

Première spécialité / Nombres dérivés

D'autres exercices pour ce chapitre sont disponibles en suivant le lien :

<https://chingatome.fr/chapitre/hp-lycee/derivees>

ChingEval : 10 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. Rappels : manipulation d'expressions rationnelles

E.1    Établir les identités ci-dessous :

a) $\frac{2}{x} + \frac{5}{x+1} = \frac{7x+2}{x \cdot (x+1)}$

b) $\frac{3}{x+3} - \frac{2}{5x-1} = \frac{13x-9}{(x+3)(5x-1)}$

E.2    Établir les égalités suivantes :

a) $\frac{x}{x+1} - \frac{2x-3}{x-1} = \frac{3-x^2}{(x-1) \cdot (x+1)}$

b) $\frac{x+1}{3x-2} - \frac{x+2}{3x+1} = \frac{5}{(3x-2)(3x+1)}$

E.3    Simplifier les expressions ci-dessous sous la forme d'un quotient où :

- le numérateur est développé et réduit

- le dénominateur est écrit sous la forme d'un produit.

a) $\frac{x}{2x-1} + \frac{4}{x+1}$ b) $\frac{x+3}{x^2+1} - \frac{4}{x+3}$

E.4    Établir l'égalité suivante :

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x-1} = \frac{4x+1}{x \cdot (x+1) \cdot (2x-1)}$$

E.5    Établir les égalités suivantes :

a) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{16}{x^2 \cdot (x+4)}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+1}{x \cdot (x+1)^2}$

2. Travail préliminaire sur l'obtention des nombres dérivés

E.6    On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

Établir les égalités suivantes :

a) $f(1+\pi) = \pi^2 + 3\pi + 3$

b) $f(2+h) = h^2 + 5h + 7$ où $h \in \mathbb{R}$

E.7    Soit f la fonction définie par la relation :

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

a) Établir, pour tout $h \in \mathbb{R}$, l'identité :

$$f(2+h) = h^2 + h$$

b) Pour $h \in \mathbb{R}$, déterminer une expression simplifiée de $f(1+h)$.

E.8    On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

Pour $h \in \mathbb{R}$, établir l'égalité suivante :

$$g(1+h) - g(1) = \frac{-h \cdot (h+1)}{h^2 + 2h + 2}$$

E.9    Soit f la fonction définie sur $[2; +\infty[$ par la relation :

$$f(x) = \sqrt{x-2} + 3$$

① On considère l'expression A définie par :

$$A = f(4+h) - f(4)$$

a) Justifier que, pour $h = -3$, l'expression A n'est pas définie.

b) Justifier que, pour toute $h \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$, l'expression A est définie.

② Pour tout $h \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$, établir l'égalité :

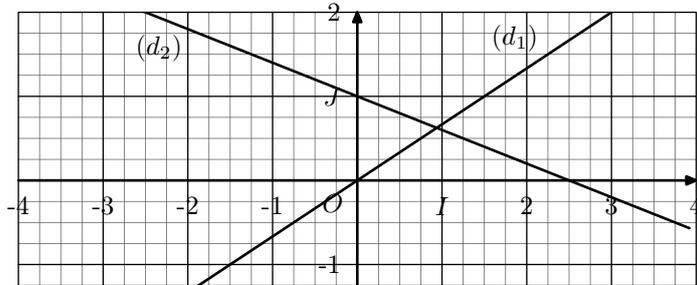
$$A = \frac{h}{\sqrt{h+2} + \sqrt{2}}$$

3. Approche des tangentes et coefficient directeur des fonctions affines

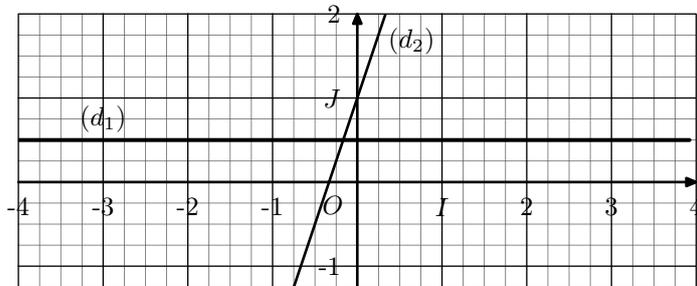
E.10   

Proposition : soit f une fonction affine dont la courbe représentative passe par les deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Le coefficient directeur m de la fonction f a pour valeur : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Déterminer les coefficients directeurs des droites (d_1) et (d_2) représentées ci-dessous :



