Première spécialité / Génération d'une suite

ChingEval : 3 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. *Mode de génération explicite*

E.1 Pour chaque question, déterminer les quatre premiers termes de la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$:

(a) $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ (b) $u_n = \sqrt{n^2+n+1}$ (c) $u_n = \dfrac{n-2}{n+1}$

E.2 Pour chacune des questions, déterminer les cinq premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$ définie par :

(a) $u_n = \dfrac{3{\cdot}n^2+n+2}{n+2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

(b) $u_n = \dfrac{2n^2+n+5}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

E.3 On considère la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule explicite :

$v_n = 2n^2 - 3n + 2$ pour tout entier naturel n.

On souhaite étudier la différence entre deux termes consécutifs de la suite $\left(v_n\right)$:

1. Donner l'expression du terme v_{n+1} en fonction de n.
2. Étudier la valeur de $v_{n+1}-v_n$ en fonction de n.

2. *Mode de génération par récurrence*

E.4 On définit la suite par récurrence $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation :

$u_0=5$; $u_{n+1} = 2{\cdot}u_n - 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Déterminer les cinq premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$.

E.5 On considère la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{R}}$ définie par :

$v_{n+1} = \dfrac{1-v_n}{1+v_n}$; $v_0 = 3$

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite $\left(v_n\right)$.
2. Que remarque-t-on?

E.6 Pour chaque question, déterminer les quatre premiers termes de la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$:

(a) $u_{n+1} = 2{\cdot}u_n - 2$; $u_0 = 3$

(b) $u_{n+1} = 2{\cdot}u_n - 2$; $u_0 = 1$

(c) $u_{n+1} = \dfrac{u_n-2}{u_n+1}$; $u_0 = 2$

3. *Mode de génération par récurrence d'ordre 2*

E.7 On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par les relations :

$u_0 = 2$; $u_1 = 3$; $u_{n+1} = u_n + 2{\cdot}u_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

Déterminer les quatre premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$.

E.8 On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \quad ; \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2{\cdot}u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Donner les cinq premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$.

E.9 On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie pour tout entier naturel n par :

$u_0 = 1$; $u_1 = -2$; $u_{n+2} = \dfrac{2{\cdot}u_{n+1} - u_n + 2}{u_{n+1} + u_n - 2}$

1. Déterminer les 4 premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$.
2. Que peut-on en déduire de la suite $\left(u_n\right)$.

E.10 On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie pour tout entier naturel n par :

$u_0 = 2$; $u_1 = -2$; $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} - u_n + 2}{2{\cdot}u_{n+1} + 2{\cdot}u_n + 2}$

Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est périodique de période 2 à partir du terme de rang 4.

4. *Autres modes de générations*

E.11 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par les relations :
$$u_0=-1 \quad ; \quad u_{n+1}=u_n+n-2 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

E.12 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :
$$u_0=2 \quad ; \quad u_{n+1}=3{\cdot}u_n-2{\cdot}n+1$$
Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

E.13 On considère la suite (v_n) définie par :
$$v_0=-3 \quad ; \quad v_{n+1}=n-2{\cdot}v_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
Donner les quatre premiers termes de la suite (v_n).

E.14 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par les relations :
$$u_0=2 \quad ; \quad u_{n+1}=\frac{1}{2}{\cdot}u_n+3 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

E.15 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :
$$u_0=1 \quad ; \quad u_{n+1}=\frac{4{\cdot}u_n}{3{\cdot}n-2}$$
Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n)

E.16 Pour chacune des questions, déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n) définie par :
$$v_0=1 \quad ; \quad v_{n+1}=\frac{-4{\cdot}v_n}{3{\cdot}n-4} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

E.17 On définit la suite par récurrence $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par la relation :
$$v_1=-2 \quad ; \quad v_{n+1}=\frac{1-v_n}{n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$
Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n).

5. *Utilisation de suites auxiliaires*

E.18 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation :
$$u_n=7\times4^n-2\times3^n$$

1. Montrer que la suite (u_n) vérifie la relation suivante :
$$u_{n+2}=7{\cdot}u_{n+1}-12{\cdot}u_n.$$
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :
$$v_n=u_{n+1}-3\cdot u_n$$
Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. On donnera le premier terme et la raison.

6. *Suites définies conjointement*

E.19 On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par les relations :
$$u_0=-2 \;;\; v_0=1 \;;\; \begin{cases} u_{n+1}= & u_n+v_n-3 \\ v_{n+1}= & 2{\cdot}u_n-v_n+1 \end{cases} \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
Déterminer les quatre premiers termes de ces deux suites.

