valeurs possibles pour x?
   b. Établir l'expression du volume $\mathcal{V}$ en fonction de x :
      $\mathcal{V} = x^3 - 13{\cdot}x^2 + 40{\cdot}x$
2. a. Déterminer l'expression de la fonction $\mathcal{V}'$ dérivée de la fonction $\mathcal{V}$.
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{V}$.

Indication : il n'est pas demandé de compléter les valeurs du tableau de variations.

3. En déduire la valeur maximale du volume $\mathcal{V}$ du pavé droit grisé.

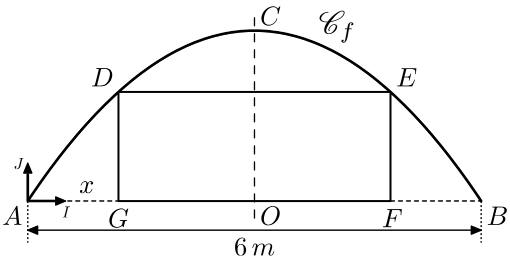
14. *Polynômes - modélisation : avec l'usage d'une courbe*

E.61 Sous un hangar, dont le toit est de forme "*parabolique*", on souhaite installer une habitation de forme parallélépipédique. Le dessin ci-dessous illustre le problème :



On suppose l'habitat s'étalant sur toute la longueur du hangar. Le but de cet exercice est de déterminer les dimensions de la façade de cet habitat afin d'en maximaliser le volume.

On modélise ce problème par la figure ci-dessous :



Le rectangle $DEFG$ admet la droite (CO) pour axe de symétrie. On note x la mesure de la longueur AG.

Dans le repère $\big(A\,;I\,;J\big)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\big[0\,;6\big]$ par la relation :

$$f(x) = -\frac{1}{4}\cdot x^2 + \frac{3}{2}\cdot x$$

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $DEFG$ en fonction de x.

1. Le point G appartenant au segment $[AO]$, quelles sont les valeurs possibles pour la variable x?

2. Démontrer que pour $x \in \big[0\,;3\big]$:
$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}\cdot x^3 - \frac{9}{2}\cdot x^2 + 9\cdot x$$

3. a. Déterminer le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $\big[0\,;\,3\big]$.

   b. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle $DEFG$ est maximale.

E.62 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{20}\cdot x^2 + \frac{1}{10}\cdot x + \frac{7}{16}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$

On souhaite encadrer l'aire du domaine du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses ainsi qu'entre les deux droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{5}{2}$.

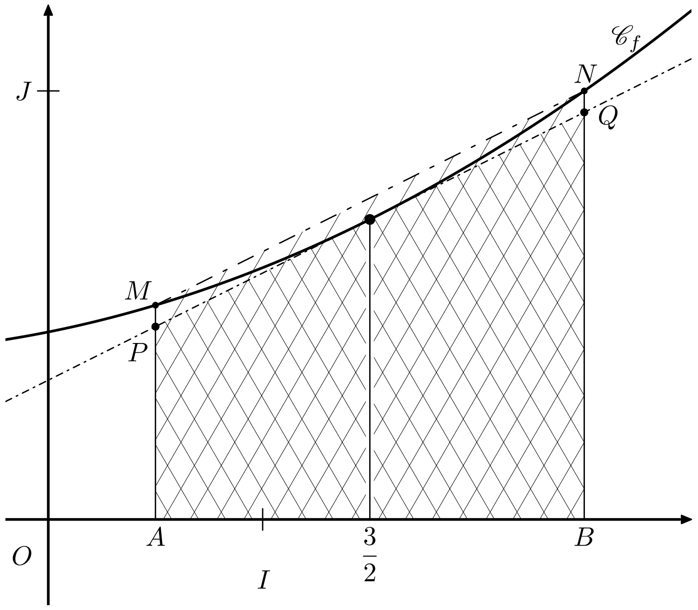
Pour cela, on va mesurer deux surfaces construites sous forme de trapèze :

- La première surface est formée à partir de la corde $[MN]$ à la courbe $\mathscr{C}_f$: son aire majore l'aire recherchée ;
- La seconde surface sera construite en considérant la tangente (Δ) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{3}{2}$: son aire minore l'aire recherchée.

On note :

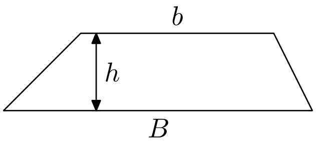
- A et B les points de l'axe des abscisses ayant pour abscisses respectives $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2}$.
- M et N les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ admettant respectivement pour abscisses $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2}$.
- P et Q les points de la droite (Δ) d'abscisses respectives $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2}$.

