

Première spécialité / Probabilités conditionnelles

D'autres exercices sur <https://chingatome.fr/chapitre/hp-lycee/probabilite-conditionnelle>



ChingQuizz : 8 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM :

1. Rappels de probabilités

E.1 📊 Voici le tableau représentant la loi de probabilité d'un dé truqué à six faces :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,15	0,1	0,08	0,17	0,22	0,28

Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous :

- 1 A : "Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 4".
- 2 B : "Le nombre obtenu est pair".

E.2 📊 On considère un dé truqué à 6 faces. L'expérience aléatoire consiste à lancer le dé et à considérer la valeur de la face supérieure du dé.

Pour k un entier compris entre 1 et 6, on considère l'événement F_k définit par "la valeur obtenue est k "

Pour seule information sur le dé, on a :

- Le tableau incomplet de la loi de probabilité de cette expérience aléatoire :

A	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
$\mathcal{P}(A)$	0,11	0,07		0,2	0,15	

- La probabilité d'obtenir un nombre pair vaut 0,4.

Recopier et compléter le tableau de la loi de probabilité de cette expérience aléatoire en justifiant votre démarche.

2. Rappels: événement contraire

E.5 📊

Proposition : soit A un événement et $\bar{A}$ son événement contraire. On a : $\mathcal{P}(\bar{A}) = 1 - \mathcal{P}(A)$

E.3 📊

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur figure ci-dessous :

On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

Le joueur lance une fléchette. On note :

- p_0 la probabilité d'obtenir 0 point ;
- p_3 la probabilité d'obtenir 3 points ;
- p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.

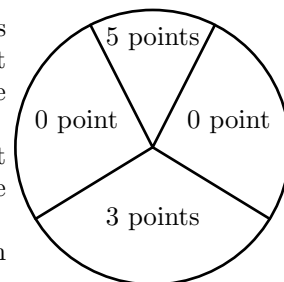
Sachant que $p_5 = \frac{1}{2} \cdot p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3} \cdot p_0$, déterminer les valeurs de p_0 , p_3 et p_5 .

E.4 📊 On considère Un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Sa loi de probabilité est donnée dans le tableau :

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

où chacun des nombres p_i est proportionnel à l'indice i .

- 1 Déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.
- 2 Calculer les probabilités des événements :
 - A : "obtenir un numéro strictement inférieur à 3" ;
 - B : "obtenir un multiple de 2" ;
 - $C = \bar{A} \cup B$.



On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

- A : "la carte tirée est un pique" ;
- B : "la carte tirée est une figure".

- 1 Décrire les issues de cette expérience aléatoire.
- 2 Calculer les probabilités des événements :

A ; B ; $A \cap B$; $A \cup B$

♥	♦	♠	♣
As	As	As	As
R	R	R	R
D	D	D	D
V	V	V	V
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7

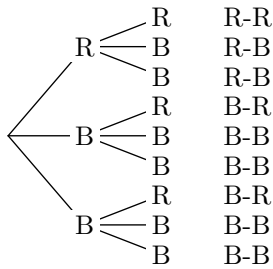
- 3 Calculer la probabilité de l'événement :
 C : "la carte tirée n'est ni un pique ni une figure"

E.6

Une urne contient deux boules bleues et une boule rouge, toutes identiques au toucher.

- 1 On tire une boule puis on la remet dans l'urne avant d'en tirer une seconde.

L'arbre des issues de cette expérience aléatoire est représenté ci-contre :



On admettra qu'on est dans une situation d'équiprobabilité. ■

- a Déterminer la probabilité des événements suivants :

- A : "La première boule tirée est rouge".
- B : "Les deux boules tirées sont de même couleur"
- C : "La première boule tirée est rouge ou la seconde boule tirée est bleue".

- b Déterminer la probabilité des événements suivants :
 $\bar{A}$; $B \cup C$; $A \cap B$; $B \cap C$

- 2 On change les règles de ce jeu ainsi : il n'y a plus de remise ; la première boule tirée est écartée du jeu.

- a Construire l'arbre des issues lié à ce nouveau jeu.
 b Calculer les nouvelles probabilités des événements cités aux questions a et b de la question précédente.
 c Parmi les tirages ayant eu une boule bleue au premier tirage, quelle est la probabilité d'obtenir une boule bleue au second tirage?

3. Rappels : formule de l'union

E.7

Proposition : soit A et B deux événements. On a l'égalité : $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)$

Le comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un week-end en province.

Une enquête est faite auprès des 1 200 employés de cette entreprise afin de connaître leur choix en matière de moyen de transport (les seuls moyens de transport proposés sont le train, l'avion ou l'autocar).

Les résultats de l'enquête auprès des employés de l'entreprise sont répertoriés dans le tableau suivant :

	Train	Avion	Autocar	Total
Femme	468	196	56	720
Homme	150	266	64	480
Total	618	462	120	1200

On interroge au hasard un employé de cette entreprise (on suppose que tous les employés ont la même chance d'être interrogés).

F l'événement : "l'employé est une femme" ;

T l'événement : "l'employé choisit le train".

- 1 Calculer les probabilités $\mathcal{P}(F)$, $\mathcal{P}(T)$ puis déterminer la probabilité que l'employé ne choisisse pas le train (on donnera les résultats sous forme décimale)

- 2 a Déterminer la probabilité de l'événement $F \cap T$.
 b En déduire la probabilité de l'événement $F \cup T$.

E.8 Soit $(\Omega; \mathcal{P})$ un espace probabilisé où A et B sont deux événements de Ω tels que :

$$\mathcal{P}(A) = 0,42 \quad ; \quad \mathcal{P}(B) = 0,19$$

Sachant que $\mathcal{P}(A \cup B) = 0,43$, déterminer la probabilité de l'événement $A \cap B$.

E.9 Dans un établissement scolaire, 60 élèves participent à la journée découverte sportive : 45 se sont inscrits au taekwondo et 24 au judo.

Sachant que 6 d'entre eux ne se sont inscrits à aucune de ces activités, déterminer la probabilité qu'un jeune rencontré au hasard dans le centre pratique aujourd'hui :

- 1 le taekwondo ;
 2 le judo ;
 3 aucun de ces deux sports ;
 4 le taekwondo ou le judo ;
 5 le taekwondo et le judo.

4. Introduction aux probabilités conditionnelles

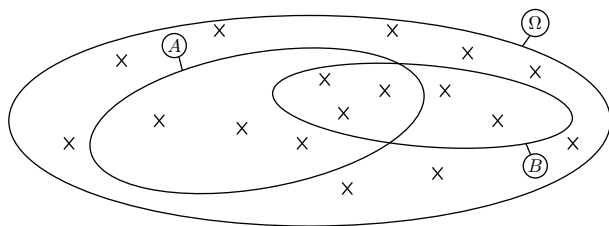
E.10 On a posé à 1 000 personnes la question suivante : "Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois?". Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

Retards le 1 ^{er} mois \ Retards le 2 ^e mois	0	1	2 ou plus	Total
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1000

On choisit au hasard un individu de cette population. On arrondira les probabilités au millièmes près.

