Première spécialité / Second degré : fonctions, variations, inéquations

ChingEval : 8 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. *Rappels*

E.1 Compléter les tableaux de signe ci-dessous :

1

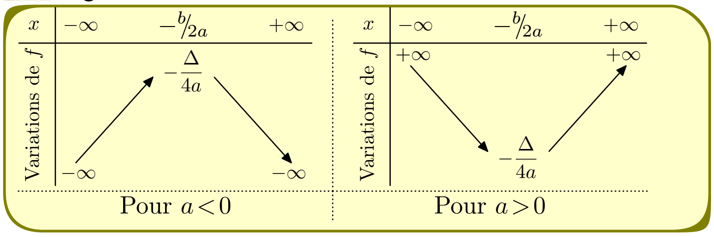
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$1-x$	
$2x+1$	
$(1-x)(2x+1)$	

2

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$x-3$	
$-2x+4$	
$(x-3)(-2x+4)$	

2. *Tableau de variations*

E.2



Dresser le tableau de variations des fonctions polynomiales du second degré ci-dessous :

a $f(x) = 3{\cdot}x^2 - 3{\cdot}x + 2$ $\qquad$ b $g(x) = -x^2 - 2{\cdot}x + 3$

E.3 Pour chacune des fonctions, dresser le tableau de variations et donner les caractéristiques de leur extremum :

1 $f(x) = -3x^2 + 9x - 2$ $\qquad$ 2 $g(x) = 3x^2 + 2x + 2$

E.4 Pour chacune des fonctions, dresser le tableau de variations et donner les caractéristiques de leur extremum :

1 $f : x \longmapsto \frac{1}{6}{\cdot}x^2 + \frac{1}{4}x + 1$ $\qquad$ 2 $g : x \longmapsto -x^2 + 2\sqrt{3}x - 1$

3. *Tableau de variations et racines*

E.5 Soit h la fonction définie par la relation : $h(x) = 4x^2 + 2x + 1$

1 Dresser le tableau de variations de la fonction h.

2 Justifier que la fonction h ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

E.6 Soit f la fonction définie par la relation : $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

1 Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2 Justifier que la fonction f s'annule en deux valeurs.

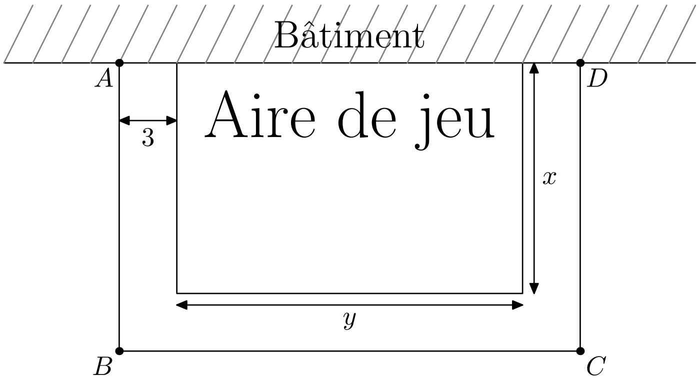
E.7 Soit g la fonction définie par la relation : $g(x) = -4x^2 + 4x - 1$

1 Dresser le tableau de variations de la fonction g.

2 Justifier que la fonction g s'annule en une unique valeur qu'on précisera.

4. *Problèmes et extrémums*

E.8 On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire. De plus, on souhaite que les dimensions de ce rectangle soient supérieures ou égales à $10\,m$. Cet espace de jeu est entouré sur trois côtés d'une allée de $3\,m$ de large comme l'indique le croquis ci-dessous.



L'ensemble est clôturé sur les trois côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.
On s'intéresse à la longueur $\mathscr{L}$ de la clôture :

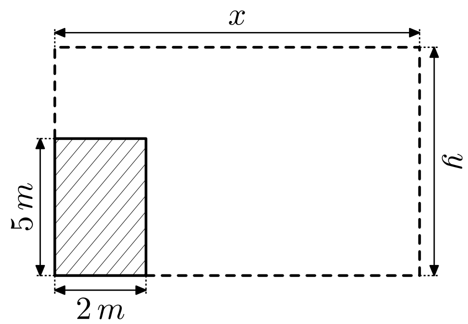
$\mathscr{L} = AB + BC + CD$.

On note x et y les dimensions en mètres de l'aire de jeu *(la valeur de x et de y sont nécessairement positifs)*.

On dispose de 100 mètres de clôture qu'on souhaite entièrement utilisé :

1. a. Exprimer, dans ces conditions, la valeur de y en fonction de x.
   b. Justifier que la valeur de x doit être inférieure à 44.
2. Déterminer les dimensions afin que les 100 mètres de clôtures soient utilisés et que l'aire de jeu soit maximale.

E.9 Dans son champ, un agriculteur possède un poulailler de forme rectangulaire et de dimensions $5\,m$ et $2\,m$. Il souhaite construire un enclos comme l'indique la figure ci-dessous avec $17\,m$ de clôture :



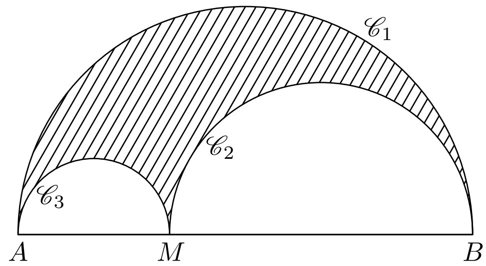
Les nombres x et y représentent les dimensions de ce champ.