E.20 On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :
$$u_0=2 \quad ; \quad v_0=3 \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{2{\cdot}u_n+v_n}{3} \\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+5{\cdot}v_n}{6} \end{cases}$$

1. Déterminer les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n).
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n=u_n-v_n$

   Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.

E.21 On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_0=10 \quad ; \quad v_0=7 \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{u_n-4{\cdot}v_n}{3} \\ v_{n+1}=\dfrac{-5{\cdot}u_n+2{\cdot}v_n}{3} \end{cases}$$

1. Déterminer les trois premiers termes de chacune de ces deux suites.
2. On définit la suite (w_n), pour tout entier naturel n, par :
   $w_n=u_n-v_n$
   - a. Établir que la suite (w_n) est une suite géométrique. On précisera sa raison.
   - b. Sachant que $u_{19}=699\,042$ et en laissant les étapes de votre raisonnement, déterminer la valeur de v_{19}.

E.22 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0=5 \; ; \; v_0=2 \; ; \; \begin{cases} u_{n+1} &= 4\cdot u_n - 3\cdot v_n \\ v_{n+1} &= 2\cdot u_n - v_n \end{cases} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. a. Établir que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme.

   b. Donner l'expression explicite des termes de la suite (w_n) en fonction de n.
2. Sachant que $v_{22}=25\,165\,820$, déterminer la valeur du terme u_{22}.

E.23 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= 0{,}1\cdot u_n + 0{,}4\cdot v_n \\ u_n + v_n &= 5 \end{cases}$$

Justifier que ces deux suites vérifient les conditions ci-dessous :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \quad ; \quad v_0 = 3 \\ u_{n+1} = 0{,}1\cdot u_n + 0{,}4\cdot v_n \\ v_{n+1} = 0{,}9\cdot u_n + 0{,}6\cdot v_n \end{cases}$$

7. Tout mode de génération

E.24 On considère trois suites (u_n), (v_n) et (t_n) dont les premiers termes ont été donnés dans la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	t_n
2	0	3	5	6
3	1	7	8	4
4	2	15	10	-8
5	3	31	11	-16
6	4	63	11	0
7	5	255	10	32

1. Vérifier que les formules ci-dessous sont vérifiées par les valeurs du tableau :
   - $B5=2*B4+1$
   - $C3=C2-A2+3$
   - $D6=D5-2*D4$
2. Utiliser ces formules pour en déduire la formule de récurrence définissant chacun des termes de ces suites.

E.25 On considère les suites de nombres ci-dessous :

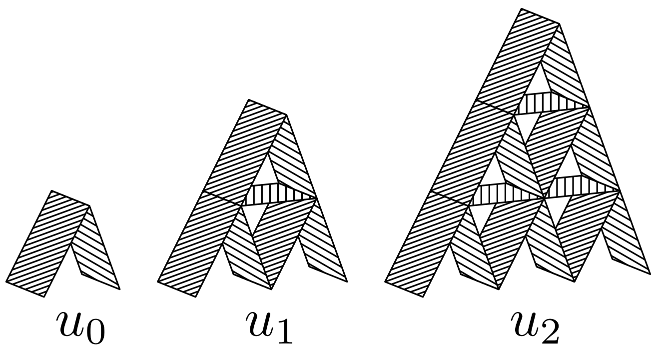
a	4	7	10	13	16	19	22	…
b	1	−2	4	−8	16	−32	64	…
c	2	2	3	5	8	12	17	…
d	0	1	4	9	16	25	36	…
e	1	1	2	3	5	8	13	…
f	1	2	1	2	1	2	1	…

Associer à chacune de cette suite une relation ci-dessous qui permet d'obtenir un terme en fonction de ses prédécesseurs :

1. $u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$
2. $\dfrac{2}{u_n} = u_{n+1}$
3. $u_n + n = u_{n+1}$
4. $-2\times u_n = u_{n+1}$
5. $u_n + 3 = u_{n+1}$
6. $u_n = n^2$

8. Approfondissement : un peu plus loin

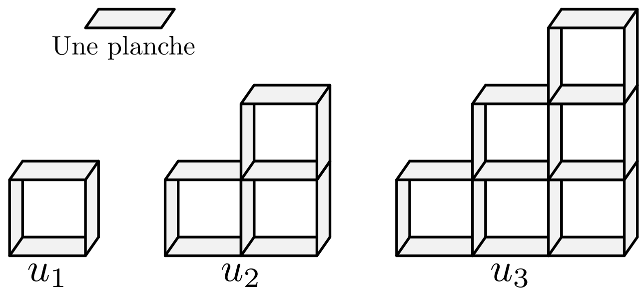
E.26 On considère la construction d'un château de cartes :



On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignant le nombre de cartes utilisées dans la construction du château à l'étape n.