- 1 Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois.
- 2 a Parmi les individus n'ayant pas eu de retard le premier mois, quelle est la probabilité de choisir au hasard un individu qui ait eu au moins un retard le second mois?
- b Parmi les individus ayant eu au moins un retard le second mois, quelle est la probabilité de choisir un individu n'ayant pas eu de retard le premier mois?

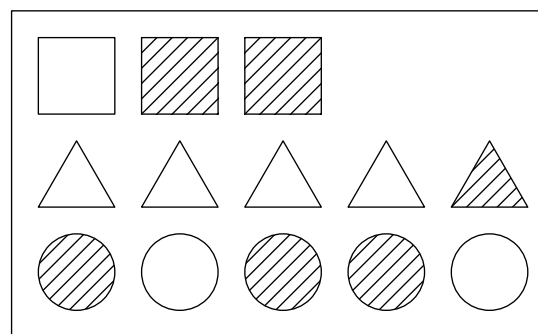
E.11 On considère un ensemble Ω et deux de ses parties A et B représentés ci-dessous et dont les éléments sont représentés par des croix :



De manière équiprobable, on choisit un élément au hasard.

- 1 a Quelle est la probabilité que l'élément tiré appartienne à A ?
- b Sachant qu'on a tiré un élément de B , quelle est la probabilité que cet élément appartienne également à A ?
- 2 a Déterminer les probabilités suivantes : $P(B)$; $P(A \cap B)$
- b Donner la valeur du quotient : $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
Que remarque-t-on?

E.12 Un jeu consiste à secouer et renverser une bouteille afin d'en sortir un de ses éléments. Voici le contenu de cette bouteille :



- 1 Déterminer la probabilité des événements suivants :
 - a A : "L'élément sorti est un carré" ;
 - b B : "L'élément sorti est rayé" ;
 - c $A \cap B$: "L'élément sorti est un carré rayé".
- 2 a Déterminer la valeur du quotient : $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- b La valeur $\frac{2}{3}$ représente quelle probabilité?
 - "la probabilité d'avoir un élément rayé parmi les éléments carrés?"
 - ou "la probabilité d'avoir un carré parmi les éléments rayés".
- 3 a Déterminer la valeur du quotient : $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- b Compléter la phrase ci-dessous :
"La probabilité des éléments parmi les éléments a une probabilité de $\frac{1}{3}$ "

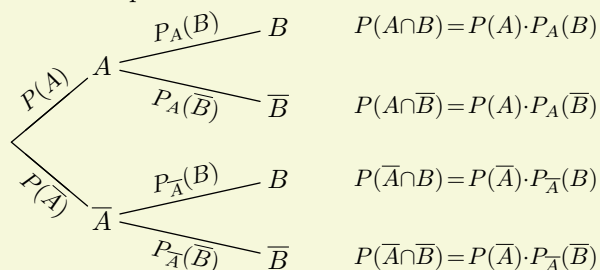
5. Représentation d'une expérience aléatoire

E.13

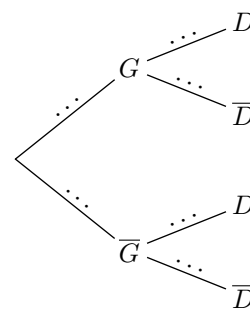
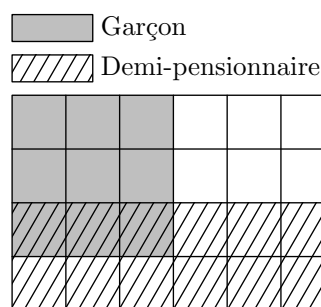
Définition : on considère deux événements A et B avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité de l'événement B sachant A , notée $P_A(B)$, a pour valeur : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Remarque : l'expérience aléatoire peut alors se traduire par l'arbre de probabilité :



Dans une étude statistique, on considère une classe de classes de 24 élèves où chaque élève est représenté par une case dans le graphique ci-dessous :



Deux caractères sont étudiés chez les individus de cette étude :

- G : "l'élève est un garçon" ;
- D : "l'élève est demi-pensionnaire".

L'expérience aléatoire consiste à choisir un élève au hasard dans la classe et de regarder la réalisation ou non de ces deux critères :

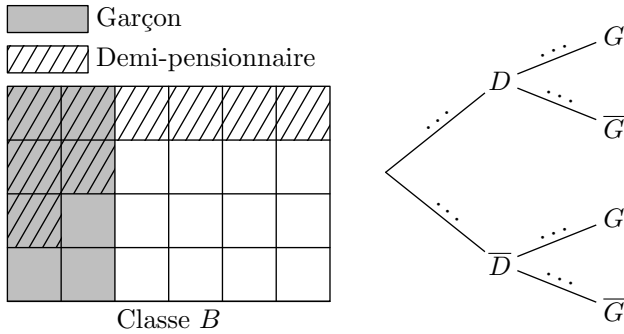
- 1 Sans justification, répondre aux questions suivantes :
 - a Quelle est la probabilité de choisir un garçon?
 - b Sachant qu'un garçon a été choisi, quelle est la proba-

bilité qu'il soit demi-pensionnaire?

c Sachant qu'une fille a été choisie, quelle est la probabilité qu'elle soit demi-pensionnaire?

2 Compléter l'arbre de probabilité ci-dessus.

E.14 Dans une étude statistique, on considère une classe de classes de 24 élèves où chaque élève est représenté par une case dans le graphique ci-dessous :



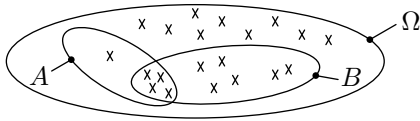
Deux caractères sont étudiés chez les individus de cette étude :

- G : "l'élève est un garçon" ;
- D : "l'élève est demi-pensionnaire".

L'expérience aléatoire consiste à choisir un élève au hasard dans la classe et de regarder la réalisation ou non de ces deux critères.

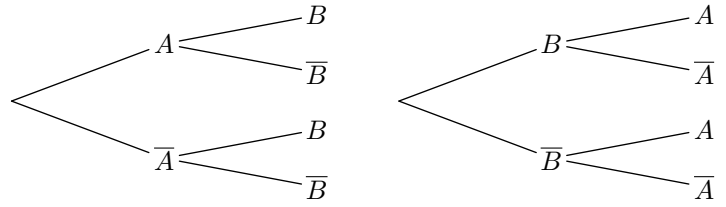
Compléter l'arbre de probabilité ci-dessus.

E.15 On considère l'univers Ω et ses deux événements A et B sont représentés :

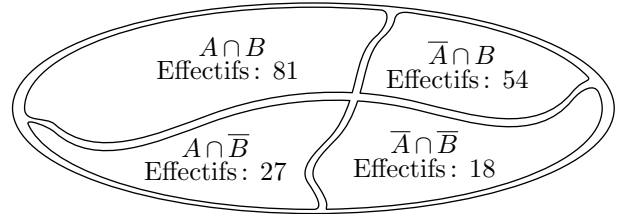


On utilise la loi d'équiprobabilité.