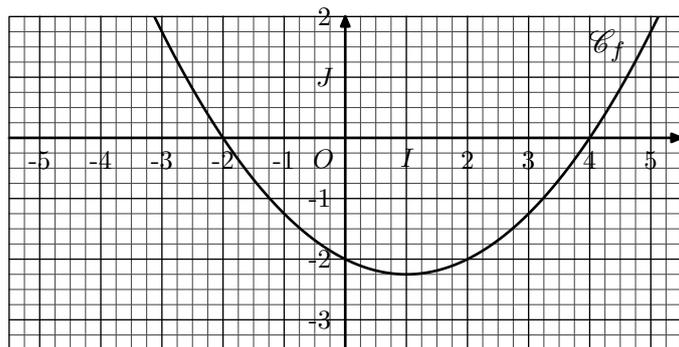
E.11    Déterminer les coefficients directeurs des droites (d_1) et (d_2) représentées ci-dessous :



E.12    On considère la fonction f définie par la relation est :

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x - 2$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$, on note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f :



1 a) Effectuer le tracé de la droite (d) dont l'équation est :

$$y = \frac{1}{2} \cdot x - 3$$

b) Effectuer le tracé de la droite (Δ) dont l'équation est :

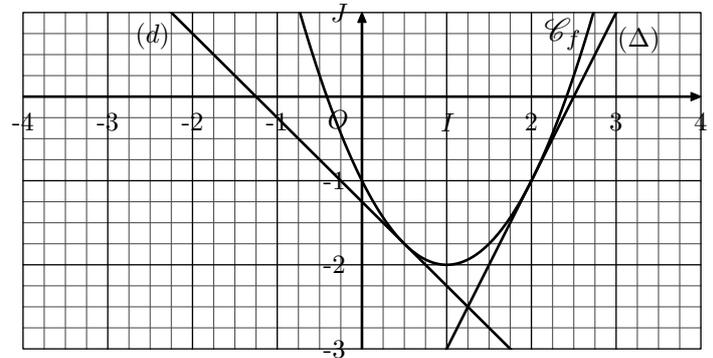
$$y = -\frac{3}{2} \cdot x - 3$$

2) Quelle particularité possède les droites (d) et (Δ) relativement à la courbe \mathcal{C}_f ?

E.13    On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f(x) = x^2 - 2 \cdot x - 1$$

On munit le plan d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé. On donne ci-dessous la courbe \mathcal{C}_f représentative de f .



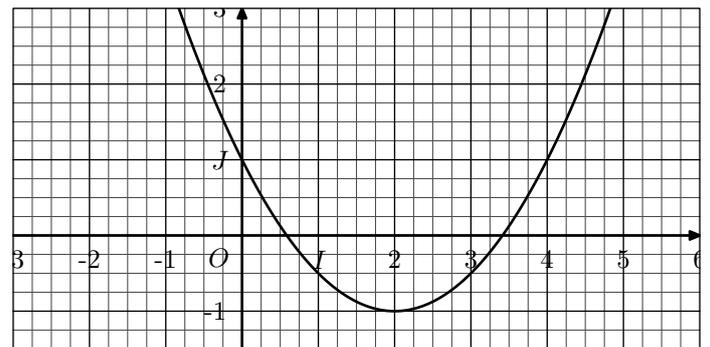
On note respectivement (d) et (Δ) les tangentes à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ et 2.

1) Déterminer les coordonnées des points de la courbe \mathcal{C}_f ayant respectivement $\frac{1}{2}$ et 2 pour abscisse.

2) a) Graphiquement, donner l'équation réduite de la droite (d) .

b) Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ) .

E.14    On donne ci-dessous la courbe \mathcal{C} représentative d'une fonction dans un repère $(O; I; J)$:



1) a) Tracer la tangente (d) à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 4.

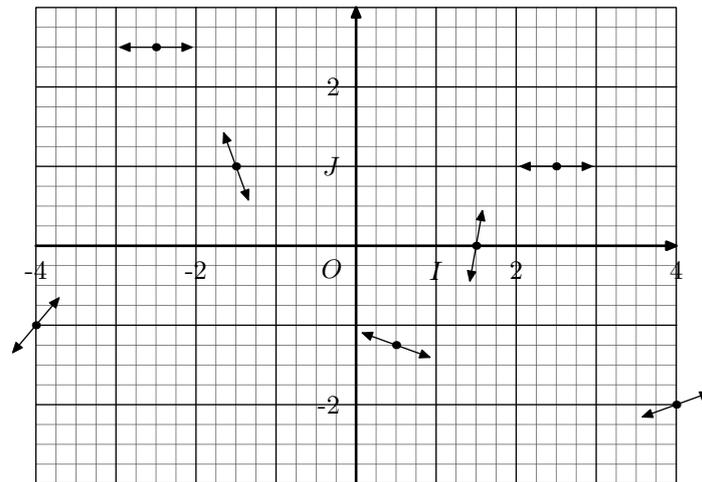
b) Donner le coefficient directeur de la droite (d) .

2) a) Tracer la tangente (Δ) à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1.

b) Donner le coefficient directeur de la droite (Δ) .