La figure ci-dessous illustre, dans un repère orthogonal pour accentuer la différence de ces deux surfaces, les deux aires à calculer :



On rappelle la formule du calcul de l'aire d'un trapèze :

$$\frac{(B+b)\times h}{2}$$



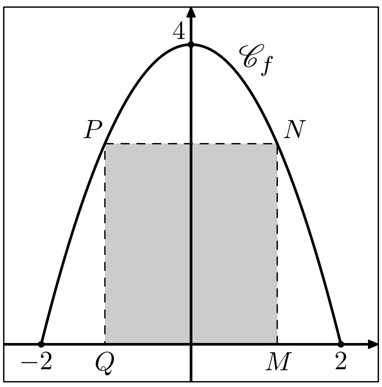
1. a. Déterminer les coordonnées des points M et N.
   b. En déduire l'aire du trapèze $ABNM$.
2. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (Δ).
   b. Déterminer les coordonnées des points P et Q.
   c. En déduire l'aire du trapèze $ABQP$
3. a. En déduire un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$.
   b. Quelle est l'amplitude de cet encadrement?

E.63

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = 4 - x^2$$

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,J)$:



Le point M est un point de l'axe des abscisses de coordonnées $(x\,;0)$ où $x\in[0\,;2]$. À partir du point M, on construit le rectangle $MNPQ$ dont les côtés sont parallèles aux axes.

Déterminer la position du point M afin que l'aire du rectangle $MNPQ$ soit maximale.

Dans cet exercice, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

E.64

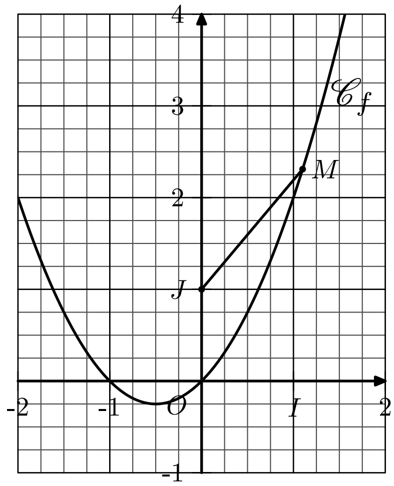
On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = x^2 + x$$

La représentation graphique est donnée ci-contre :

On considère le point J de coordonnée $(0\,;1)$ et M un point de la courbe $\mathscr{C}_f$.

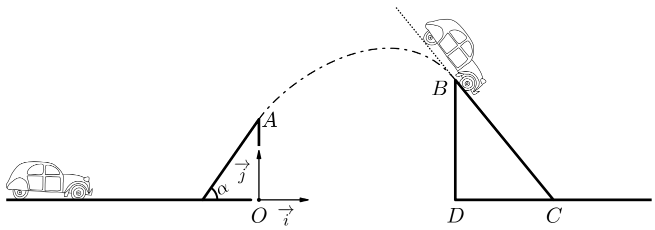
Déterminer la position du point M pour laquelle la longueur JM est minimale.



On pourra utiliser la factorisation :

$$4x^3 + 6x^2 - 2 = 2(x+1)(2x^2+x-1)$$

E.65 Joe le cascadeur et sa "*2CV*" doivent réaliser un saut représenté ci-dessous pour un tournage.



Il peut choisir sa vitesse et l'angle d'inclinaison du tremplin de départ, mais pour optimiser sa réception, il souhaite atterrir sur le tremplin d'arrivée avec la même inclinaison que celui-ci.

Pour préparer son saut, il fait un repérage sur les lieux de productions *(avec un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ orthonormé représenté sur la représentation)* et obtient les données suivantes :

- Le point A est à une hauteur de $1\,m$ du sol.
- Les deux tremplins sont écartés de $9\,m$.
- Le point B est à une hauteur de $4\,m$.
- La pente du tremplin de réception a une longueur de $5\,m$.

Utilisant ses connaissances de 1^oS, il modélise sa trajectoire par la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f du second degré. On notera cette fonction :

$$f(x) = a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c \quad \text{où } a, b, c\in\mathbb{R}$$

Déterminer les coefficients de ce polynôme.

Toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

15. Fonctions de références

E.66

Proposition : ci-dessous les dérivées de la fonction inverse et de la fonction racine carrée.