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Pour tout entier naturel n, déterminer une expression du terme u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n et du rang n.
3. À quelle étape de construction peut-on arriver avec deux jeux de 72 cartes?

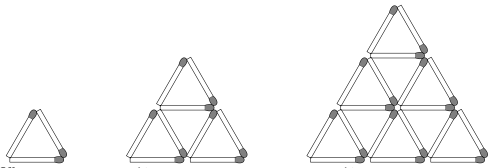
E.27 On construit successivement un objet comme le représente le schéma ci-dessous :



Pour tout entier naturel n non-nul, on note u_n le nombre de planches nécessaires pour construire la figure à l'étape n.

Donner une relation de récurrence caractérisant la suite (u_n).

E.28 On considère la construction ci-dessous effectuée d'étapes en étapes la construction de triangles équilatéraux à l'aide d'allumettes :



1^{er} étape $\quad$ $2^{\text{ième}}$ étape $\quad$ $3^{\text{ième}}$ étape

Pour tout entier naturel n non-nul, on note u_n le nombre d'allumettes nécessaires à la construction de la figure à l'étape n. Ainsi, on a : $\quad u_1=3$

1. Parmi les relations ci-dessous, laquelle vérifie les termes de la suite (u_n) :

   a. $u_{n+1}=3{\cdot}u_n+3$ $\quad$ b. $u_{n+1}=u_n+3{\cdot}n+3$

   c. $u_{n+1}=u_n+6{\cdot}n$ $\quad$ d. $u_{n+1}=u_n-3{\cdot}n+9$

2. Parmi les relations ci-dessous, laquelle vérifie les termes de la suite (u_n) :

   a. $u_n=\dfrac{3}{2}{\cdot}n^2+\dfrac{3}{2}{\cdot}n$ $\quad$ b. $u_n=n^2+2{\cdot}n$

   c. $u_n=\dfrac{3}{2}{\cdot}n^2-\dfrac{1}{2}{\cdot}n+1$ $\quad$ d. $u_n=n^2+\dfrac{3}{2}{\cdot}n+\dfrac{1}{2}$

3. Donner la valeur du terme u_6.

9. *Activité TICE*

E.29 On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0=1 \quad ; \quad u_{n+1}=2{\cdot}u_n+3^n \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. a. Vérifier la valeur des deux termes suivants :
   $u_1=3 \quad ; \quad u_2=9$

   b. Déterminer la valeur du terme de rang 3 de la suite (u_n).

2. a. Compléter l'algorithme ci-dessous afin que la variable **u** prenne successivement les 20 premiers termes de la suite (u_n)

```
u ← 1
Pour i allant de 0 à ...
     u ← ...
Fin Pour
```

   b. Saisir cet algorithme dans AlgoBox afin qu'il affiche les 20 premiers termes de la suite (u_n). Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de la suite (u_n)?

E.30 On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0=3 \quad ; \quad u_{n+1}=9\times2^n-u_n$

1. a. Vérifier la valeur des deux termes suivants :
   $u_1=6 \quad ; \quad u_2=12$

   b. Déterminer la valeur du terme de rang 3 de la suite (u_n).

2. a. À l'aide d'une feuille de calcul, générer les 20 premiers termes de cette suite.

   b. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de la suite (u_n)?

E.31 On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0=1 \quad ; \quad u_{n+1}=\dfrac{(n+2){\cdot}u_n+1}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. a. Vérifier la valeur des deux termes suivants :
   $u_1=3 \quad ; \quad u_2=5$

   b. Déterminer la valeur du terme de rang 3 de la suite (u_n).

2. a. À l'aide d'une feuille de calcul, générer les 20 premiers termes de cette suite.

   b. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de la suite (u_n)?

