Première spécialité / Probabilité et variables aléatoires

ChingEval : 3 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. *Rappels*

E.1 Un tournoi d'échec affronte deux équipes contenant chacune un homme et une femme. Une partie oppose une personne de chaque équipe.

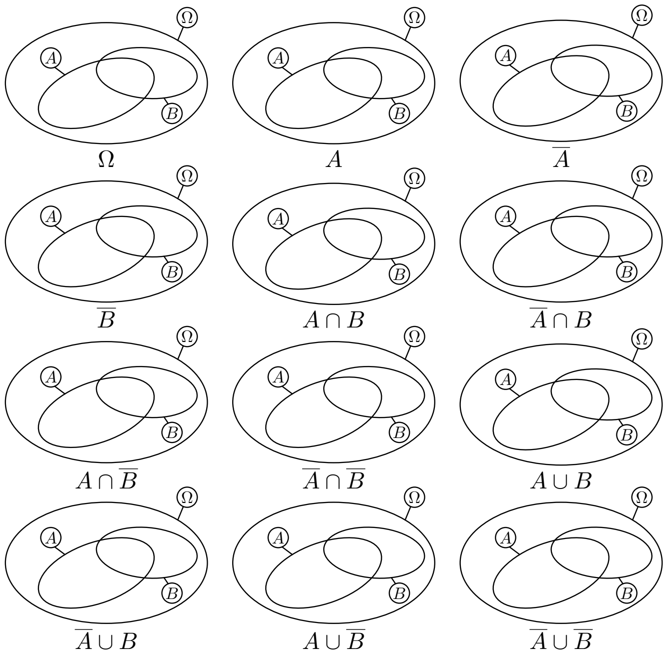
On choisit au hasard une personne de chaque équipe pour s'affronter au cours d'une partie. On considère les trois événements qui "*omposent*" l'univers des possibilités :

- A : "*Deux hommes s'affrontent dans cette partie*"
- B : "*Deux femmes s'affrontent dans cette partie*"
- C : "*Un homme et une femme s'affrontent dans cette partie*"

1. Conjecturer la probabilité de chacun de ces événements.
2. On utilise la notation suivante pour désigner la composition de chaque groupe :
   $\mathcal{G}_1 = \{H_1\,;\,F_1\}$; $\mathcal{G}_2 = \{H_2\,;\,F_2\}$
   a. Décrire toutes les parties organisables lors de ce tournoi.
   b. Donner la probabilité des événements A, B et C.

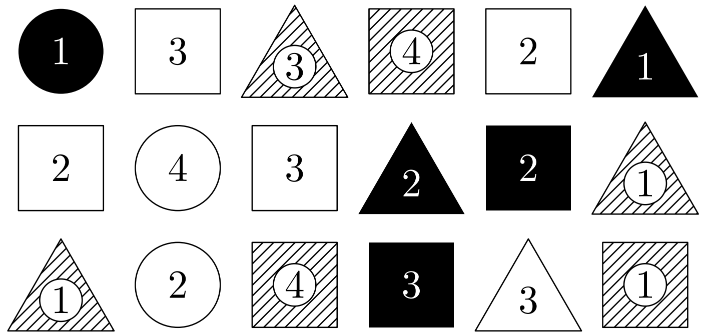
E.2

1. Ci-dessous sont représentés l'univers Ω d'une expérience aléatoire et deux événements A et B de Ω. Pour chacune des représentations ci-dessous, hachurer l'ensemble demandé.



2. Donner, sans justification, une expression simplifiée des ensembles :
   a. $\overline{\overline{A}\cap B}$ b. $\overline{A\cup\overline{B}}$

E.3 Une urne contient 18 pièces de bois de formes, de couleurs et portant des numéros différents.



On tire au hasard un élément de cette urne. On suppose que le tirage s'effectue de manière équiprobable.