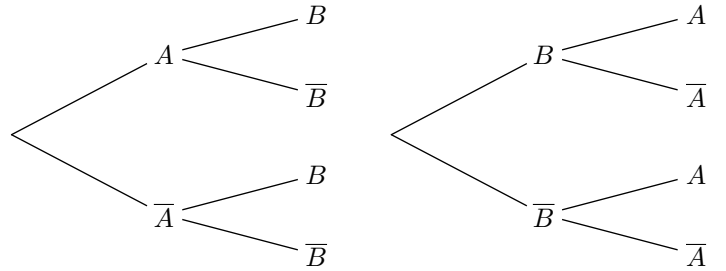
Compléter les deux arbres de probabilités :



E.16 Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B qui réalise la partition de l'univers représentée ci-dessous :

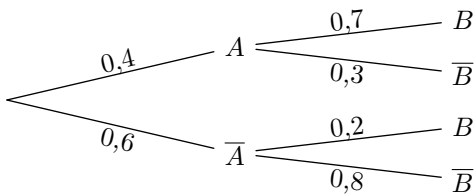


Sont indiquées les données statistiques de chacun de ces deux groupes. L'expérience consistant à tirer au hasard un individu dans l'univers, compléter les deux arbres de probabilités associés à cette expérience aléatoire :



6. Utilisation de la probabilité conditionnelle

E.17 On considère l'arbre de probabilité suivant :



1 Par lecture de cet arbre, donner les probabilités ci-dessous :

- a $\mathcal{P}_A(B)$ b $\mathcal{P}_{\bar{A}}(B)$

2 Déterminer les probabilités ci-dessous :

- a $\mathcal{P}(A \cap B)$ b $\mathcal{P}(\bar{A} \cap B)$

E.18 Une entreprise de jouets est spécialisée dans la fabrication de poupées qui parlent et qui marchent.

Chaque poupée peut présenter deux défauts et deux seulement : un défaut mécanique, un défaut électrique.

Une étude statistique montre que :

- 8% des poupées présentent le défaut mécanique ;
- 5% des poupées présentent le défaut électrique ;
- 2% des poupées présentent ces deux défauts.

La production journalière est de 1000 poupées.

- 1 Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui décrit la production journalière :

	poupées avec défaut mécanique	Poupées sans défaut mécanique	total
Poupées avec défaut électrique			
Poupées sans défaut électrique			
total	80		1 000

Dans la suite de l'exercice, chaque résultat numérique sera donné sous forme décimale.

- 2 On prélève au hasard une poupée dans la production d'une journée.
- a Soit A l'événement "la poupée prélevée est sans défaut". Calculer la probabilité de A .
- b Soit B l'événement "la poupée prélevée a au moins un défaut". Montrer que la probabilité de B est 0,11.
- c Soit C l'événement "la poupée prélevée n'a qu'un seul

défaut". Quelle est la probabilité de C ?

- d Quelle est la probabilité que la poupée prélevée présente le défaut mécanique sachant qu'elle présente un défaut électrique?

E.19 Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :

"si la boule tirée est rouge, on a la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas".

Construire un arbre de probabilité illustrant cette situation.

E.20 La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.

Pour $t=1$ ou $t=2$, on note E_t l'événement : "Le touriste se dirige vers l'Est le t -ème jour" et O_t l'événement : "Le touriste se dirige vers l'Ouest le t -ème jour".

- 1 Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.
- 2 Déterminer les probabilités suivantes : $\mathcal{P}(E_1)$; $\mathcal{P}_{E_1}(O_2)$; $\mathcal{P}(E_1 \cap E_2)$.
- 3 Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage deux jours consécutifs.

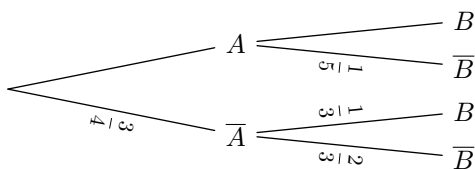
7. Probabilités conditionnelles et probabilité de l'évènement contraire

E.21

Proposition : soit A un événement et $\bar{A}$ son événement contraire. On a : $\mathcal{P}(\bar{A}) = 1 - \mathcal{P}(A)$

Corollaire : soit A et B deux événements. On a : $\mathcal{P}_A(\bar{B}) = 1 - \mathcal{P}_A(B)$

On considère l'arbre de probabilité incomplet suivant :



Alors $\mathcal{P}(A \cap B)$ la probabilité de l'événement $A \cap B$ est égale à :

- a $\frac{21}{20}$ b $\frac{1}{5}$ c $\frac{20}{21}$ d $\frac{1}{12}$

E.22 Dans ce QCM, il s'agit de recopier sur la copie chacune des trois affirmations proposées en la complétant par la réponse choisie.

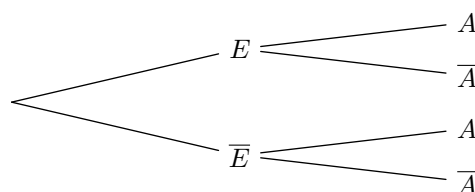
Un seul choix est correct. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse juste vaut un point, une réponse fausse enlève un quart de point, l'absence de réponse est notée 0. Si le total des points obtenus sur cet exercice est négatif ou nul, la note zéro est attribuée à l'exercice.

L'arbre suivant représente les données d'un exercice de probabilité. La probabilité d'un événement H est notée $\mathcal{P}(H)$.

On sait que :

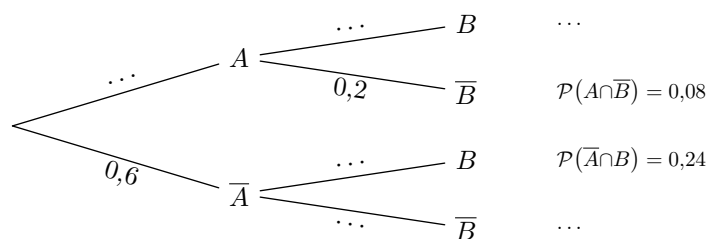
$$\mathcal{P}(E) = 0,3 \quad ; \quad \mathcal{P}_E(A) = 0,1 \quad ; \quad \mathcal{P}(\bar{E} \cap A) = 0,14$$



- 1 La probabilité de $E \cap A$ est égale à :
- a 0,4 b 0,03 c 0,33 d 0,1
- 2 La probabilité de A sachant $\bar{E}$ est égale à :

- (a) 0,7 (b) 0,14 (c) 0,2 (d) 1,1

E.23 On considère l'arbre de probabilité incomplet suivant :



En justifiant vos réponses, déterminer les probabilités suivantes :

- (a) $\mathcal{P}(A)$ (b) $\mathcal{P}_A(B)$ (c) $\mathcal{P}(A \cap B)$
 (d) $\mathcal{P}_{\bar{A}}(B)$ (e) $\mathcal{P}_{\bar{A}}(\bar{B})$ (f) $\mathcal{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$

E.24 Chaque jour où il travaille, Paul doit se rendre à la gare pour rejoindre son lieu de travail en train. Pour cela, il prend son vélo deux fois sur trois et, s'il ne prend pas son vélo, il prend sa voiture.