Formule générale : $f(x)=\dfrac{1}{x} \rightsquigarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

$g(x)=\dfrac{5}{x} \rightsquigarrow g'(x)=-\dfrac{5}{x^2}$	$h(x)=-\dfrac{7}{3x} \rightsquigarrow h'(x)=\dfrac{7}{3x^2}$

Formule générale : $f(x)=\sqrt{x} \rightsquigarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$g(x)=3\sqrt{x} \rightsquigarrow g'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$	$h(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{3} \rightsquigarrow h'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{x}}$

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=3x^2$
2. $g(x)=\dfrac{1}{12}\cdot x^6$
3. $h(x)=4\sqrt{x}$
4. $j(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$
5. $k(x)=\dfrac{1}{2x}$
6. $l(x)=-\dfrac{2}{x}$

E.67 Pour chaque question, une fonction f est proposée ainsi que l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f. Établir l'expression de la fonction f' proposée :

	$f(x)$	$f'(x)$
1	$\dfrac{1}{x}-x^2$	$\dfrac{-2\cdot x^3-1}{x^2}$
2	$x+x^2+\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{2\cdot x^3+x^2-1}{x^2}$
3	$x^2+\sqrt{x}$	$\dfrac{4\cdot x\cdot\sqrt{x}+1}{2\cdot\sqrt{x}}$

E.68 Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f : x \longmapsto x+\dfrac{1}{x}$
2. $g : x \longmapsto \dfrac{2}{3}\cdot x^3-\sqrt{x}$
3. $h : x \longmapsto 3\cdot\sqrt{x}-2x^4$
4. $j : x \longmapsto \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x}$

E.69 Déterminer les fonctions dérivées associées aux fonctions suivantes :

1. $f\colon x \longmapsto x-2\sqrt{x}$
2. $g\colon x \longmapsto 2\times\dfrac{1}{x}$
3. $h\colon x \longmapsto \dfrac{-5}{x}+\sqrt{x}$
4. $k\colon x \longmapsto x^2-\dfrac{1}{x}$

E.70 Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f\colon x \longmapsto x-\dfrac{1}{x}$
2. $g\colon x \longmapsto 2\cdot\sqrt{x}$
3. $h\colon x \longmapsto \dfrac{3}{x}-2\sqrt{x}$
4. $j\colon x \longmapsto 2\cdot x^3+\dfrac{2}{x}$

On présentera l'expression des dérivées sous la forme d'un quotient.

E.71 Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées à chacun des fonctions suivantes :

1. $f\colon x \longmapsto 5+\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$
2. $g\colon x \longmapsto \dfrac{3}{x}+2\sqrt{x}$
3. $h\colon x \longmapsto 5\cdot x^3-\dfrac{3}{x}$

Les dérivées des fonctions g et h seront présentées sous forme de quotient.

16. *Fonction inverse et tangentes*

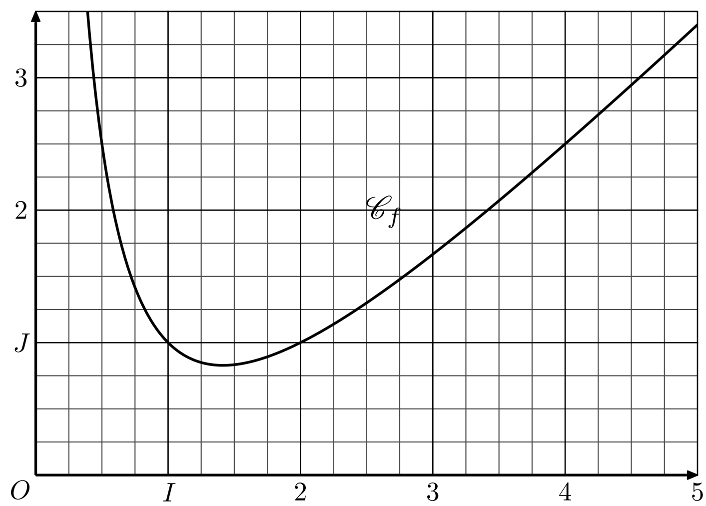
E.72

1. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction carrée au point d'abscisse -2.
2. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction inverse au point d'abscisse 3.

