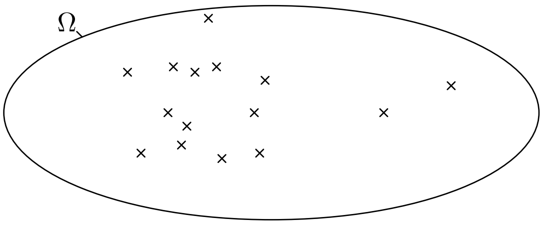
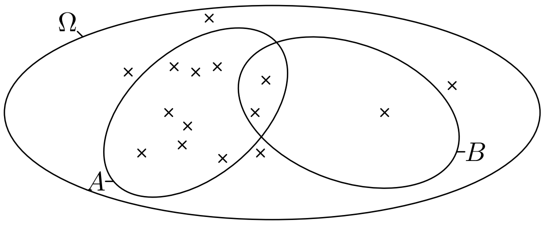
Première spécialité / Probabilité et évènements indépendants

1. *Définition*

E.1 On considère l'expérience aléatoire d'univers Ω représenté ci-dessous et muni de la loi d'équiprobabilité :



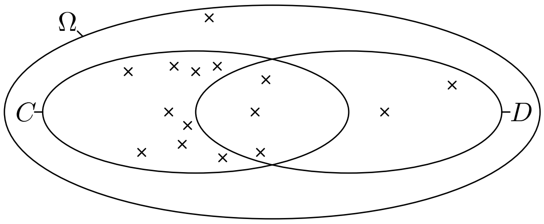
1. On considère les deux évènements A et B représentés ci-dessous :



Déterminer les probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}_A(B)$ b. $\mathcal{P}(B)$

2. On considère les deux évènements C et D représentés ci-dessous :



Déterminer les probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}_C(D)$ b. $\mathcal{P}(D)$

Définition : soit A et B deux évènements. Les évènements A et B sont dits indépendants $\mathcal{P}_A(B)=\mathcal{P}(B)$.

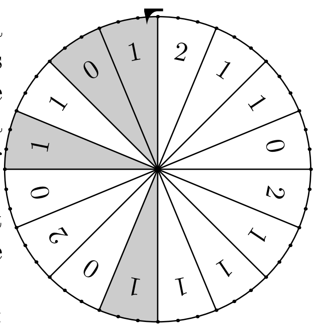
3. Les couples $(A\,;B)$ et $(C\,;D)$ sont-ils des couples d'évènements indépendants.

E.2

Un jeu consiste à faire tourner la roue ci-contre une première fois et de noter la couleur de la case obtenue, puis de faire tourner la roue une seconde fois et de noter le nombre obtenu.

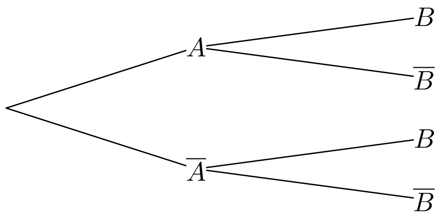
Les deux lancers de la roue sont évidemment indépendants entre eux.

On considère les deux événements :

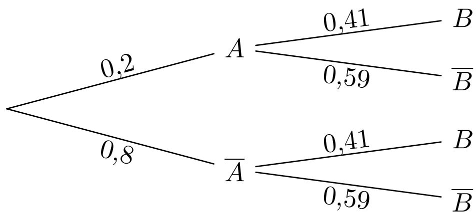


- A : *"la case obtenue est grise lors du premier tirage"* ;
- B : *"la case obtenue porte le numéro* 0 *lors du second tirage"*.

1. a. Déterminez les probabilités : $\mathcal{P}(B)$; $\mathcal{P}_A(B)$
   b. Les événements A et B sont-ils indépendants?
2. Compléter l'arbre de probabilité :

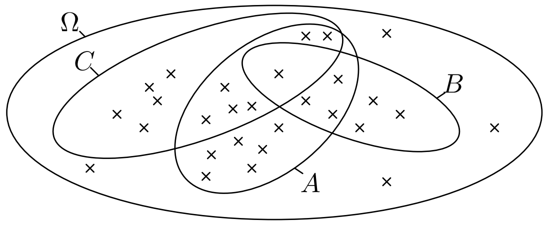


E.3 Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B permettant de construire l'arbre de probabilité :



1. Déterminer la probabilité de l'événement B.
2. Établir que les événements A et B sont indépendants.

E.4 On considère l'expérience aléatoire d'univers Ω représenté ci-dessous et muni de la loi d'équiprobabilité :



Sont également représentés les évènements A, B et C.