4. Champs de tangentes

E.15    Tracer la courbe représentative d'une fonction passant par tous les points indiqués et respectant en chacun d'eux la tangente représentée :

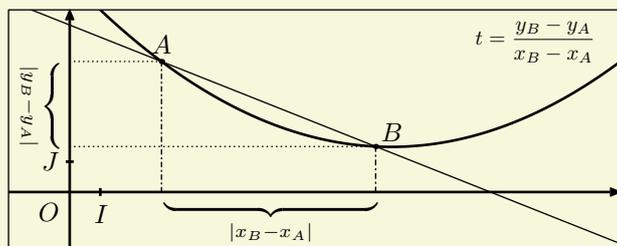


5. Taux d'accroissement

E.16   

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a, b deux nombres réels appartenant à I . On appelle taux d'accroissement de la fonction f entre a et b , le nombre t défini par : $t = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

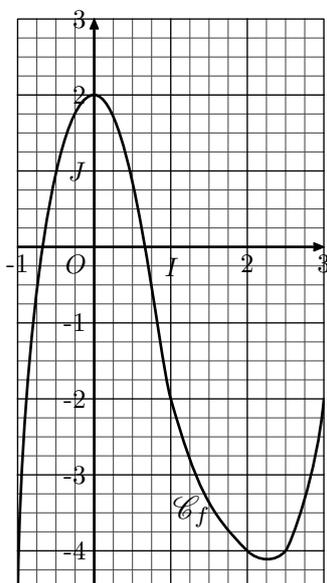
Remarque : Dans un repère et en considérant la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f sur I , le taux d'accroissement de la fonction f entre a et b correspond au coefficient directeur de la courbe entre les points A et B d'abscisse respective a et b :



Dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé ci-contre est donnée la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f .

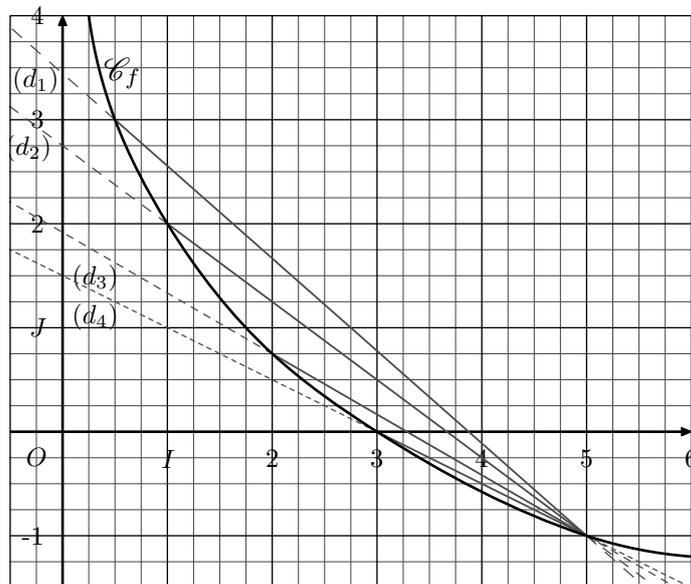
On considère les points A, B, C de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisses respectives 0, 1 et 2

- 1 Placer les points A, B et C et par lecture graphique, donner leur coordonnée.
- 2 Calculer le taux d'accroissement de la fonction f :
 - a) entre 0 et 2
 - b) entre 1 et 2



E.17    On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ dans lequel sont représentées :

- La courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f ;
- Les cordes $(d_1), (d_2), (d_3)$ et (d_4) à la courbe \mathcal{C}_f respectivement aux points d'abscisses 0,5 et 5, 1 et 5, 2 et 5, 3 et 5.



- 1 a) Déterminer le taux d'accroissement de la fonction f entre 0,5 et 5.
b) Déterminer les coefficients directeurs des cordes $(d_2), (d_3), (d_4)$ à la courbe \mathcal{C}_f (si nécessaire, arrondies au millième près).
- 2 a) Tracer, à l'aide d'une règle, la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point de coordonnées $(5; -1)$.
b) Donner une valeur approchée du coefficient directeur de la tangente (T) .

6. Première notion de limites

E.18    

Première approche de la notion de limite et de convergence :

Pour une valeur (*terme d'une suite ou image par une fonction*) assujéti à la variation d'un paramètre (*rang du terme ou variation de la variable*) lorsque celle-ci se "stabilise" vers une valeur, on parle alors de **convergence**.

Dans le cas d'une convergence, on parlera de **valeur limite**

1 a) Saisir le code suivant dans votre éditeur Python :

```
x=1;
for i in range(1,10):
    x=x/10
    y=(x*x+x)/(2*x*x+3*x)
    print(x, "\t", y)
```

b) Après l'exécution de ce code et en analysant l'affichage de la console, répondre aux questions suivantes :

- Les valeurs successives prises par la variable x semblent se stabiliser vers quelles valeurs?
- Même question, pour les valeurs successives de la variable y ?

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{2 \cdot x^2 + 3 \cdot x}$$

Le tableau de valeurs, ci-contre, de la fonction f présente des valeurs de x se stabilisant vers 0, on remarque que leurs images convergent vers $\frac{1}{3}$.

x	$f(x)$
1	0,4
0,1	0,34375
0,01	0,33343708...
0,001	0,33334444...
0,0001	0,33333444...
0,00001	0,33333334...