E.73 On considère la fonction f définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par la relation :

$$f(x)=x+\frac{2}{x}-2$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



1. Montrer que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est donnée par :

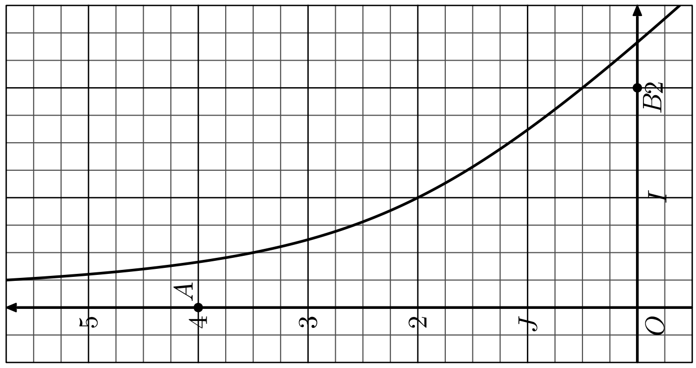
$$f'(x)=\frac{x^2-2}{x^2}$$

2. On souhaite déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
   a. Donner le coefficient directeur de la tangente (T). Justifier votre démarche.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T).
   c. Tracer la droite (T) dans le repère ci-dessus.
3. On considère la droite (d) d'équation réduite :
   $(d) : \ y = \frac{1}{2}\cdot x$
   a. Sur $]0\,;+\infty[$, étudier le signe de l'expression :
      $f(x) - \frac{1}{2}\cdot x$
   b. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (d).

E.74 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - x + 2$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f donnée ci-dessous :



On note (d) la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente (d).
2. Tracer dans le repère ci-dessous la tangente (d).

Indication : on indiquera les coordonnées des points utilisés pour tracer la tangente.

17. *Fonction inverse, variations*

E.75 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

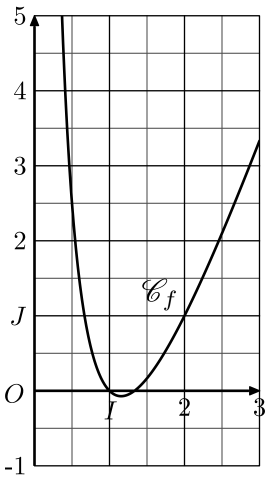
$$f(x) = 4x + \frac{1}{x} - 5$$

1. Établir que la fonction f admet pour fonction dérivée, la fonction f' définie par : $f'(x) = \dfrac{(2\cdot x+1)(2\cdot x-1)}{x^2}$
2. Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f.
   Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
3. a. Dresser le tableau de signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}^*$.
   b. En déduire les variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

E.76 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3x + \frac{4}{x} - 7$$

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



1. Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression :
   $$f'(x) = \frac{3\cdot x^2 - 4}{x^2}$$
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
3. a. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

E.77 On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{3}\right\}$, par :

$$f(x) = \frac{3}{3x+1} + x + 1.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Établir que pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{3}\right\}$:
   $$f'(x) = \frac{9\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)}{(3x+1)^2}$$
2. a. Établir le tableau de signes de la fonction f'.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   (Indication : on n'indiquera pas les valeurs de ses extrémums, ni aux bornes de son ensemble de définition).

E.78 $f(x) = \dfrac{3}{x+2} + x + 1$

signes + variations

18. *Fonction inverse, modélisation*

E.79

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[20\,;150]$ par :

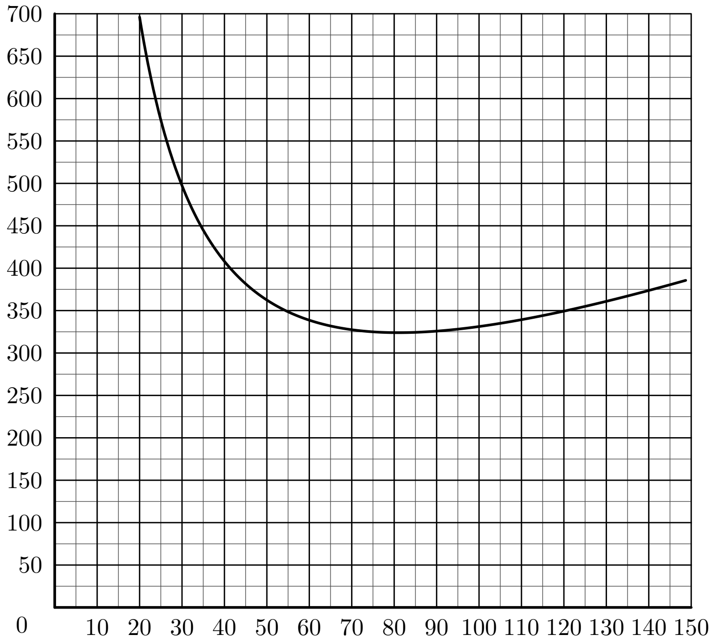
$f(x)=2{\cdot}x+\dfrac{13\,122}{x}$

(1) Montrer que sur l'intervalle I : $f'(x)=\dfrac{2}{x^2}{\cdot}(x-81)(x+81)$

En déduire que sur l'intervalle I :
$f'(x)$ est du signe de $(x-81)$.