Lorsqu'il prend son vélo pour rejoindre la gare, Paul ne rate le train qu'une fois sur 50 alors que, lorsqu'il prend sa voiture pour rejoindre la gare Paul rate son train une fois sur 10.

On considère une journée au hasard lors de laquelle Paul sera à la gare pour prendre le train qui le conduira au travail.

On note :

- V l'évènement "Paul prend son vélo pour rejoindre la gare" ;
- R l'évènement "Paul rate son train".

1 Construire l'arbre de probabilité de cette expérience

8. Formule des probabilités totales

E.27

Définition : soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ des évènements. On dit que ces évènements forment une **partition de Ω** si on a les deux propriétés suivantes :

- Pour tout $i, j \in \{1; 2; \dots; n\}$ et $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ (on dit qu'ils sont deux à deux disjoints)
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Proposition : Formule des probabilités totales

Soit $(A_1; A_2; \dots; A_n)$ une partition de Ω . Pour tout évènement B , on a :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(A_1 \cap B) + \mathcal{P}(A_2 \cap B) + \dots + \mathcal{P}(A_n \cap B)$$

Corollaire : Pour tout évènement A et B , on a :

$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B) + \mathcal{P}(\bar{A} \cap B)$$

On considère l'arbre de probabilité suivant :

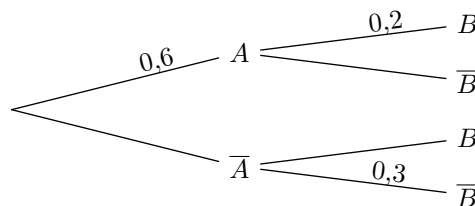
aléatoire.

2 Sans justification, donner les probabilités suivantes sous forme de fractions irréductibles :

- (a) $\mathcal{P}_V(\bar{R})$ (b) $\mathcal{P}_{\bar{V}}(R)$ (c) $\mathcal{P}(\bar{V} \cap \bar{R})$

E.25 On considère une expérience aléatoire et les deux évènements A et B tels que :

$$\mathcal{P}(A) = 0,6 \quad ; \quad \mathcal{P}_A(B) = 0,2 \quad ; \quad \mathcal{P}_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,3$$



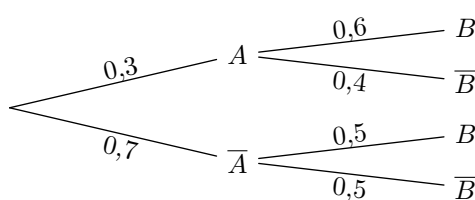
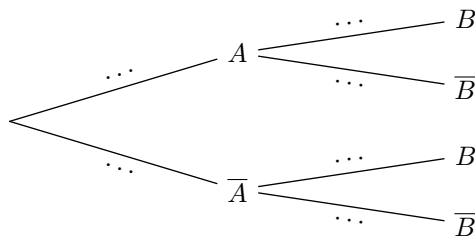
En justifiant chacun de vos résultats, déterminer les probabilités suivantes :

- (a) $\mathcal{P}_A(\bar{B})$ (b) $\mathcal{P}(B)$ (c) $\mathcal{P}_B(\bar{A})$

E.26 Dans un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P})$, on considère les évènements A et B réalisant :

$$\mathcal{P}(\bar{A}) = 0,6 \quad ; \quad \mathcal{P}_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,2 \quad ; \quad \mathcal{P}(A \cap \bar{B}) = 0,28$$

En laissant des étapes de votre raisonnement, recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



1 Déterminer les probabilités ci-dessous :

- (a) $\mathcal{P}(A \cap B)$ (b) $\mathcal{P}(\bar{A} \cap B)$

2 En déduire la probabilité de l'évènement B .

E.28 Dans un espace probabilisé, on considère les deux évènements A et B vérifiant les conditions suivantes :

$$\mathcal{P}(A) = 0,64 \quad ; \quad \mathcal{P}_A(B) = 0,3 \quad ; \quad \mathcal{P}_{\bar{A}}(B) = 0,5$$

1 Construire un arbre de probabilité représentant cette situation.

- 2 (a) Déterminer les probabilités des évènements suivants : $\mathcal{P}(A \cap B)$; $\mathcal{P}(\bar{A} \cap B)$
 (b) À l'aide de la formule des probabilités totale, déterminer la probabilité de l'évènement B .

E.29 Dans tout l'exercice, on donnera les résultats arrondis à 10^{-4} .

Les résultats d'une enquête concernant les véhicules circulant en France montrent que :

- 88 % des véhicules contrôlés ont des freins en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins en bon état, 92 % ont un éclairage en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins défectueux, 80 % ont un éclairage en bon état.

On choisit au hasard un des véhicules concernés par l'enquête. Il y a équiprobabilité des choix.

On note F l'événement "le véhicule contrôlé a des freins en bon état".

On note E l'événement "le véhicule contrôlé a un éclairage en bon état".

$\bar{E}$ et $\bar{F}$ désignent les événements contraires de E et F .

- 1 Décrire cette situation à l'aide d'un arbre.
- 2 a Déterminer la probabilité $\mathcal{P}(\bar{F})$ de l'événement $\bar{F}$.
b Quelle est la probabilité $\mathcal{P}_{\bar{F}}(\bar{E})$, probabilité que l'éclairage ne soit pas en bon état, sachant que les freins ne sont pas en bon état ?
c Montrer que la probabilité $\mathcal{P}(E \cap F)$ de l'événement $E \cap F$ est égale à 0,8096.
d Quelle est la probabilité pour que le véhicule ait un éclairage en bon état ?
e Tout conducteur d'un véhicule concerné par l'enquête ayant des freins ou un éclairage défectueux, doit faire réparer son véhicule. Calculer la probabilité pour qu'un conducteur ait des réparations à effectuer sur ses freins ou son éclairage.

E.30 À la ferme "La ferme de la Poule Pondeuse", chaque jour, on produit des oeufs de deux tailles différentes :

- 60% des oeufs sont moyens et 40% des oeufs sont gros.

Les oeufs sont classés en deux catégories : ceux de qualité ordinaire et ceux de qualité supérieure.

On a remarqué que :

- 50 % des oeufs moyens sont de qualité ordinaire,
- 20% des gros oeufs sont de qualité ordinaire

On choisit un oeuf au hasard. Le choix au hasard d'un oeuf dans la production du jour signifie qu'on se place dans un modèle avec équiprobabilité.

On définit les événements suivants :

- M : "l'oeuf est moyen"
- G : "l'oeuf est gros"
- O : "l'oeuf est de qualité ordinaire"
- S : "l'oeuf est de qualité supérieure"

- 1 Donner les probabilités suivantes :
• $\mathcal{P}(G)$: probabilité que l'oeuf soit gros,
• $\mathcal{P}_G(S)$: probabilité que l'oeuf soit de qualité supérieure sachant qu'il est gros.