On peut conjecturer que "la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 a pour valeur $\frac{1}{3}$ " et on note : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3}$

2) À l'aide du programme précédent, conjecturer la valeur des limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x+2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+x}{x^2}$

E.19    On considère trois fonctions f , g et h trois fonctions définies sur \mathbb{R}_+^* par les relations :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad h(x) = \frac{2x^2+x}{5x}$$

1) Vérifier l'exactitude des égalités suivantes :

$$f(0,01) = \frac{2,01}{3,00101} \quad ; \quad g(0,0001) = \frac{-0,9998}{0,01} \quad ; \quad h(0,01) = \frac{0,0102}{0,05}$$

2) On donne, ci-dessous, les tableaux de valeurs des fonctions f , g et h :

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2,1}{3,01}$	$\frac{2,01}{3,0001}$	$\frac{2,001}{3,00001}$	$\frac{2,0001}{3,000001}$

x	1	0,01	0,0001	0,000001
$g(x)$	1	$\frac{-0,98}{0,1}$	$\frac{-0,9998}{0,01}$	$\frac{-0,999998}{0,001}$

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$h(x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{0,12}{0,5}$	$\frac{0,0102}{0,05}$	$\frac{0,001002}{0,005}$	$\frac{0,00010002}{0,0005}$

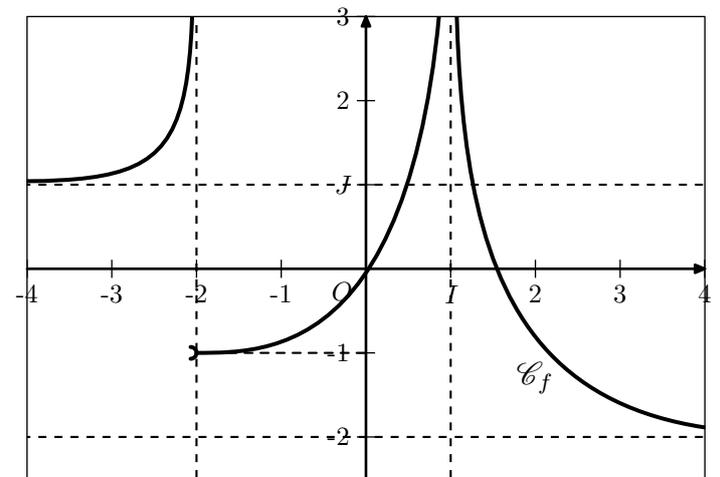
À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous à l'aide des valeurs arrondies au dix-millième près :

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
1			
0,1			
0,01			
0,001			
0,0001			
0,00001			
0,000001			

3) Conjecturer la valeur des trois limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$$

E.20   Ci-dessous est représentée la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f définie sur l'intervalle $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$:



1) Sur l'intervalle $] -\infty; -2[$, conjecturer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

2) Sur l'intervalle $] -2; 1[$, conjecturer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

3) Sur l'intervalle $] 1; +\infty[$, conjecturer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

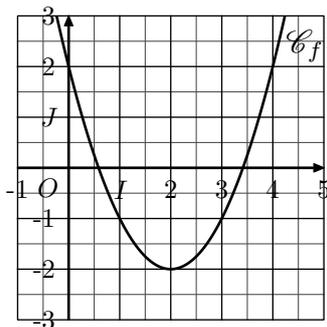
7. Introduction au nombre dérivé

E.21   

Dans un repère $(O; I; J)$, on considère la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f(x) = x^2 - 4x + 2$$

Au cours de cet exercice, nous allons déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point $A(1; -1)$.



- 1 a) Établir l'égalité suivante :
$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = x - 3 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$
- b) En déduire le coefficient directeur de la corde à la courbe \mathcal{C}_f passant par les points A et $B(2; -2)$. Vérifier graphiquement votre réponse.

fier graphiquement votre réponse.

- 2 On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par les relations :

$$u(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \quad ; \quad v(x) = x - 3$$

- a) Voici deux tableaux de valeurs de u et de v :

x	1,1	1,01	1,001	1,000 1
$u(x)$	$\frac{-0,19}{0,1}$	$\frac{-0,0199}{0,01}$	$\frac{-0,001999}{0,001}$	$\frac{-0,00019999}{0,0001}$

x	1,1	1,01	1,001	1,000 1
$v(x)$	-1,9	-1,99	-1,999	-1,9999

Que peut-on dire de la valeur de $u(x)$ lorsque le nombre x se rapproche de la valeur 1 ?

- b) Tracer dans le repère la droite (d) d'équation : $(d) : y = -2x + 1$

8. Calcul de nombre dérivé (version 1)

E.22   

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre appartenant à I . On dit que la fonction f est **dérivable en a** si la limite suivante existe :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Alors cette limite s'appelle le **nombre dérivé en a de la fonction f** et on le note $f'(a)$.