(2) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I.

(3) La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous :



Déterminer avec la précision permise par le graphique, une valeur approchée des solutions de l'équation : $f(x)=350$ *(le graphique n'est pas à rendre avec la copie)*

Partie B

Un responsable de club doit organiser un déplacement. Le trajet total est de 600 km et le club dispose d'un bus dont la consommation en carburant, exprimée en litres par heure, est donnée par $\left(5+\dfrac{v^2}{300}\right)$ où v représente la vitesse moyenne du véhicule en kilomètres par heure. Le prix du litre de carburant est de 1 € et le chauffeur est payé 16,87 € par heure.

(1) On désigne par t la durée totale du trajet, exprimée en heures.

(a) Exprimer t en fonction de v.

(b) Démontrer que le coût du carburant, exprimé en euros, pour le trajet total est égal à :

$\dfrac{3\,000}{v}+2{\cdot}v$

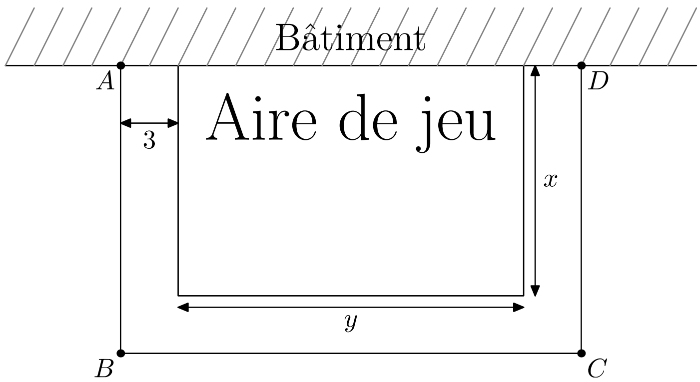
(c) Montrer que le coût du transport, exprimé en euros, est égal à $f(v)$.

(2) En utilisant la partie A :

(a) Donner la vitesse moyenne à laquelle doit rouler le bus pour que le coût du transport soit minimal. Quel est alors ce coût?

(b) Le responsable du club dispose d'au plus 350 € pour le transport. Pour des raisons de sécurité, la vitesse moyenne du bus ne peut dépasser 90 kilomètres par heure. Déterminer l'intervalle dans lequel doit se situer la vitesse moyenne du bus, pour que le coût du transport ne dépasse pas 350 €.

E.80 On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire de 450 m^2. De plus, on souhaite que les dimensions de ce rectangle soient supérieures ou égales à 10 m. Cet espace de jeu est entouré sur trois côtés d'une allée de 3 m de large comme l'indique le croquis ci-dessous.



L'ensemble est clôturé sur les trois côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.
On s'intéresse à la longueur L de la clôture :
$L=AB+BC+CD$.
On note x et y les dimensions en mètres de l'aire de jeu.

(1) (a) Démontrer que $y=\dfrac{450}{x}$, puis justifier que x appartient à l'intervalle $\big[10\,;45\big]$.

(b) Exprimer la longueur L en fonction de x.

(2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\big[10\,;45\big]$ par :

$f(x)=2{\cdot}x+12+\dfrac{450}{x}$

(a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

(b) Démontrer que, pour tout x appartenant à $\big[10\,;45\big]$, $f'(x)$ a le même signe que (x^2-225). En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

(c) Dresser le tableau de variations de f.

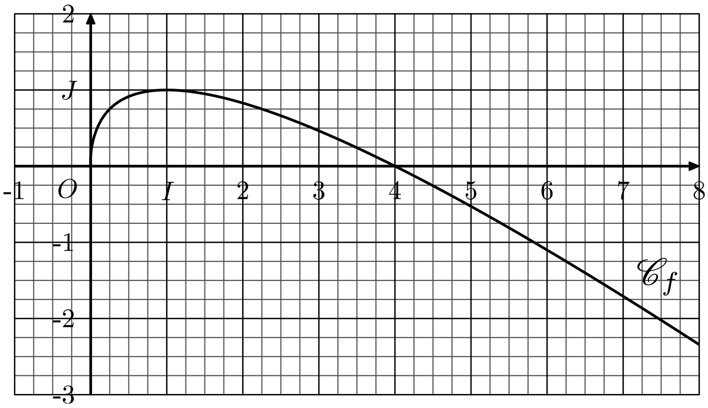
(3) Déduire de l'étude précédente les dimensions à donner à l'aire de jeu pour que la longueur de la clôture soit la plus petite possible. Quelle est alors cette longueur?