On considère les événements suivants :

- A : "*la pièce est un triangle*"
- B : "*la pièce est de couleur blanche*"
- C : "*la pièce porte le numéro* 2"
- D : "*la pièce n'est pas un cercle*"
- E : "*la pièce porte un numéro pair*"

Sans justification, donner la probabilité des événements suivants :

a. $\overline{A}$ b. $A\cap C$ c. $(C\cap B)\cup A$
d. $\overline{A\cap C}$ e. $\overline{A}\cap\overline{D}$ f. $(A\cap E)\cup(C\cap D)$
g. $C\cap\overline{E}$ h. $C\cup D$ i. $\overline{A}\cup\overline{C}$

E.4

On considère un jeu de carte 32 cartes et les trois événements suivants :

♡	♢	♠	♣
As	As	As	As
R	R	R	R
D	D	D	D
V	V	V	V
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7

- A : “*La carte tirée est un coeur*”
- B : “*La carte tirée est une figure*”
- C : “*La carte tirée est un nombre dont la valeur est comprise strictement entre 7 et 10*”

1. On tire une carte au hasard dans le jeu de cartes. Déterminer la probabilité des événements suivants :

   a. A b. B c. C

   d. $A\cap B$ e. $A\cup B$ f. $A\cup C$

2. La carte “*Roi de coeur*” a été retirée du jeu, puis on tire au hasard une carte. Déterminer la probabilité des événements suivants :

   a. A b. B c. C

E.5 On considère une expérience aléatoire comprenant n événements élémentaires. La loi d’équiprobabilité s’applique à cette expérience aléatoire.

Deux événements A et B sont composés respectivement de 432 et 72 événements élémentaires et vérifient les propriétés suivantes :

$$\mathcal{P}(A\cap B)=0{,}25 \quad ; \quad \mathcal{P}(A\cup B)=0{,}5$$

Quel est le nombre d’événements élémentaires composant l’univers Ω :

a. 496 b. 540 c. 643 d. 672

E.6 Après étude d’un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6, on obtient la loi de probabilité suivante :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,2	0,15	0,12	0,17	0,08	0,28

Déterminer les probabilités de chacun des éléments suivants :

1. A : “*Le résultat est supérieur ou égal à 4*”.
2. B : “*Le résultat est un nombre impair*”.
3. C : “*Le résultat est un nombre pair*”.

2. Loi de probabilité d’une variable aléatoire

E.7 On considère une urne contenant 11 boules. Certaines sont rondes, d’autres carrés. Certaines sont blanches, d’autres sont rayés. Elles sont représentées ci-dessous :

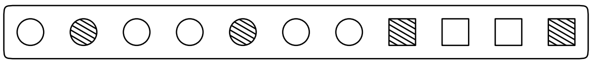
On suppose qu’en appuyant sur un bouton, les boules sortent au hasard de l’urne. On vient de constituer une expérience aléatoire suivant la loi d’équiprobabilité.

On associe un gain à chacune des boules de la manière suivante :

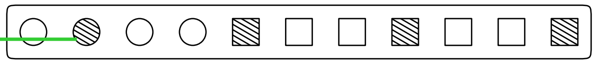
- Une boule rapporte 1 € alors qu’un carré rapporte 2 €.
- De plus, si l’élément est rayé, le gain est augmenté de 1 €.

Cette association d’une valeur à chaque événement élémentaire constitue une variable aléatoire. Notons-la $\mathcal{X}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable $\mathcal{X}$ lorsque le contenu de l’urne est représenté ci-dessous :



2. Déterminer la loi de probabilité de la variable $\mathcal{X}$ lorsque le contenu de l’urne est représenté ci-dessous :



E.8 Une urne contient quatre boules bleues numérotées de 1 à 4, trois boules rouges numérotées de 1 à 3 et deux boules vertes numérotées de 1 à 2.

1. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui associe à chacune des boules le numéro inscrit sur celui-ci.
   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
2. Au tirage d’une boule dans cette urne, on associe les règles de jeu suivantes :
   - Si la boule tirée est bleu et porte un entier pair, le joueur gagne 2 €.
   - Si la boule tirée n’est pas bleu et porte un entier pair, le joueur gagne 3 €.
   - Sinon le joueur ne gagne rien.

   On note $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire qui associe au tirage d’une boule le gain obtenu.

   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{Y}$.