Le nombre dérivé de la fonction carrée en 3 :

- 1 Pour $x \neq 3$, établir l'égalité suivante :
$$\frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = x + 3$$
- 2 On considère f la fonction carrée :
 - a) A l'aide de la question 1, déterminer la valeur de la limite :
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$
 - b) Donner la valeur du nombre dérivé en 3 de la fonction carrée.

E.23    On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2 \cdot x^2 - x + 1$$

- 1 Établir l'identité ci-dessous, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:
$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 \cdot x + 1$$
- 2 En déduire la valeur du nombre dérivé en 1 de la fonction f .

E.24    On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = -3 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 1$$

- 1 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, on a :
$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -3x - 2$$
- 2 a) En déduire la valeur de la limite :
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$
- b) Donner le nombre dérivé de la fonction f en 2.

E.25   On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 4 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 3$$

- 1 Établir l'identité ci-dessous pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$:
$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 4x + 1$$
- 2 En déduire la valeur du nombre dérivé en 1 de la fonction f .

E.26   

- 1 Pour $x \neq 3$, établir l'égalité suivante :
$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = \frac{-1}{3x}$$

- 2 On note f la fonction inverse.
 - a) Déterminer la limite :
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$
 - b) Donner la valeur de $f'(3)$.

E.27   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$:

$$f(x) = \frac{4}{3 \cdot x + 1}$$

① Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}; 1\}$, établir l'identité:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-3}{3 \cdot x + 1}$$

② (a) En déduire la limite: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

(b) Donner la valeur du nombre dérivé $f'(1)$ de la fonction f en 1.

E.28   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par:

$$f(x) = \frac{1}{3x - 6}$$

① Établir l'égalité: $\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{-1}{3x - 6}$

② (a) Déterminer la valeur de la limite:

(b) En déduire la valeur nombre dérivée de la fonction f en 3.

E.29   On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par:

$$f(x) = \frac{x + 1}{2 \cdot x - 1}$$

① Établir l'identité ci-dessous, pour tout $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$:

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \frac{3}{5 \cdot (2 \cdot x - 1)}$$

② En déduire la valeur du nombre dérivée en -2 de la fonction f .

E.30   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par:

$$f(x) = \frac{2 \cdot x - 1}{x + 1}$$

① Établir l'identité pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$:

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = -\frac{3}{x + 1}$$

② (a) En déduire la valeur de la limite: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)}$

(b) Donner la valeur du nombre dérivé de la fonction f en -2 .

E.31   On considère la fonction f définie sur par:

$$f(x) = \sqrt{2 \cdot x + 1}$$

① Établir l'identité pour tout $x \in [-\frac{1}{2}; +\infty[\setminus \{4\}$:

$$\frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot x + 1} + 3}$$

② (a) Déterminer la limite: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$

(b) Déterminer la valeur du nombre dérivé $f'(4)$ de la fonction f en 4.

E.32   On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par:

$$f(x) = 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 3$$

① Déterminer les réels a et b réalisant l'identité sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = a \cdot x + b$$

② En déduire la valeur du nombre dérivé $f'(1)$ de la fonction f en 1.

9. Calcul de nombre dérivé (version 2)

E.33  

Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre appartenant à I . On dit que la fonction f est **dérivable en a** si la limite suivante existe:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Alors cette limite s'appelle le **nombre dérivé en a de la fonction f** et on le note $f'(a)$.

On considère la fonction f définie par:

$$f: x \mapsto 3 \cdot x^2 - 2x$$

① Pour tout $h \in \mathbb{R}$, établir l'identité:

$$f(2+h) = 3 \cdot h^2 + 10 \cdot h + 8$$

② (a) Établir que: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 10$

(b) Donner la valeur de $f'(2)$.

E.34   On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par:

$$f(x) = x^2 - 3 \cdot x + 1$$

① Soit h un nombre réel non-nul. Montrer que:

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = h + 1$$

② En déduire la valeur de $f'(2)$

E.35   On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par:

$$f(x) = x^2 + 3 \cdot x + 1$$

Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en -1 .

E.36   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par:

$$f(x) = \frac{6}{x + 2}$$

① Établir que, pour tout h tel que $1+h \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, on a:

$$f(1+h) - f(1) = \frac{-2h}{h + 3}$$

② Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en 1.

E.37    On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{-3}{x+1}$$

Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en 1.

E.38   On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1$$

1) Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, simplifier l'expression :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

2) En déduire le nombre dérivé $f'(1)$ de la fonction f en 1.

E.39   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\}$ par :

$$f(x) = \frac{2 \cdot x + 1}{2 \cdot x - 5}$$

1) Pour tout $h \in \mathbb{R}^* \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$, donner la forme simplifiée de l'expression : $\frac{f(3+h) - f(3)}{h}$

2) En déduire le nombre dérivé $f'(3)$ de la fonction f en 3.