19. *Fonction racine carrée*

E.81 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$f(x) = -x + 2\sqrt{x}$

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



1. a. Montrer que la fonction f admet pour dérivée, sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f' dont l'expression est donnée par :
$$f'(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$
   b. Déterminer la valeur des nombres dérivés de la fonction f en $\frac{1}{4}$ et en 4.
2. On note (d) et (Δ) les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisse respectifs $\frac{1}{4}$ et 4.
   a. Déterminer les équations réduites des tangentes (d) et (Δ).
   b. Montrer que les deux droites (d) et (Δ) s'interceptent au point de coordonnées $\left(1\,;\frac{3}{2}\right)$.
   c. Tracer sur le graphique les droites (d) et (Δ).

20. *Exercices non-classés*

E.82 On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction g définie et dérivable sur $[0\,;5]$ ainsi que sa tangente horizontale au point A d'abscisse 3.

Parmi les quatre propositions ci-dessous, laquelle est exacte?

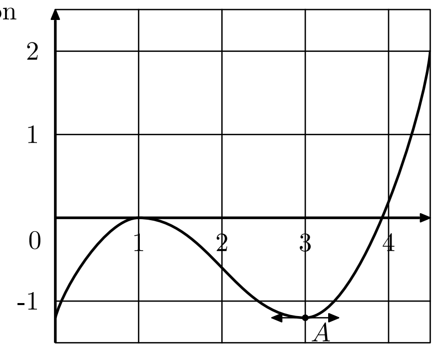
Le signe de la fonction dérivée de g est :

a. négatif sur $[0\,;1]$

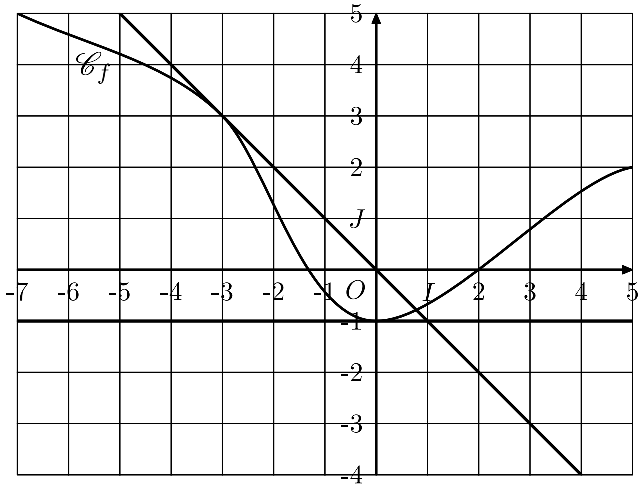
b. positif sur $[3\,;4]$

c. négatif sur $[1\,;4]$

d. change en $x=4$



E.83 La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et 0.



Parmi les quatre réponses ci-dessous, laquelle est correcte :

a. $f'(0) = -1$

b. $f'(-1) = 0$

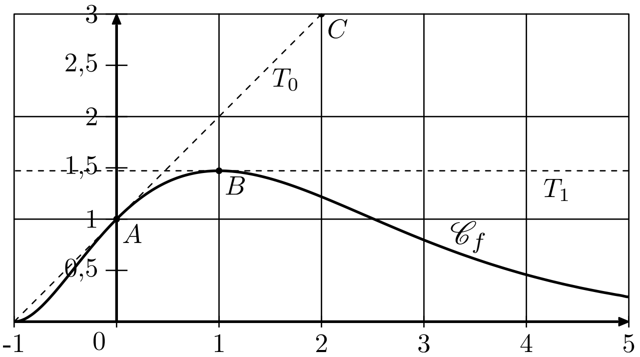
c. $f'(-3) = -1$

d. $f'(-3) = 3$

E.84

Dans ce questionnaire à choix multiples, aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.
Une bonne réponse rapporte 0,75 point.
Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.
Noter sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\,;5]$.
On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0\,;1)$ et par le point B d'abscisse 1.
La tangente T_0 à la courbe au point A passe par le point $C(2\,;3)$ et la tangente T_1 au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