3. Variables aléatoires et fonction de répartition

E.9

On définit l’ensemble $\{\mathcal{X}\leqslant 2\}$ comme l’ensemble des événements élémentaires prenant une valeur inférieure ou égale à 2 : $\{\mathcal{X}\leqslant 2\}=\{\omega\in\Omega \mid \mathcal{X}(\omega)\leqslant 2\}$

Dans le cas Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$, on a : $\{\mathcal{X}\leqslant 2\}=\{\mathcal{X}=0\}\cup\{\mathcal{X}=1\}\cup\{\mathcal{X}=2\}$

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire prenant les valeurs entières de 1 à 6 et dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x_i)$	0,05	0,12	0,15	0,23	0,17	

1. Compléter le tableau de la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.
2. Déterminer les probabilités suivantes :
   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 3)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}>3)$

E.10 Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	0	1	2	3
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x_i)$	0,15	0,24	0,35	0,26

1. Justifier que le tableau ci-dessous représente bien une loi de probabilité.
2. Déterminer les probabilités suivantes :
   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 2)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}<2)$
   c. $\mathcal{P}(\{\mathcal{X}=1\}\cup\{\mathcal{X}=3\})$

E.11 Dans une jeu basée sur une expérience aléatoire, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ mesure le gain réalisé par le participant. Le tableau suivant présente la loi de probabilité de la variable $\mathcal{X}$:

x	0	1	2	3	6
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x)$	0,34	0,3	0,19	0,15	0,02

Déterminer les probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}<3)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 3)$ c. $\mathcal{P}(2\leqslant\mathcal{X}<5)$

E.12

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et on associe à chaque face un gain de la manière suivante :

- la face "6" rapporte 5 €.
- les faces "1" et "3" rapportent 2 €.
- les autres faces portant un numéro pair rapportent 1 €.
- la face "5" ne rapporte rien.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque lancer du dé, associe le gain réalisé.

1. Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$.

   ☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{2}{6}$ ☐ $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{4}{6}$

2. Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}>1)$.

   ☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{2}{6}$ ☐ $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{4}{6}$

E.13 On considère l'expérience aléatoire consistant à un jeté un dé truqué à 6 faces. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui, à chaque lancer, renvoie le numéro de la face obtenue.

Ci-dessous est donnée la loi de distribution cumulative de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,275	0,34	0,51	0,6	0,84	1

1. Déterminer les probabilités suivantes :
   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}>3)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 4)$
2. a. Justifier que : $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)=0{,}065$
   b. Déterminer les probabilités suivantes : $\mathcal{P}(\mathcal{X}=3)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=6)$
3. Déterminer les probabilités suivantes :
   a. $\mathcal{P}(2\leqslant\mathcal{X}\leqslant 5)$ b. $\mathcal{P}(3<\mathcal{X}\leqslant 5)$

4. Espérances

E.14

Définition :
Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire prenant $n+1$ valeurs notées x_0, x_1, …, x_n. On appelle **espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$**, le nombre noté $E(\mathcal{X})$ défini par :

$$E(\mathcal{X})=x_0\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=x_0)+x_1\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=x_1)+\cdots+x_n\times\mathcal{P}(\mathcal{X}=x_n)$$

Cette somme se note aussi : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=x_k)$

Dans un jeu basé sur une expérience aléatoire, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ mesure le gain réalisé par le participant. Le tableau suivant présente la loi de probabilité de la variable $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	3	6
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	0,34	0,3	0,19	0,15	0,02

Déterminer l'espérance de cette variable aléatoire.

Remarque : l'espérance aléatoire correspond à la valeur moyenne prise par la variable aléatoire $\mathcal{X}$ lorsqu'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

E.15 On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	5	10
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	0,4	0,38	0,15	0,05	0,02

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

E.16 Pour entretenir en bon état de fonctionnement le chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été. On sait que 20 % des chaudières sont sous garantie.

On considère les événements suivants :

- A : "*La chaudière est garantie*" ;
- B : "*La chaudière est défectueuse*".

Voici la probabilité de certains éléments :

E	A	$\overline{A}\cap B$	$\overline{A}\cap\overline{B}$
$\mathcal{P}(E)$	0,2	0,08	0,72

Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie. Il coûte 80 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse. Il coûte 280 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière.

Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$ et son espérance mathématique.

E.17 Un jeu consiste à tirer une boule au hasard d'une urne. Le gain du jeu est associé à la couleur de la boule tirée :

- Une boule rouge rapporte 10 €.
- Une boule bleuE rapporte 1 €.
- Une boule verte ne rapporte aucun gain.