E.40   On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 2$$

1) a) Établir l'identité ci-dessous :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -3h - 2$$

b) Donner la valeur du nombre dérivé de la fonction f en 1.

2) On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère.

Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.

10. Calcul de nombres dérivées et coefficient directeur des tangentes

E.41   

Proposition : (admis) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$. On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère.

La courbe \mathcal{C}_f admet une tangente au point d'abscisse a et cette tangente a pour coefficient directeur le nombre $f'(a)$.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

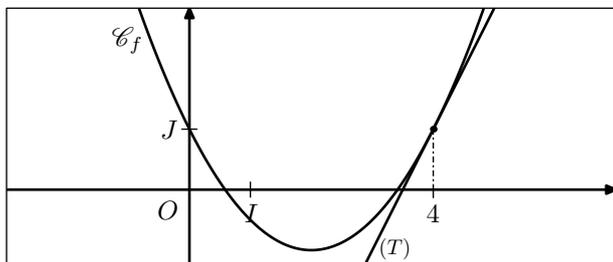
$$f: x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1$$

1) a) Montrer que, pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(4+h) - f(4) = \frac{1}{2} \cdot h^2 + 2 \cdot h$$

b) Déterminer la valeur de la limite : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$

2) Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, sont tracées la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f et la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 4 :

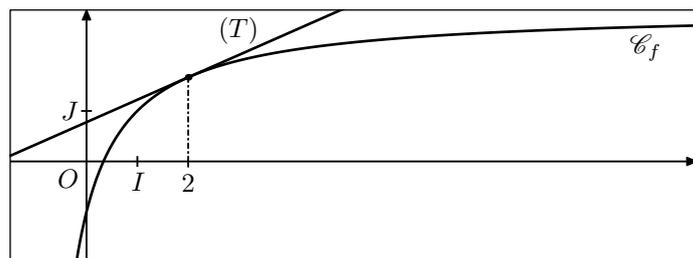


Donner le coefficient directeur de la tangente (T) .

E.42    On considère la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3 \cdot x - 1}{x + 1}$$

Dans le plan muni du repère $(O; I; J)$ orthonormé, sont représentées la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f et la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.



1) Pour tout $h \in [-1; 1]$, établir l'identité :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{4}{3 \cdot (h+3)}$$

2) Déterminer le coefficient directeur de la tangente (T) .

E.43    On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1}$$

1) Établir que pour tout entier h tel que $h+1 \neq 0$, on a :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -\frac{1}{h+2}$$

2) En déduit le nombre dérivé de la fonction f en 1.

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère.

3) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.

11. Equation réduite de la tangente

E.44   

Proposition : soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$.

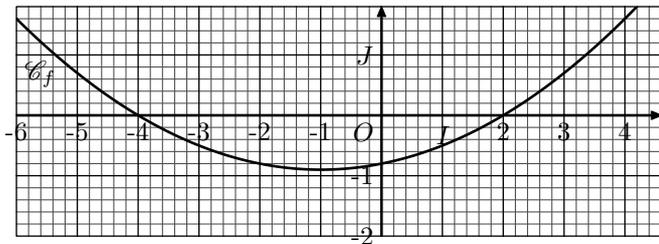
La tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a a pour équation réduite :

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 0,1 \cdot x^2 + 0,2 \cdot x - 0,8$$

On donne la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé ci-dessous :



1 a) Pour tout $h \in \mathbb{R}$, établir l'identité :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 0,1 \cdot h + 0,6$$

b) En déduire le nombre dérivé de la fonction f en 2.

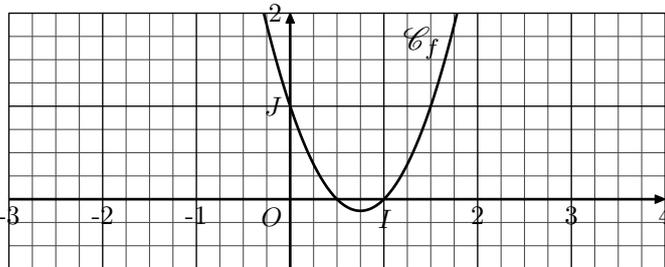
2 a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.

b) Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

E.45    On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O; I; J)$ ci-dessous

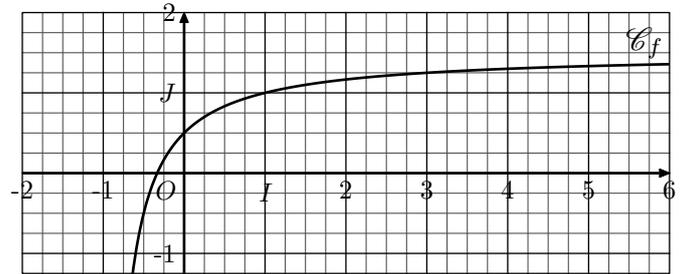


1 Établir que : $f'(1) = 1$

2 Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.

E.46    On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3 \cdot x + 1}{2 \cdot x + 2}$

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ muni d'un repère orthonormé, est donnée la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f .