E.32 On considère l'algorithme ci-dessous :

```
a ← 2
Pour i allant de 0 à 5
  a ← a+3
Fin
```

1. Afin de connaître la valeur de la variable **a** à la fin de l'exécution de cet algorithme, saisissez cet algorithme dans le langage Python :

```
a=2;
for i in range(0,6):
  a=a+3;
print(a)
```

2. Parmi les suites ci-dessous laquelle a été implémentée dans l'algorithme précédent :

   a. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n+2 \end{cases}$ $\quad$ b. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2\times u_n \end{cases}$

   c. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n+3 \end{cases}$ $\quad$ d. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3\times u_n \end{cases}$

E.33 On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 4 et de raison 2.

1. Parmi les algorithmes ci-dessous, lequel permet d'afficher le terme de rang 8 de la suite (u_n) :

a.
```
a ← 4
Pour i allant de 0 à 8
  a ← a×2
Fin Pour
Afficher a
```

b.
```
a ← 4
Pour i allant de 1 à 8
  a ← a×2
Fin Pour
Afficher a
```

c.
```
a ← 2
Pour i allant de 0 à 8
  a ← a×4
Fin Pour
Afficher a
```

d.
```
a ← 2
Pour i allant de 1 à 8
  a ← a×4
Fin Pour
Afficher a
```

2. Modifiez l'algorithme pour obtenir la valeur du terme u_{12}

E.34 On considère l'algorithme suivant :

```
a ← −1
Pour i allant de 0 à 4
    a ← a×2−i+1
Fin Pour
```

1. Donner les différentes valeurs prises par la variable a lors d'une exécution pas à pas de cet algorithme.
2. Donner l'expression d'une suite (u_n) dont les cinq premiers termes sont les différentes valeurs prises par la variable a lors de l'exécution de cet algorithme.

E.35 On considère l'algorithme suivant :

```
Pour i allant de 0 à 5
    a ← i× (i−1)
Fin Pour
```

1. Lors de l'exécution pas à pas de cet algorithme, donner les valeurs prises par la variable a.
2. Donner l'expression d'une suite (u_n) dont les six premiers termes sont les valeurs affichées par l'algorithme.

10. *Autour des suites arithmétiques et géométriques*

E.36 On considère la suite (v_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :

$v_0 = 2 \quad ; \quad v_1 = 3 \quad ; \quad v_{n+2} = v_{n+1} + 2\cdot v_n - 3$

Justifier que la suite (v_n) n'est pas une suite arithmétique.

E.37 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = 3\cdot u_n - 4\cdot n - 4$

Justifier que la suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

E.38 On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad v_0 = -1 \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{6\cdot u_n + 3\cdot v_n}{6} \\ v_{n+1} = \dfrac{8\cdot u_n - 2\cdot v_n}{4} \end{cases}$$

1. Déterminer les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n).
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$

   Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.

11. *Exercices non-classés*

E.39 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

$u_0=1 \quad ; \quad u_{n+1}=3\cdot u_n-6\cdot n+1 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Déterminer les valeurs des quatre premiers termes.
2. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de la suite et de ses éléments caractéristiques?

E.40

1. On considère la suite (u_n) définie par :

   $u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = 2\cdot u_n + 3^n \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   a. Déterminer les cinq premiers termes de (u_n).

   b. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de (u_n)?
2. Montrer que la suite géométrique (v_n) de premier terme 1 et de raison 3 vérifie la relation :

   $v_{n+1} = 2\cdot v_n + 3^n$.

E.41 On considère les deux suites (a_n) et (b_n) définies conjointement par les relations :

$$\begin{cases} a_0 = 0{,}40 \\ b_0 = 0{,}41 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}3b_n \\ b_{n+1} = 0{,}3a_n + 0{,}6b_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Donner la valeur exacte des trois premiers termes de chacune des suites (a_n) et (b_n).
2. On définit les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

   $u_n = a_n + b_n \quad ; \quad v_n = b_n - a_n \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9. On précisera également le premier terme.

   b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.

E.42

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$:

   $u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 2\cdot n + 2$

   Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour $n\in\mathbb{N}$, par :

   $v_n = n\cdot(n+1)$

   a. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n).

   b. Développer et réduire l'expression $v_{n+1}-v_n$.

   c. En déduire l'égalité des suites (u_n) et (v_n).

E.43 On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n - 2$$

1. Développer, réduire puis factoriser l'expression :
$$\left(n+2\right)\left(n-1\right)^2 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n - 2$$

2. En déduire que la suite $\left(u_n\right)$ admet pour forme explicite :
$$u_n = \left(n+2\right)\left(n-1\right)^2$$

E.44 On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par la relation :

$$u_n = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$$

Établir que la suite $\left(u_n\right)$ vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \left(n+1\right)^2$$

Remarque : on vient d'établir que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$