Parmi les deux couples d'évènements $(A\,;B)$ et $(A\,;C)$, lequel*(s)* est un couple d'évènements indépendants?

2. Propriétés

E.5

Définition : soit A et B deux événements. Les événements A et B sont **indépendants** si, et seulement si, :
$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

Dans un espace probabilisé $(\Omega\,;\mathcal{P})$, on considère les deux événements A et B tels que :
$\mathcal{P}(A) = 0{,}2 \quad ; \quad \mathcal{P}(B) = 0{,}25 \quad ; \quad \mathcal{P}(A \cup B) = 0{,}4$

1. Déterminer la probabilité $\mathcal{P}(A \cap B)$.
2. Justifier que les événements A et B sont indépendants.

E.6 On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer la face numérotée k (*k est un entier et* $1 \leqslant k \leqslant 6$).

Ce dé a été pipé de telle sorte que :

- les six faces ne sont pas équiprobables ;
- les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r ;
- les nombres p_1, p_2, p_4 dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Démontrer que :
$p_k = \dfrac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant 6$.
2. On lance ce dé une fois et on considère les événements suivants :
   - A : "*le nombre obtenu est pair*" ;
   - B : "*le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3*" ;
   - C : "*le nombre obtenu est 3 ou 4*".

   a. Calculer la probabilité de chacun de ces événements.

   b. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair.

   c. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Les événements A et C sont-ils indépendants ?

E.7 Au cours de la fabrication d'une paire de lunettes, la paire de verres doit subir deux traitements notés T_1 et T_2.

On prélève au hasard une paire de verres dans la production.

On désigne par A l'événement : "*la paire de verres présente un défaut pour le traitement T_1*.

On désigne par B l'événement : "*la paire de verres présente un défaut pour le traitement T_2*".

On note respectivement $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires de A et B.

Une étude a montré que :

- la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T_1, notée $\mathcal{P}(A)$, est égale à 0,1.
- la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T_2, notée $\mathcal{P}(B)$, est égale à 0,2.
- la probabilité qu'une paire de verres ne présente aucun des deux défauts est 0,75.

1. Recopier et compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes.

	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			1

2. a. Déterminer, en justifiant la réponse, la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T_1 ou T_2.

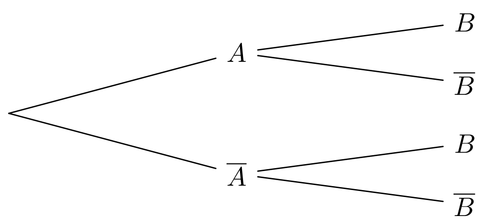
   b. Donner la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts, un pour chaque traitement T_1 et T_2.

   c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

3. Arbres de probabilité

E.8 On considère un espace $(\Omega\,;\mathcal{P})$ probabilisé et deux évènements A et B indépendants. On a les informations suivantes : $\mathcal{P}(A) = 0{,}6 \quad ; \quad \mathcal{P}(B) = 0{,}7$

1. Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



2. Déterminer les probabilités suivantes :
$\mathcal{P}(A \cap \overline{B}) \quad ; \quad \mathcal{P}(A \cup \overline{B})$

4. Manipulation algébrique

E.9 Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers Ω tels que :

$\mathcal{P}(A)=0{,}3 \quad ; \quad \mathcal{P}(A\cup B)=0{,}35$.

Déterminer la probabilité de l'événement B.

E.10 On désigne par A et B deux événements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité $\mathcal{P}$.

On sait que : $\mathcal{P}(A\cup B)=\dfrac{4}{5} \quad ; \quad \mathcal{P}(\overline{A})=\dfrac{3}{5}$

Déterminer la probabilité de l'événement B.

E.11 Soient A, B et C trois événements d'un même univers Ω muni d'une probabilité $\mathcal{P}$. On sait que :

- A et B sont indépendants ;
- $\mathcal{P}(A)=\dfrac{2}{5} \quad ; \quad \mathcal{P}(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$
- $\mathcal{P}(C)=\dfrac{1}{2} \quad ; \quad \mathcal{P}(A\cap C)=\dfrac{1}{10}$

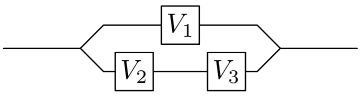
Sans justification, indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

- **Proposition 1 :** $\mathcal{P}(B)=\dfrac{7}{12}$
- **Proposition 2 :** $\mathcal{P}\big(\overline{A\cup C}\big)=\dfrac{2}{5}$

  où $\overline{A\cup C}$ désigne l'événement contraire de $A\cup C$.