- 2 Démontrer que la probabilité de prendre un oeuf gros et de qualité supérieure est égale à 0,32.
- 3 Calculer la probabilité $\mathcal{P}(M \cap S)$ que l'oeuf soit moyen et de qualité supérieure, puis la probabilité $\mathcal{P}(S)$ de l'événement S .

E.31 Une chaîne de fabrication produit des rasoirs jetables en très grand nombre.

À la sortie de la chaîne, chaque rasoir subit un test de contrôle par un automate.

L'automate rejette les rasoirs présentant un défaut. Il arrive cependant que le test ne détecte pas un défaut et laisse passer le rasoir, ou au contraire rejette un rasoir qui ne présente aucun défaut.

Une étude statistique fait sur un très grand nombre de rasoirs a en fait montré que :

- lorsque le rasoir est correctement fabriqué, le test confirme cela et accepte l'objet dans 998 cas sur 1000.
- si le rasoir a un défaut de fabrication, le test détecte ce défaut et rejette le rasoir dans 985 cas sur 1000.
- sur 1000 rasoirs fabriqués, 980 n'ont aucun défaut.

On choisit un rasoir au hasard.

On note dans la suite :

- D : l'événement "le rasoir n'a pas de défaut de fabrication",
- $\bar{D}$: l'événement contraire de D ,
- A : l'événement "le test accepte le rasoir"
- $\bar{A}$: l'événement contraire de A .

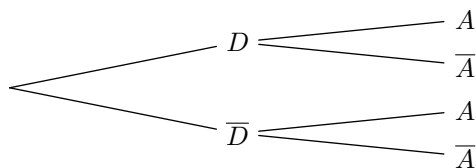
- 1 Décrire chacun des événements suivant par une phrase :

$$\bar{D} \cap A ; \bar{D} \cap \bar{A} ; D \cap A, D \cap \bar{A}$$

- 2 À l'aide de l'énoncé, donner les probabilités suivantes :

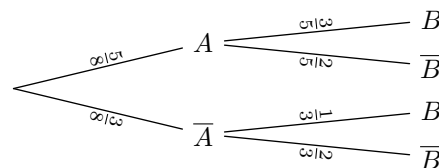
- $\mathcal{P}_D(A)$ (probabilité de A sachant que D est réalisé)
- $\mathcal{P}_{\bar{D}}(\bar{A})$

- 3 a Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant en faisant figurer les résultats exacts



- b Quelle est la probabilité qu'un rasoir soit accepté après le test de contrôle? Donner l'arrondi avec une précision de 10^{-4} .

E.32 On considère une expérience aléatoire et deux de ses événements A et B permettant d'obtenir l'arbre de probabilités ci-dessous :



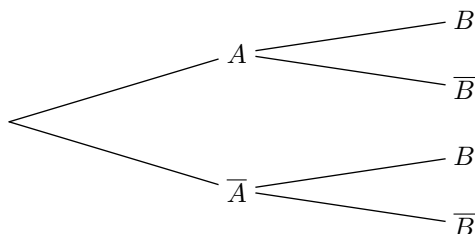
Établir que : $\mathcal{P}(B) = \frac{1}{2}$

9. Inversion de la condition

E.33 On considère une expérience aléatoire et deux de ses événements A et B . On a les informations sur ces deux événements :

$$\mathcal{P}(A) = 0,55 \quad ; \quad \mathcal{P}_A(B) = 0,95 \quad ; \quad \mathcal{P}_{\bar{A}}(B) = 0,1$$

- ① À l'aide des informations de l'énoncé, compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



- ② Calculer $\mathcal{P}(A \cap B)$ la probabilité de l'événement $A \cap B$.
 ③ Montrer que : $\mathcal{P}(B) = 0,5675$
 ④ Calculer $\mathcal{P}_B(A)$, la probabilité de l'événement A sachant l'événement B réalisé. En donner une valeur arrondie à 10^{-4} .

E.34 A et B sont deux événements liés à une même épreuve qui vérifient :

$$\mathcal{P}(A) = 0,4 \quad ; \quad \mathcal{P}_A(B) = 0,7 \quad ; \quad \mathcal{P}_{\bar{A}}(B) = 0,1$$

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Affirmation : La probabilité de l'événement A , sachant que l'événement B est réalisé, est de $\frac{14}{41}$.

E.35 Sur un espace probabilisé, on considère deux événements A et B dont on connaît les probabilités suivantes :

$$\mathcal{P}(A) = \frac{1}{4} \quad ; \quad \mathcal{P}_A(B) = \frac{1}{3} \quad ; \quad \mathcal{P}_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{2}$$

- ① Traduire cette situation par un arbre de probabilités.
 ② Déterminer la probabilité de l'événement $A \cap B$.
 ③ Démontrer que la probabilité de l'événement B est $\frac{11}{24}$.
 ④ Quelle est la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé?

E.36 Un maraîcher est spécialisé dans la production de fraises.

Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B : 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A , et 45 % dans la serre B . Dans la serre A , la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88 ; dans la serre B , elle est égale à 0,84.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Proposition 1 :

La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

Proposition 2 :

On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit. La probabilité qu'elle soit située dans la serre A , arrondie au millièm est égale à 0,439.

E.37 Dans un pays européen, 12 % des moutons sont atteints par une maladie.

Un test de dépistage de cette maladie vient d'être mis sur le marché, mais il n'est pas totalement fiable.

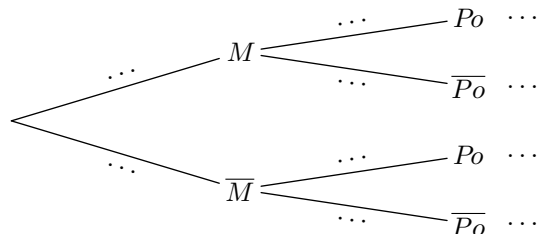
Une étude a montré que quand le mouton est malade le test est positif dans 93 % des cas ; quand le mouton est sain, le test est négatif dans 97 % des cas.

On choisit un mouton au hasard et on le soumet au test de dépistage de la maladie.

On note M l'événement "le mouton est malade".

On note Po l'événement "le test est positif".

- ① Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



- ② Calculer les probabilités des événements A , B , C suivants :
- A : "Le mouton est malade et le test est positif"
 - B : "Le mouton est sain et le test est positif"
 - C : "Le mouton est malade et le test est négatif".
- ③ En déduire que la probabilité de l'événement Po est égale à 0,138.
 Quelle est la probabilité que le test soit négatif?
- ④ Dans cette question les résultats seront arrondis au millièm.
- a) Sachant qu'un mouton a un test positif, quelle est la probabilité qu'il ne soit pas malade?
- b) Sachant qu'un mouton a un test négatif, quelle est la probabilité qu'il soit malade?