1. L'urne A comporte 1 boule rouge, 10 boules bleues et 5 boules vertes.

   On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associée au gain d'une boule tirée dans l'urne A.

   a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

   b. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

2. L'urne B comporte 3 boules rouges, 3 boules bleues et 20 boules vertes.

   On note $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire associée au gain d'une boule tirée dans l'urne B.

   a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{Y}$.

   b. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{Y}$. *(on arrondira la valeur au centième près).*

3. Paul souhaite participer au jeu. Quelle est l'urne la plus avantageuse pour lui?

E.18

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et on associe à chaque face un gain de la manière suivante :

- la face "6" rapporte 5 €.
- la face "1" rapporte 2 €.
- les autres faces portant un numéro pair rapportent 1 €.
- les autres faces ne rapportent rien.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque lancer du dé, associe le gain réalisé.

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

☐ $\frac{9}{6}$ ☐ $\frac{10}{6}$ ☐ $\frac{11}{6}$ ☐ $\frac{12}{6}$

E.19 On considère un jeu de 32 cartes. Un jeu consiste à tirer une carte au hasard parmi ces cartes. On considère les trois événements ci-dessous :

- A : la carte tirée est un coeur ;
- B : la carte tirée est une figure ;
- C : la carte tirée est 7, 8 ou 9.

♡	♢	♠	♣
As	As	As	As
R	R	R	R
D	D	D	D
V	V	V	V
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7

On associe un gain à la carte tirée de la manière suivante :

- les cartes de $A\cap C$ rapporte 1 point ;
- les cartes de $\overline{A}\cap B$ rapporte 2 points ;
- les cartes de $A\cap B$ rapporte 4 points.
- les autres cartes ne rapportent pas de points.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui associe à une carte le nombre de points gagnés.

Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

5. *Variances*

E.20

Définition : on considère $(\Omega;\mathcal{P})$ une expérience aléatoire et $\mathcal{X}$ une variable aléatoire sur Ω prenant les valeurs k_1, k_2, …, k_n.

- On appelle **variance de $\mathcal{X}$** le nombre, noté $V(\mathcal{X})$ définit par : $V(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^{n} \big[k_i - E(\mathcal{X})\big]\times\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}k_i)$
- On appelle **écart-type de $\mathcal{X}$** le nombre, noté $\sigma(\mathcal{X})$ définit par : $\sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{V(\mathcal{X})}$

On considère une expérience aléatoire à laquelle est associée une variable aléatoire $\mathcal{X}$ dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

k	-2	1	3	5	8
$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}k)$	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

1. Montrer que : $E(\mathcal{X})=3$.
2. a. Compléter le tableau ci-dessous :

k	-2	1	3	5	8
$k-E(\mathcal{X})$					
$\big[k-E(\mathcal{X})\big]^2$					
$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}k)$					

   b. En déduire la valeur de la variance.

E.21 En fin d'année l'association des élèves d'un lycée organise une tombola : 100 tickets sont mis en vente à 10 euros l'unité.

Voici les différents tickets gagnants :

- 2 tickets gagnent 50 € ;
- 10 tickets gagnent 20 € ;
- 20 tickets gagnent 10 €.

1. Quelle est la somme des gains de cette tombola?

On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un ticket au hasard et la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui à chaque ticket associe sa valeur.

2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

3. a. Déterminer l'espérance $E(\mathcal{X})$ de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

   b. Déterminer la variance $V(\mathcal{X})$ et l'écart type $\sigma(\mathcal{X})$ de la variable aléatoire $\mathcal{X}$. *(on arrondira les valeurs au dixième près).*

Remarque : on pourra compléter le tableau ci-dessous pour déterminer la variance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

k	0	10	20	50
$k-E(\mathcal{X})$				
$\left[k-E(\mathcal{X})\right]^2$				
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$				

E.22 Dans un espace probabilisé $(\Omega\,;\mathcal{P})$, on considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{0\,;3\,;4\}$. On a les informations suivantes :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=0) = x \quad ; \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}=3) = 2x \quad ; \quad \mathcal{V}(\mathcal{X}) = 2$$

où x est un nombre appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$.

Déterminer les valeurs possibles de x réalisant ces conditions.