1. La valeur exacte de $f'(1)$ est :

   a 0 b 1 c 1,6 d autre réponse

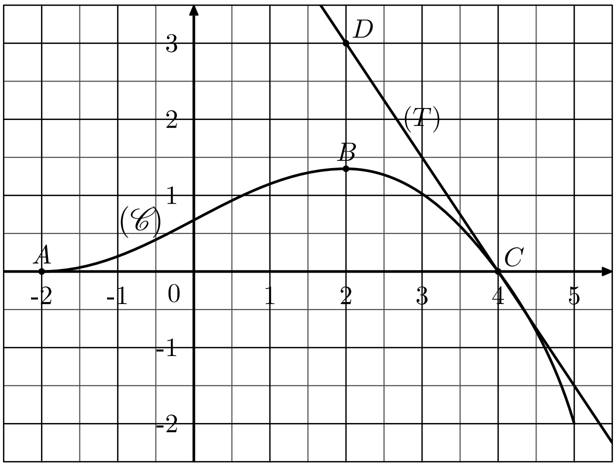
2. La valeur exacte de $f'(0)$ est :

   a 0 b 1 c 1,6 d autre réponse

3. La valeur exacte de $f(1)$ est :

   a 0 b 1 c 1,6 d autre réponse

E.85 On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;5]$, croissante sur $[-2\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;5]$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
La courbe $(\mathscr{C})$ tracée ci-dessous représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé ; elle passe par les points $A(-2\,;0)$, $B\left(2\,;\dfrac{4}{3}\right)$ et $C(4\,;0)$.
Elle admet en chacun des points A et B une tangente parallèle à l'axe des abscisses et sa tangente (T) au point C passe par le point $D(2\,;3)$.



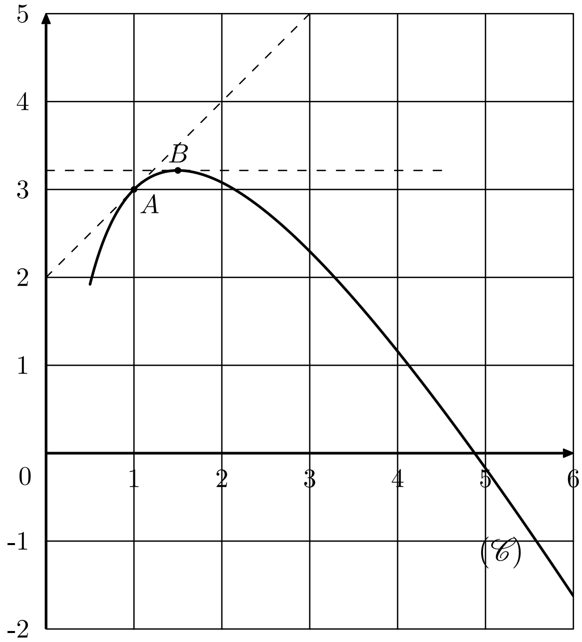
Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. La justification peut reposer sur le graphique ou sur un calcul.

- **Proposition 1 :** $f'(4) = -\dfrac{2}{3}$
- **Proposition 2 :** $f(2) = 0$

E.86 La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0{,}5\,;6]$. Les points $A(1\,;3)$ et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe $(\mathscr{C})$.

Les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale.

On note f' la fonction dérivée de f.

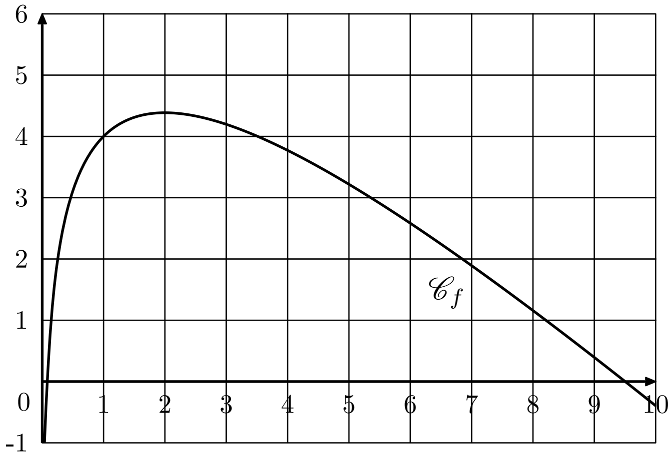


1. Déterminer $f'(1{,}5)$.
2. La tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ passant par A passe par le point de coordonnées $(0\,;2)$. Déterminer une équation de cette tangente.