E.38



Rappels : on note :

- ⇒ $\mathcal{P}(A)$ la probabilité d'un événement A ,
- ⇒ " $A \cap B$ " l'intersection de deux événements A et B .
- ⇒ $\mathcal{P}_B(A)$ la probabilité qu'un événement A se réalise, sachant qu'un événement B (de probabilité non nulle) est déjà réalisé. On a : $\mathcal{P}_B(A) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$.

On dispose de deux urnes numérotées 1 et 2.

L'urne 1 contient une boule blanche et une boule noire.

L'urne 2 contient deux boules noires et une boule blanche.

On réalise l'expérience aléatoire suivante : on tire au hasard une boule dans l'urne 1 et on la met dans l'urne 2, puis on tire au hasard une boule dans l'urne 2.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

On note :

- ⇒ N_1 l'événement : "La boule tirée de l'urne 1 est noire" ;
- ⇒ B_1 l'événement : "La boule tirée de l'urne 1 est blanche" ;
- ⇒ N_2 l'événement : "La boule tirée de l'urne 2 est noire" ;
- ⇒ B_2 l'événement : "La boule tirée de l'urne 2 est blanche"

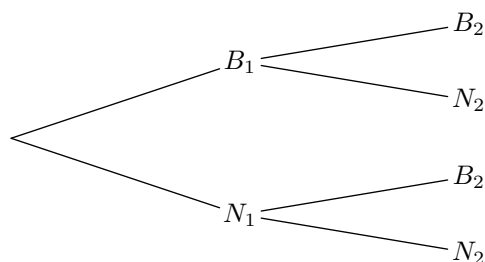
① Donner les valeurs de $\mathcal{P}(B_1)$ et $\mathcal{P}(N_1)$.

② Montrer que : $\mathcal{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2}$.

De la même façon donner les valeurs de :

$$\mathcal{P}_{B_1}(N_2) \quad ; \quad \mathcal{P}_{N_1}(B_2) \quad ; \quad \mathcal{P}_{N_1}(N_2).$$

③ Compléter l'arbre de probabilités :



④ Calculer $\mathcal{P}(B_1 \cap B_2)$.

⑤ Montrer que $\mathcal{P}(B_2) = \frac{3}{8}$ puis calculer $\mathcal{P}(N_2)$.

⑥ Sachant qu'on vient de tirer une boule blanche dans l'urne 2, quelle est la probabilité qu'on ait tirée auparavant une boule blanche dans l'urne 1 ?

E.39



Un internaute souhaite faire un achat par l'intermédiaire d'internet. Quatre sites de vente, un Français, un Allemand, un Canadien et un Indien présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise chacun de ces sites vérifie les conditions suivantes (les initiales des pays désignent les événements "l'achat s'effectue dans le pays") :

$$\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(A) \quad ; \quad \mathcal{P}(F) = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}(C) \quad ; \quad \mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(I)$$

① Calculer les quatre probabilités $\mathcal{P}(F)$, $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(C)$ et $\mathcal{P}(I)$.

② Sur chacun des quatre sites, l'internaute peut acheter un supplément pour son matériel. Ses expériences précédentes conduisent à formuler ainsi les probabilités conditionnelles de cet événement, noté S :

$$\mathcal{P}_F(S) = 0,2 \quad ; \quad \mathcal{P}_A(S) = 0,5 \quad ; \quad \mathcal{P}_C(S) = 0,1 \quad ; \quad \mathcal{P}_I(S) = 0,4$$

a) Déterminer : $\mathcal{P}(S \cap A)$.

b) Montrer que : $\mathcal{P}(S) = \frac{17}{60}$.

c) L'internaute a finalement acheté un supplément. Déterminer la probabilité qu'il l'ait acheté sur le site canadien.

E.40



Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.

S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$;
s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{9}{10}$.

Sachant que j'ai sorti mon chien, quel est la probabilité qu'il pleuve ?

E.41 Un marathon est une épreuve sportive de course à pied. Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Une étude portant sur le marathon de Tartonville montre que :

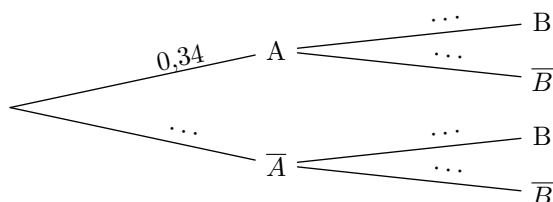
- 34 % des coureurs terminent la course en moins de 234 minutes ;
- parmi les coureurs qui terminent la course en moins de 234 minutes, 5 % ont plus de 60 ans ;
- parmi les coureurs qui terminent la course en plus de 234 minutes, 84 % ont moins de 60 ans.

On sélectionne au hasard un coureur et on considère les événements suivants :

- A : "le coureur a terminé le marathon en moins de 234 minutes" ;
- B : "le coureur a moins de 60 ans".

On rappelle que si E et F sont deux événements, la probabilité de l'événement E est notée $\mathcal{P}(E)$ et celle de E sachant F est notée $\mathcal{P}_F(E)$. De plus, $\bar{E}$ désigne l'événement contraire de E .

- 1 Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous associé à la situation de l'exercice :



- 2 a Calculer la probabilité que la personne choisie ait terminé le marathon en moins de 234 minutes et soit âgée de plus de 60 ans.

- b Vérifier que : $\mathcal{P}(\bar{B}) \approx 0,123$

- c Calculer $\mathcal{P}_{\bar{B}}(A)$ et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

E.42 La documentaliste d'un lycée souhaite acheter les romans de la saga Harry Potter.

Elle enquête pour savoir si le sujet intéresse les élèves :

- 10 % des élèves ont lu le 7^e tome ;
- 90 % des élèves qui ont lu le 7^e tome ont vu le 7^e film ;
- 55 % des élèves qui n'ont pas lu le 7^e tome ont vu le 7^e film.

- 1 Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités pondéré.
- 2 On choisit un élève au hasard, quelle est la probabilité qu'il ait seulement lu le 7^e tome ?
- 3 Quelle est la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait vu le 7^e film ?
- 4 L'élève a vu le 7^e film, quelle est la probabilité qu'il ait lu le 7^e tome ? (la valeur sera arrondie au millièmè près)

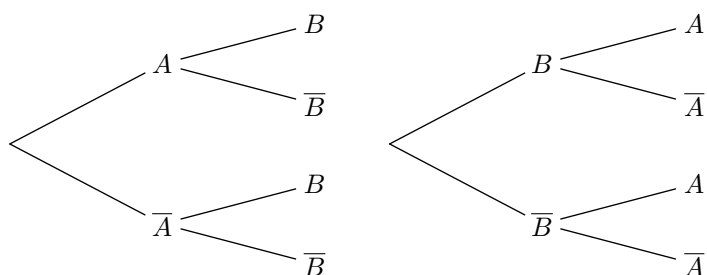
10. Construction de l'arbre avec inversion de la condition