E.23 On considère une expérience aléatoire à laquelle est associée une variable aléatoire $\mathcal{X}$ dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

k	0	3	6
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	0,2	0,5	0,3

1. Montrer que : $E(\mathcal{X})=3{,}3$.

2. a. Compléter le tableau ci-dessous :

k	0	3	6
$k-E(\mathcal{X})$			
$\left[k-E(\mathcal{X})\right]^2$			
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$			

   b. En déduire la valeur de la variance et de l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

6. *Variances et calculatrices*

E.24 Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessus :

x_i	0	1	2	3
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x_i)$	0,15	0,24	0,35	0,26

1. Justifier que le tableau ci-dessous représente bien une loi de probabilité.

2. Déterminer les probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 2)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}<2)$ c. $\mathcal{P}(\{\mathcal{X}=1\}\cup\{\mathcal{X}=3\})$

3. Donner, à l'aide de la calculatrice et arrondi au millième, l'espérance et l'écart-type de la variable $\mathcal{X}$.

7. *Successions indépendantes d'expériences aléatoires*

E.25 ***L'exercice n'existe pas.***

E.26 Un magasin de sport propose à la location des skis de piste, des snowboards et des skis de randonnée.

Son matériel loué est constitué de 60 % de skis de piste, le reste étant également réparti entre les snowboards et les skis de randonnées.

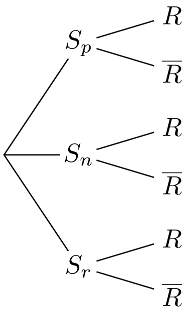
Après la journée de location, le matériel est contrôlé et éventuellement réparé. Indépendamment du type de matériel loué, 30 % du matériel nécessite une réparation.

Chaque paire de ski et chaque snowboard sont répertoriés sur une fiche qui précise son suivi. On tire au hasard une fiche. On considère les événements suivants :

- S_p : "*La fiche est celle d'une paire de skis de piste*" ;
- S_n : "*La fiche est celle d'un snowboard*" ;
- S_r : "*La fiche est celle d'une paire de skis de randonnée*" ;
- R : "*Le matériel nécessite une réparation*" ; $\overline{R}$ est son événement contraire.

Tous les résultats des quatre premières questions seront arrondies à 10^{-3}.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre :



2. a. Calculer la probabilité que la fiche tirée concerne une paire de skis de piste ne nécessitant pas une réparation.

   b. Calculer $\mathcal{P}\left(S_p \cup \overline{R}\right)$: la probabilité que la fiche tirée concerne une paire de skis de piste ou un matériel ne nécessitant pas une réparation.

3. Le coût de la location de skis de piste ou d'un snowboard est de 20 €, celui d'une paire de skis de randonnée est de 15 €.
   En cas de réparation, un surcoût de 15 € est facturé.

   On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à une fiche le montant de la facturation associée.

   a. Dresser un tableau représentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

   b. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

E.27 Cinq garçons et trois filles participent écrivent leur nom sur un bout de papier et l'insère dans une urne.

On extrait, successivement et avec remise, deux bouts de papier de l'urne. On considère que les deux tirages sont indépendants.

1. À chaque tirage, on regarde si le papier tiré désigne un garçon ou une fille. Construire l'arbre de probabilité lié à cette expérience.

2. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associant à une issue de ce tirage le nombre de filles sélectionnées.

   a. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

   b. Calculer son espérance mathématique de $E(\mathcal{X})$.

E.28 Un producteur de fruits rouges propose en vente directe des framboises, des groseilles et des myrtilles.

Le client peut acheter, soit des barquettes de fruits à déguster, soit des barquettes de fruits à confiture.

Le producteur a remarqué que, parmi ses clients, 9 sur 10 achètent une barquette de fruits à confiture.

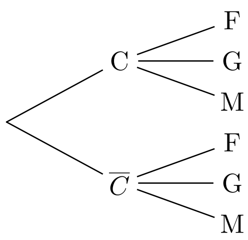
Quel que soit le type de barquette achetée, le client choisi à 50 % des cas la myrtille pour fruit, 30 % des framboises dans les autres cas, c'est la groseille qui est choisie.

On notera :

- C l'événement "*le client achète une barquette de fruits à confiture*" ;
- F l'événement "*le client demande des framboises*" ;
- G l'événement "*le client demande des groseilles*" ;
- M l'événement "*le client demande des myrtilles*" ;

On suppose que le fruit choisit ne dépend pas du type de barquette acheté et que chaque client n'achète qu'une barquette.