5. *Arbre non-symétrique*

E.12 Avec trois vannes identiques V_1, V_2 et V_3, on fabrique le circuit hydraulique ci-contre.
Le circuit est en état de marche si V_1 est en état de marche ou si V_2 et V_3 le sont simultanément.

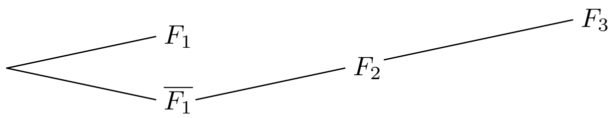


On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche après 6 000 heures. On note :

- F_1 l'événement : "*la vanne V_1 est en état de marche après 6 000 heures*".
- F_2 l'événement : "*la vanne V_2 est en état de marche après 6 000 heures*".
- F_3 l'événement : "*la vanne V_3 est en état de marche après 6 000 heures*".
- E l'événement : "*le circuit est en état de marche après 6 000 heures*".

On admet que les événements F_1, F_2 et F_3 sont deux à deux indépendants et ont chacun une probabilité égale à 0,3.

1. L'arbre probabiliste ci-contre représente une partie de la situation.
   Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.



2. Démontrer que : $\mathcal{P}(E)=0{,}363$.
3. Sachant que le circuit est en état de marche après 6 000 heures, calculer la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche à ce moment-là. Arrondir au millième.

6. *Avec un peu d'algèbre*

E.13 Une urne contient des boules de couleurs bleues et des boules de couleurs rouges. Certaines de ces boules portent une étoile. Voici le tableau des effectifs de cette urne :

	porte une étoile	ne porte pas une étoile
Boule bleue	5	6
Boule rouge	7	8

On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard une boule dans cette urne et de noter sa couleur et la présence ou non d'une étoile.

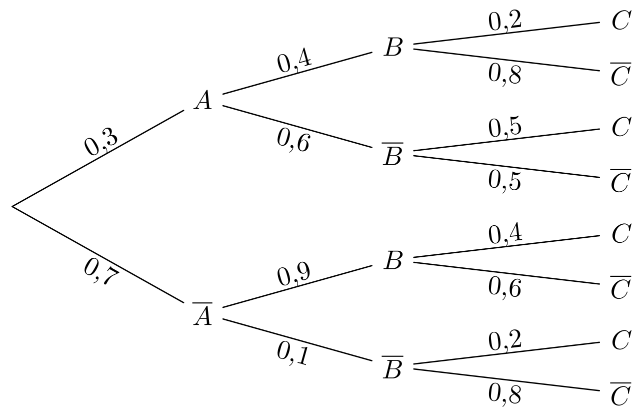
On considère les deux événements :

- A : "*la boule tirée est rouge*"
- B : "*la boule tirée porte une étoile*"

1. Établir que les événements A et B ne sont pas indépendants.
2. On rajoute 30 boules portant une étoile de couleur rouge ou bleue de telle sorte que les événements A et B sont indépendants.
   Déterminer le nombre de boules rouges et le nombre de boules bleues qui ont été rajoutées.

7. *Avec plusieurs évènements*

E.14 On considère une expérience aléatoire et trois de ses événements A, B et C donnant l'arbre de probabilités ci-dessous :



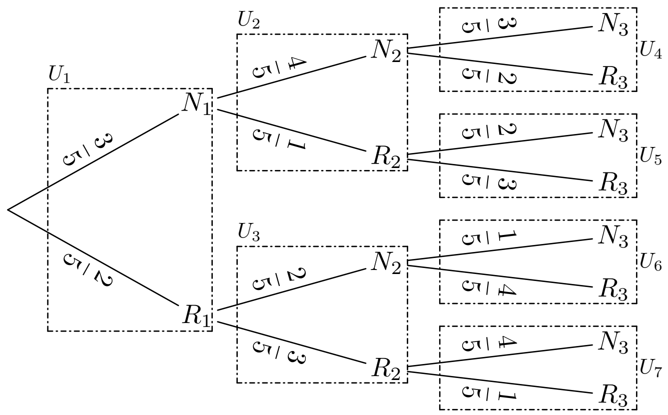
1. Déterminer la probabilité de l'événement C.
2. Établir que les événements A et C sont indépendants?

E.15 On considère trois urnes qui contiennent chacune des boules noires et rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne. Pour tout $i \in \{1;2;3\}$, on considère les évènements suivants :

- N_i : "*on tire une boule noire de l'urne U_i*" ;
- R_i : "*on tire une boule rouge de l'urne U_i*".

On considère l'arbre de probabilité suivant :



1. Déterminer la probabilité de l'évènement N_3.
2. Les évènements N_1 et N_3 sont-ils indépendants?