1 Démontrer que : $f'(1) = \frac{1}{4}$

2 a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.

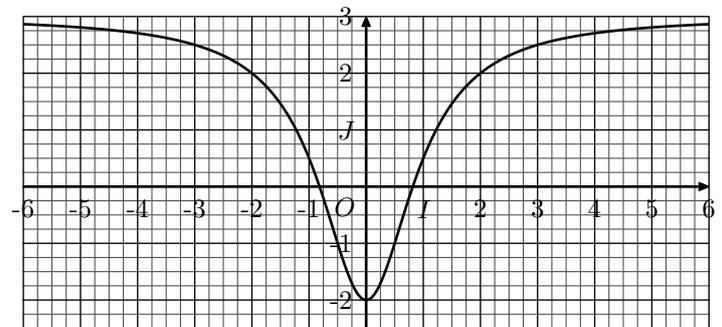
b) Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessous.

E.47    Soit f la fonction dont l'image d'un nombre réel x est définie par la relation : $f(x) = \frac{3 \cdot x^2 - 2}{x^2 + 1}$

1 a) Pour tout nombre réel h non-nul, établir l'égalité : $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{5 \cdot h + 10}{2 \cdot h^2 + 4 \cdot h + 4}$

b) En déduire la valeur du nombre dérivée $f'(1)$ de la fonction f en 1.

2 On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ et on note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f .



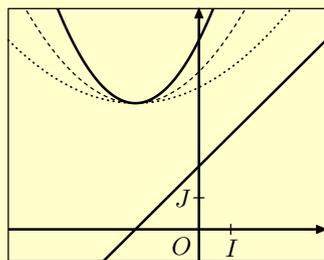
a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.

b) Tracer la tangente (T) dans le repère.

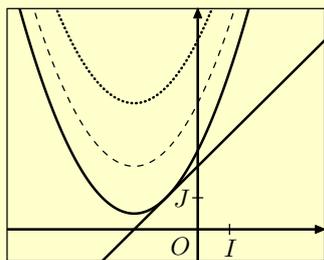
3 Déterminer les coordonnées des différents points d'intersection de (T) et de \mathcal{C}_f .

E.48   

Remarque : en choisissant, une droite dans le plan, il est toujours possible d'ajuster les coefficients d'un polynôme du second degré pour que cette droite soit une tangente en -1 à la courbe de la fonction :



Ajustement de la valeur a



Ajustement de la valeur b

On considère la fonction f du second degré définie par :

$$f(x) = a \cdot x^2 + 2 \cdot x + b \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f . La droite (T) d'équation réduite $y = x + 2$ est la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse -1 .

1 Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, établir l'identité :

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = a \cdot h - 2 \cdot a + 2$$

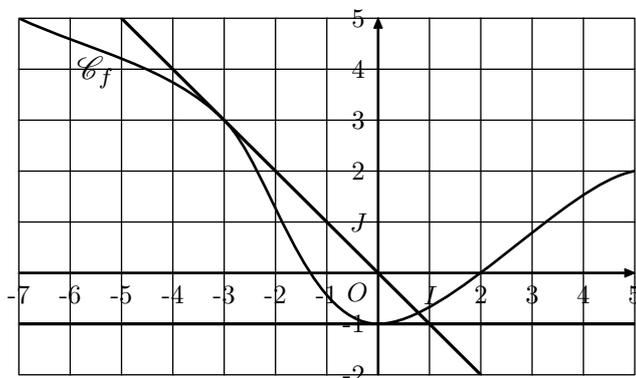
2 En déduire l'expression de la fonction f .

E.49   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $f(x) = \frac{3}{x+2}$

1 a Pour toute valeur de $h \in \mathbb{R} \setminus \{0; -3\}$, déterminer la simplification de l'expression : $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

12. Nombre dérivée : lecture graphique

E.52     La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et 0 .



Parmi les quatre réponses ci-dessous, laquelle est correcte :

- a Le nombre dérivé de f en 0 vaut -1
- b Le nombre dérivé de f en -1 vaut 0
- c Le nombre dérivé de f en -3 vaut -1
- d Le nombre dérivé de f en -3 vaut 3

b En déduire la valeur du nombre dérivé $f'(1)$ de la fonction f en 1 .

2 Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f . Déterminer l'équation réduite (T) de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1 .

E.50   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2 \cdot x + 3}{x + 1}$$

1 a Déterminer les réels a et b réalisant l'identité :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{-1}{a \cdot h + b}$$

b Établir que : $f'(1) = -\frac{1}{4}$

2 On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1 .

E.51   On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ et on considère :

• la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{a}{x+b} \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}$$

et on note \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

• la droite (T) représentative de la fonction g définie par :

$$g(x) = -4x + 4$$

Déterminer les valeurs de a et b pour que la droite (T) soit la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2 .