E.87 Soit la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par :

$$f(x) = 5 - x + 2\cdot\ln x$$

On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f, ainsi que T, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 4.



Parmi les quatre propositions ci-dessous, laquelle est exacte?

Sur l'intervalle $]0\,;10]$, l'équation $f'(x)=0$ admet :

a. Aucune solution
b. Une seule solution
c. Deux solutions
d. Plus de deux solutions

E.88 La fonction f est définie pour tout réel x élément de l'intervalle $[1\,;7]$ par :

$$f(x) = 1{,}5\cdot x^3 - 9\cdot x^2 + 24\cdot x + 48$$

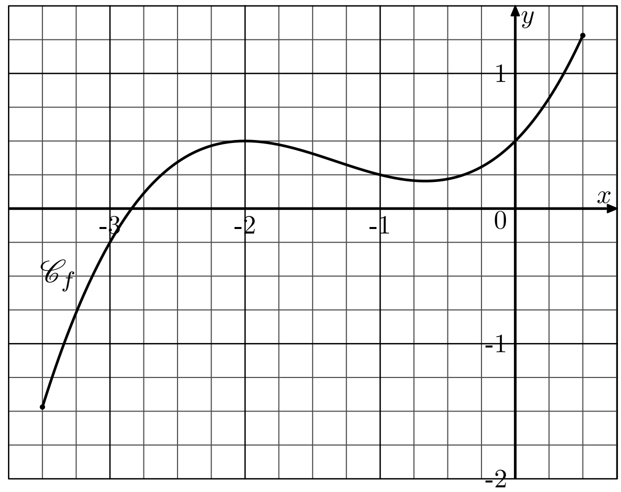
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa dérivée seconde sur $[1\,;7]$

1. Calculer $f'(x)$
2. Calculer $f''(x)$

E.89 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-3{,}5\,;0{,}5]$ par la relation :

$$f(x) = 0{,}25\cdot x^3 + x^2 + x + 0{,}5$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-dessous :



1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Déterminer les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$ par la fonction f.
3. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

   b. Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

E.90 On considère la fonction définie par la relation :

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

On note (d) et (Δ) les deux tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ respectivement aux points d'abscisses 2 et 5.

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Déterminer l'équation de la tangente (d).
3. Déterminer l'équation de la tangente (Δ).

E.91 Une entreprise fabrique des croquettes pour chiens. Chaque jour, elle en fabrique entre 0 et 80 tonnes. Le coût de fabrication de x tonnes, en euros, est modélisé par la fonction C définie par :

$$C(x) = x^3 - 105{\cdot}x^2 + 3700{\cdot}x + 4000$$

Une tonne de croquettes est vendue 1 900 €. La recette, pour x tonnes vendues, est donc donnée par une fonction R définie sur l'intervalle $\left[0\,;80\right]$.

1. a. Pour x appartenant à l'intervalle $\left[0\,;80\right]$, donner l'expression de $R(x)$.

   b. En déduire que le bénéfice réalisé par la vente de x tonnes de croquettes est donné par la fonction B définie sur l'intervalle $\left[0\,;80\right]$ par :

   $$B(x) = -x^3 + 105{\cdot}x^2 - 1800{\cdot}x - 4000$$

2. Calculer $B'(x)$ où B' désigne la dérivée de la fonction B.

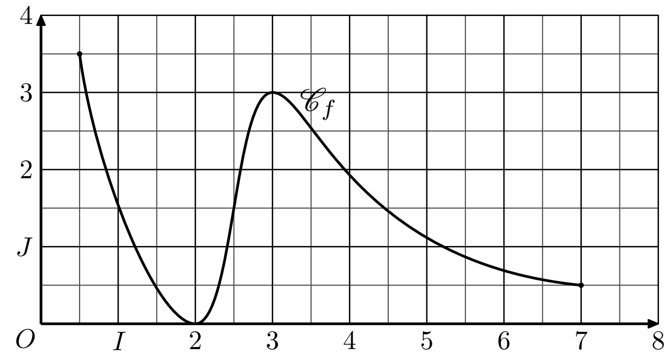
3. Justifier que le signe de $B'(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	0		10		60		80
Signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $\left[0\,;80\right]$.

5. Quelle doit être la quantité de croquettes que l'entreprise doit vendre pour réaliser un bénéfice maximal?
   Que vaut ce bénéfice?

E.92 Dans le repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ donné ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie sur $\left[0{,}5\,;7\right]$:



Sans justification, dresser le tableau de signes de la fonction f' dérivée de la fonction f