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



2. Déterminer la probabilité de $\overline{C} \cap F$.

3. Le producteur fixe les prix de ses barquettes de la manière suivante :

   - Le prix de base d'une barquette de fruits à confiture est vendue 5 euros et celui d'une barquette de fruits à déguster est 3 euros ;
   - Si la barquette choisit contient des framboises, il ajoute 1 euro au prix de la barquette ;
   - Si la barquette choisit contient des myrtilles, il ajoute 2 euros au prix de la barquette ;
   - Si la barquette choisit contient des groseilles, le prix de base reste inchangé.

   On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associant à chaque client le prix de la barquette acheté.

   a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $\mathcal{X}$?

   b. Dresser le tableau représentant la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

   c. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

8. *Probabilité conditionnelle*

E.29 Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note les événements :
- M : "*l'animal est porteur de la maladie*" ;
- T : "*le test est positif*".

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
   a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
   b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ? On arrondira la probabilité au millième près.
4. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

   D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

   a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
   b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

E.30 ***L'exercice n'existe pas.***

E.31 Amélie doit traverser la rue principale d'un village qui est jalonnée de deux feux tricolores.

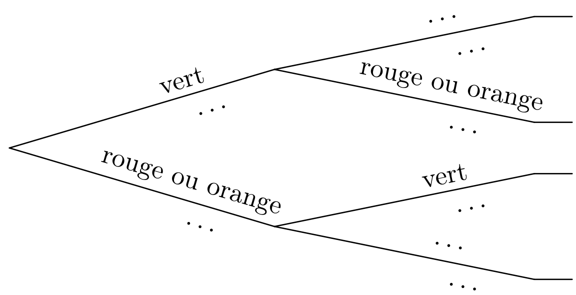
Pour $n\in\{1\,;2\}$, on note E_n l'événement "*Amélie est arrétée par le n^e feu rouge ou orange*" et $\overline{E_n}$ l'événement contraire. Le feu orange est considéré comme un feu rouge.

Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{E_n}$. La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $\dfrac{1}{8}$

On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :
- La probabilité que le second feu tricolore soit rouge ou orange, si le premier feu est rouge, vaut $\dfrac{1}{20}$.
- La probabilité que le second feu tricolore soit rouge ou orange, si le premier feu est vert, est égale à $\dfrac{9}{20}$.

On s'intéresse, tout d'abord, aux premiers feux tricolores.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de feux verts parmi ces deux feux tricolores. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

E.32 Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

1. Démontrer que : $\mathcal{P}(\mathcal{X}=-1)=\dfrac{20\cdot n}{(n+10)(n+9)}$
2. Calculer, en fonction de n la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable $\mathcal{X}$.
3. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ vaut :
$$E(\mathcal{X})=\frac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}$$
4. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

E.33 Le parc d'attraction "Six drapeaux" près de la ville de Los Humanos possèdent deux parkings : un parking près de l'entrée principale à 15 € la journée et le second parking à 10 €. Les habitons de Los Humanos disposent d'une réduction de 5 € sur le prix du parking.

Cette société étudie les recettes générées par ces parkings et en choisissant au hasard un client de ce parc d'attraction, on note les évènements L et P définis par :

- L : le client est un habitant de Los Humanos.
- P : le client à choisi le parking proche de la porte d'entrée.

Cette société nous transmet les informations suivantes :

- 30 % des clients sont des habitants de Los Humanos
- 60 % des habitants de Los Humanos choisissent le parking proche de la porte d'entrée.
- 60 % des clients n'habitant pas à Los Humanos choisissent le parking excentré.

Partie A

1. Construire l'arbre de probabilités modélisant cette étude.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement P.
3. Sachant qu'un client a choisi d'utiliser le parking proche de la porte d'entrée, quelle est la probabilité que ce client habite Los Humanos?

Partie B

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à chaque client le prix payé pour le parking.

4. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
5. À l'aide de la calculatrice, donner l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

9. *Problèmes*

E.34 Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.
Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois :

- S'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A ;
- Sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'événement "*le joueur obtient une boule rouge*". Montrer que $\mathcal{P}(R)=0{,}15$
2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes *(c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve les urnes retrouvent leur composition initiale)*.

Soit x un entier naturel non nul.

Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.

On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs $2x$, $x-2$ et -4.

3. Déterminer la loi de probabilité de G.
4. Exprimer l'espérance $E(G)$ de la variable aléatoire G en fonction de x.
5. Pour quelles valeurs de x a-t-on $E(G)\geqslant 0$