E.43 On considère les deux événements A et B réalisant les conditions suivantes :

$$\mathcal{P}(A \cap B) = 0,05 \quad ; \quad \mathcal{P}(\bar{A} \cap B) = 0,15$$

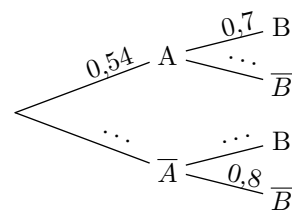
$$\mathcal{P}(A \cap \bar{B}) = 0,35 \quad ; \quad \mathcal{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,45$$

Compléter les deux arbres de probabilités suivants :



E.44

Dans un espace probabilisé, on considère deux événements A et B . Voici un arbre de probabilité réalisé avec ces deux événements :



- 1 Compléter l'arbre de probabilité représentant cette expérience aléatoire.
- 2 Justifier chacune des valeurs suivantes (arrondies au millièmè près) :

a $\mathcal{P}(A \cap B) = 0,378$

b $\mathcal{P}(\bar{A} \cap B) = 0,092$

c $\mathcal{P}(B) = 0,47$

d $\mathcal{P}_B(A) \approx 0,804$

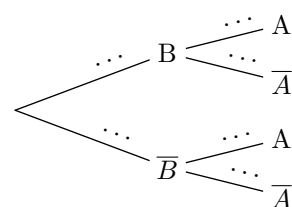
- 3 Déterminer les probabilités suivantes :

a $\mathcal{P}(A \cap \bar{B})$

d $\mathcal{P}(\bar{B})$

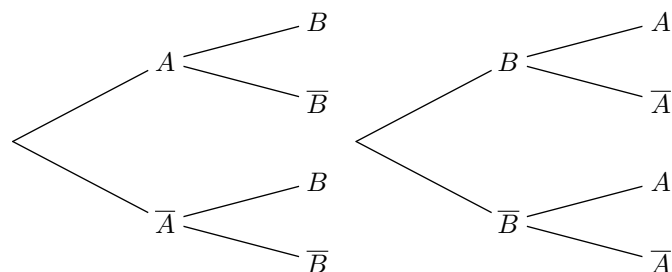
f $\mathcal{P}_{\bar{B}}(A)$

- 4 Construire l'arbre de probabilité ci-contre en le complétant avec les valeurs des probabilités arrondies au millièmè :



E.45 Dans un espace probabilisé, on considère deux événements A et B . On connaît les probabilités suivantes :

$$P(A) = 0,3 \quad ; \quad P_A(B) = 0,8 \quad ; \quad P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,6$$



Compléter les deux arbres de probabilité ci-dessus, avec si nécessaire les valeurs arrondies au centième près.

11. Arbres non-symétriques

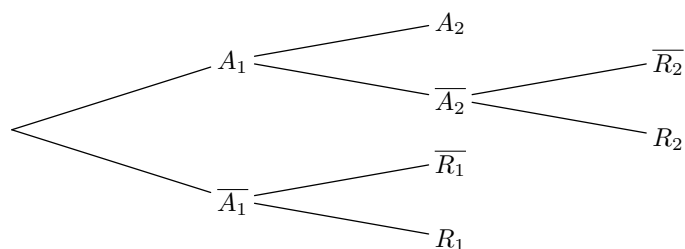
E.46 Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.

- Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.
- Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente, et, alors la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3. Et, sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité pour qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2.
- Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

Pour $i \in \{1; 2\}$, on note :

- A_i l'événement "la personne est absente lors du $i^{\text{ème}}$ appel" ;
- R_i l'événement "la personne accepte de répondre au questionnaire lors du $i^{\text{ème}}$ appel" ;

1 Compléter l'arbre de probabilité :



2 Montrer que la probabilité de réaliser l'événement "la personne a répondu au questionnaire" est 0,176.

E.47

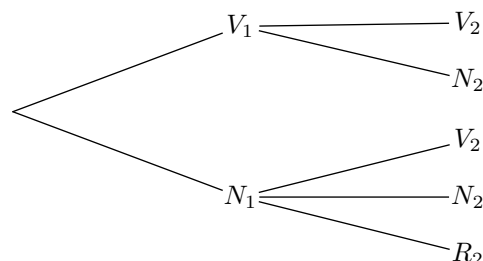
Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges et d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires.

Le jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B :

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1 a Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



b Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?

2 Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égales à $\frac{4}{9}$.

3 Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

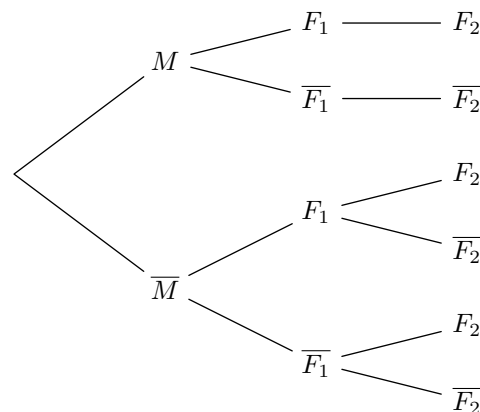
E.48 Dans cette maternité, parmi les naissances double, on estime qu'il y a 30 % de jumeaux monozygotes (*appelés "vrais jumeaux" qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles*) et donc 70 % de jumeaux dizygotes (*appelés "faux jumeaux", qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille*).

Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à 0,49 et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à 0,51.

Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né. On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les événements suivants :

- M : "les jumeaux sont monozygotes" ;
- F_1 : "le premier nouveau-né est une fille" ;
- F_2 : "le second nouveau-né est une fille". On notera $\mathcal{P}(A)$ la probabilité de l'évènement A et $\bar{A}$ l'évènement

contraire de A .



- 1 Recopier puis compléter l'arbre de pondéré ci-dessus.
- 2 Montrer que la probabilité que les deux nouveaux-nés soient des filles est de 0,315 07.
- 3 Les deux nouveaux-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.

12. Avec un peu d'algèbre

E.49 Une entreprise de chocolaterie possède deux chaînes de fabrication. Sur la chaîne C_1 , 2 % des plaquettes de chocolat ont un défaut sur leur emballage alors que sur la chaîne C_2 , 5 % des plaquettes de chocolat ont un défaut sur leur emballage.

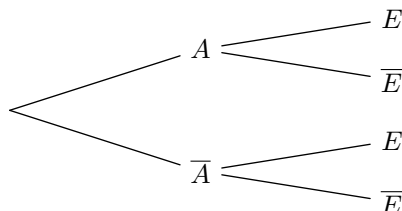
À la fin de la journée, le contrôleur tire une plaquette de chocolat au hasard dans le stock produit au cours de la journée.

On note les événements :

- A : "la plaquette de chocolat a été produit sur la chaîne 1"
- E : "la plaquette de chocolat présente un défaut d'emballage"

et on note x la probabilité de tirer une plaquette de chocolat issue de la chaîne C_1 .