E.53   

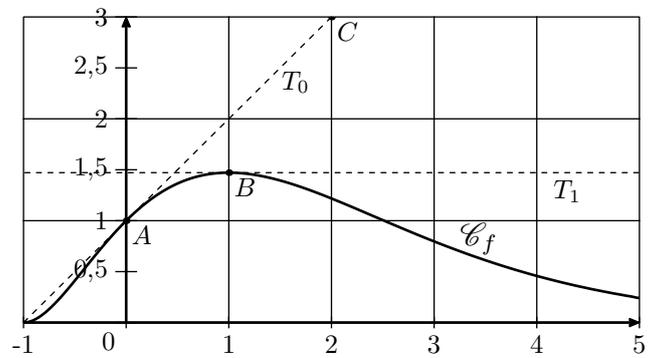
Dans ce questionnaire à choix multiples, aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.
 Une bonne réponse rapporte 0,75 point.
 Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.
 Noter sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1; 5]$.

On note f' la fonction dérivée de f .

La courbe \mathcal{C}_f passe par le point $A(0; 1)$ et par le point B d'abscisse 1.

La tangente T_0 à la courbe au point A passe par le point $C(2; 3)$ et la tangente T_1 au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



- ① La valeur exacte du nombre dérivé de la fonction f en 1 est :
 (a) 0 (b) 1 (c) 1,6 (d) autre réponse
- ② La valeur exacte du nombre dérivé de la fonction f en 0 est :
 (a) 0 (b) 1 (c) 1,6 (d) autre réponse
- ③ La valeur exacte de $f(1)$ est :
 (a) 0 (b) 1 (c) 1,6 (d) autre réponse

13. Nombres dérivés et racines carrées

E.54    On considère la fonction f dont l'image de x est définie par :

$$f(x) = \sqrt{5 - 2 \cdot x}$$

- ① Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- ② (a) Pour tout nombre réel h vérifiant :
 $h \neq 0$; $-2 + h \in \mathcal{D}_f$
 Établir l'égalité : $\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{-2}{\sqrt{9 - 2 \cdot h} + 3}$
 (b) En déduire la valeur du nombre dérivé de la fonction f en -2 .
- ③ On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse -2 .

E.55    On considère la fonction f définie sur $[-\frac{5}{2}; +\infty[$ par la relation : $f(x) = \sqrt{2 \cdot x + 5}$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.

E.56    On considère la fonction f dont l'image de x , pour $x \in [1; +\infty[$, est définie par la relation :

$$f(x) = (x^2 - 4 \cdot x + 3) \sqrt{2 \cdot x - 2}$$

- ① Donner une forme simplifiée de : $\frac{f(1+h)}{h}$ pour $h > 0$
- ② En déduire le nombre dérivé de la fonction f en 1.

14. Exercices non-classés

E.57   On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -3 \cdot x^2 + 10x - 1$$

- ① (a) Déterminer la valeur de a et b réalisant l'identité suivante pour tout $h \in \mathbb{R}^*$:
 $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = a \cdot x + b$
 (b) En déduire la valeur du nombre dérivé de la fonction f en 2.
- ② On considère le plan muni d'un repère orthonormé. On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f et (T) la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.
 Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) .

E.58   On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{x}{3 \cdot x - 1}$$

- ① (a) Déterminer la valeur de a et b réalisant l'identité suivante pour tout $h \in \mathbb{R}^*$:
 $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{-1}{a \cdot x + b}$
 (b) En déduire la valeur du nombre dérivé de la fonction f en 1.
- ② On considère le plan muni d'un repère orthonormé. On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f et (T) la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
 Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) .

E.59   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2-x}$$

① Soit a et h tels que : $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $h \in \mathbb{R}^*$; $a+h \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Établir l'identité : $f(a+h) - f(a) = \frac{h}{(2-a)(2-h-a)}$

② On munit le plan d'un repère et on note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f .
Déterminer les équations réduites des deux tangentes (T) et (T') à la courbe \mathcal{C}_f ayant pour ordonnée à l'origine la valeur -4 .

E.60   On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3$$

① Soit a et h tels que $h \in \mathbb{R}^*$, établir l'identité :

$$f(a+h) - f(a) = h \cdot (h^2 + 3 \cdot a \cdot h + 3 \cdot a^2)$$

② On munit le plan d'un repère et on note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f .

Déterminer les équations réduites des deux tangentes (T) et (T') à la courbe \mathcal{C}_f ayant pour ordonnée à l'origine la valeur 2.

E.61   On considère la fonction f , définie sur $\left[-\frac{1}{5}; +\infty\right[$, dont l'image d'un nombre réel x est donnée par la relation :

$$f(x) = \sqrt{5 \cdot x + 1}$$

① Pour $x \in \mathcal{D}_f$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $h \neq 0$ et $(x+h) \in \mathcal{D}_f$, établir l'égalité suivante :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{5}{\sqrt{5 \cdot x + 5 \cdot h + 1} + \sqrt{5 \cdot x + 1}}$$

② En déduire l'expression de la fonction dérivée de la fonction f .