- 1 Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



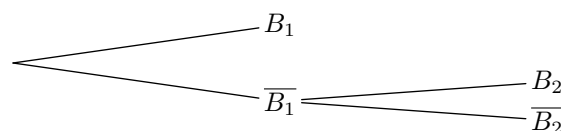
- 2 Sachant que le contrôleur a une probabilité de 0,97 de tirer une plaquette de chocolat sans défaut d'emballage, déterminer la probabilité de l'évènement A .

E.50 Un forain souhaite construire un jeu où les participants ont 5 % de chance de gagner. Pour cela, il dispose d'une urne contenant 40 boules dont n sont bleues (*où n est un entier*).

Le participant gagne s'il tire une boule bleue. Si au premier essai la boule tirée n'est pas bleue, il ne remet pas dans l'urne la boule tirée et retire une seconde boule.

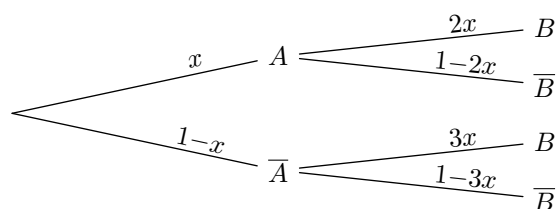
On note B l'évènement "la boule tirée est bleue".

- 1 Compléter l'arbre de probabilité :



- 2 On note G l'évènement "le participant a gagné".
 - a Montrer que : $\mathcal{P}(G) = \frac{79 \cdot n - n^2}{1560}$
 - b Déterminer le nombre n de boules bleues contenues dans l'urne.

E.51 Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B permettant de construire l'arbre de probabilité ci-dessous



et tels qu'il existe un nombre réel x vérifiant :

$$\mathcal{P}(A) = x ; \quad \mathcal{P}_A(B) = 2x ; \quad \mathcal{P}_{\bar{A}}(B) = 3x$$

1 Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}(B) = \frac{29}{100}$.
Déterminer la valeur de x .

2 Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}_B(A) = \frac{1}{5}$.
Déterminer la valeur de x .

E.52 Une urne contient des boules bleues et rouges. L'expérience aléatoire associée consiste :

- on tire une première boule dans l'urne qui sera mise de côté
- ensuite, on tire une seconde boule de l'urne.

On note :

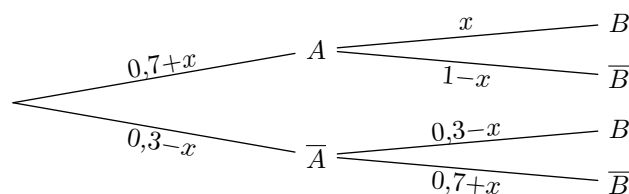
- B_1 : la première boule tirée est bleue ;
- B_2 : la seconde boule tirée est bleue.

On sait que :

- au départ, l'urne contient 21 boules bleues ;
- la probabilité, que la première boule soit bleue sachant que la seconde boule est bleue, a pour valeur $\frac{5}{6}$.

Déterminer le nombre de boules contenues initialement dans l'urne.

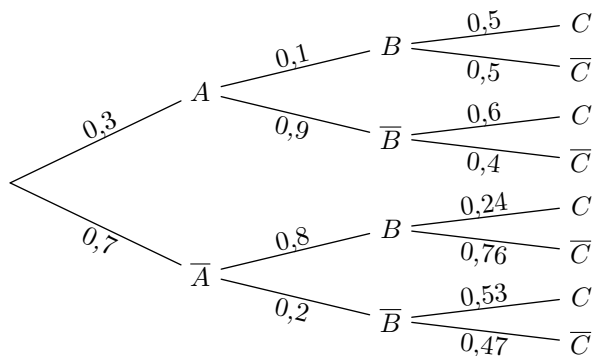
E.53 Dans un espace probabilité, on considère deux événements A et B dont l'arbre de probabilité, donnée ci-dessous, dont les probabilités dépendent d'un paramètre x réel appartenant à l'intervalle $[0; 0,3]$:



Déterminer la valeur du paramètre x afin que : $\mathcal{P}(B) = 0,1$.

13. Approfondissement : succession de plusieurs épreuves

E.54 On considère une expérience aléatoire et trois de ces événements A , B et C permettant de construire l'arbre de probabilité suivant :



1 En relevant les valeurs sur l'arbre de probabilité, donner les probabilités :

a $\mathcal{P}_{\bar{A}}(B)$ b $\mathcal{P}_{A \cap B}(C)$ c $\mathcal{P}_{A \cap \bar{B}}(\bar{C})$

2 Déterminer les probabilités :

a $\mathcal{P}(A \cap B)$ b $\mathcal{P}(A \cap B \cap C)$ c $\mathcal{P}(A \cap \bar{B} \cap \bar{C})$

E.55 On considère une population chez laquelle on étudie trois critères : l'âge, le fait d'être propriétaire ou non de son logement, posséder ou non une voiture.

Pour organiser cette population, on considère les trois classes d'individu suivantes :

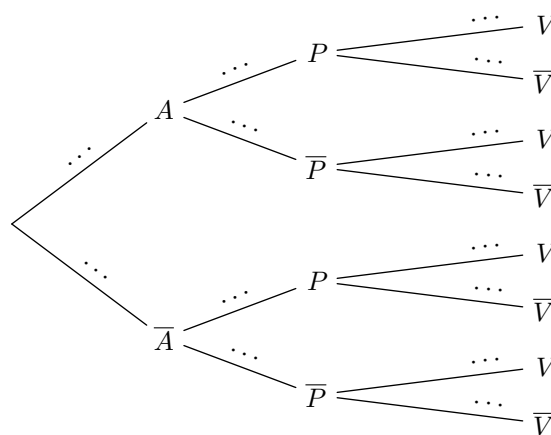
- A : "l'individu a 50 ans ou plus"
- P : "l'individu est propriétaire de son logement".

- V : "l'individu possède une voiture".

Voici le tableau des effectifs obtenus à partir de l'étude :

	A	$\bar{A}$	
P	49	1 332	V
	1	2 268	$\bar{V}$
$\bar{P}$	69	342	V
	506	11 058	$\bar{V}$

On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard un individu dans la population d'étude. En considérant, les événements associés aux classes de l'étude statistique, compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



14. Approfondissement: avec des suites

E.56 ♣ Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'événement "le joueur gagne la n -ième partie" ;
- p_n la probabilité de l'événement G_n .

On a donc : $p_1 = 0,1$

À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot p_n + \frac{3}{5}$.

E.57 ♣ Dans un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P})$. On considère

une suite d'événements (A_n) vérifiant les relations suivantes :

$$\mathcal{P}(A_0) = 0,4 \quad ; \quad \begin{cases} \mathcal{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 0,6 \\ \mathcal{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0,4 \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On note : $p_n = \mathcal{P}(A_n)$.

1 Compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

2 a Établir que :

$$p_{n+1} = 0,2 \cdot p_n + 0,4$$

b On définit la suite q_n par :

$$q_n = p_n - 0,5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Établir que la suite (q_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

c En déduire l'expression de la suite (p_n) en fonction de n .

2 Déterminer la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(A_n)$.