Le poulailler est représenté par la partie hachurée, la clôture est représentée en pointillés et la partie extérieure dédiée aux poules est représentée par la partie blanche.

On note $\mathcal{A}$ l'aire de la partie extérieure.

1. Établir la relation suivante entre x et y :
   $x + y = 12$
2. Démontrer que l'aire de l'espace extérieur a pour expression : $\mathcal{A}(x) = -x^2 + 12\cdot x - 10$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer les valeurs de x et de y pour que l'aire de l'espace extérieur réservé aux poules soient maximale.

E.10 La figure ci-dessous est composée du segment $[AB]$ mesurant $6\,cm$ et d'un point M appartement au segment $[AB]$.
Le demi-cercle $\mathscr{C}_1$ *(resp.* $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$*)* admet le segment $[AB]$ *(resp.* $[MB]$, $[AM]$*)* pour diamètre.



On note x la longueur du segment $[AM]$. Déterminer pour quelle*(s)* valeur*(s)* de x l'aire du domaine hachurée est maximale.

5. *Forme canonique et factorisation*

E.11 On considère le polynôme du second degré :

$P = x^2 - 6x - 16$

1. Déterminer la forme canonique du polynôme P.
2. En déduire la factorisation : $P = \big(x-8\big)\big(x+2\big)$
3. En déduire que le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		-8		$+\infty$
$x^2-6x-16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

E.12 On considère le polynôme du second degré :

$P = -2x^2 - 13x - 15$

1. Déterminer la forme canonique du polynôme P.
2. En déduire la factorisation : $P = \big(-2x-3\big)\big(x+5\big)$
3. En déduire que le tableau de signes du polynôme P

E.13 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x)=2\cdot x^2-16\cdot x+30$

1. Établir que la fonction f admet pour forme canonique :
$f(x)=2\cdot\left[\left(x-4\right)^2-1\right]$
2. En déduire l'expression de la fonction f, puis factoriser sous la forme de deux facteurs de degré 1.

Indication : la fonction f admet une factorisation de la forme : $f(x)=2\cdot(a\cdot x+b)(c\cdot x+d)$ où $a, b, c, d\in\mathbb{R}$

3. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

E.14 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x)=6x^2-9x-6$

1. Montrer que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire :
$$f(x)=6\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]$$
2. En remarquant que $\frac{25}{16}=\left(\frac{5}{4}\right)^2$, factoriser l'expression de la fonction f sous la forme de deux facteurs de degré 1.
3. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

6. *Introduction : racines, factorisation et signes*

E.15 On considère le polynôme : $P=3\cdot x^2+3\cdot x-18$

1. Déterminer les racines du polynôme P.

On note x_1 et x_2 les deux racines du polynôme P.

2. a. Développer l'expression $(x-x_1)(x-x_2)$.
   b. En déduire une factorisation du polynôme P.
   c. Dresser le tableau de signe de l'expression P sur $\mathbb{R}$.

E.16 On considère le polynôme : $P=-9\cdot x^2+6\cdot x+15$

1. Déterminer les racines du polynôme P.

On note x_1 et x_2 les deux racines du polynôme P.

2. a. Développer l'expression $(x-x_1)(x-x_2)$.
   b. En déduire une factorisation du polynôme P.
   c. Dresser le tableau de signe de l'expression P sur $\mathbb{R}$.

E.17 On considère le polynôme : $P=-2\cdot x^2-8\cdot x+16$

1. Déterminer les racines du polynôme P.

Indication : on donnera ces racines sous la forme "$a+b\cdot\sqrt{c}$" où $a,b,c\in\mathbb{Z}$

On note x_1 et x_2 les deux racines du polynôme P.

2. a. Développer l'expression $(x-x_1)(x-x_2)$.
   b. En déduire une factorisation du polynôme P.
   c. Dresser le tableau de signe de l'expression P sur $\mathbb{R}$.

7. *Factorisations*

E.18 Donner la forme factorisée des expressions suivantes :

a. $3\cdot x^2-3\cdot x-6$ b. $2\cdot x^2+12\cdot x+18$

E.19 Factoriser, si possible, les polynômes du second degré ci-dessous :

a. x^2+2x+1 b. $3x^2-4x+2$ c. $-3x^2+4x-1$

Indication : présenter les résultats sous la forme :
$(a\cdot x+b)(c\cdot x+d)$ ou $(a\cdot x+b)^2$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$

E.20 Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

a. $8x^2-24x+18$ b. $3x^2+x+1$ c. $-4x^2+x+3$

Indication : présenter les résultats sous la forme :
$(a\cdot x+b)(c\cdot x+d)$ ou $(a\cdot x+b)^2$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$

E.21

1. Factoriser l'expression : $-2\cdot x^2-3\cdot x+5$.
2. Pour chaque proposition, une seule réponse est correcte. Cochez la case correspondante.

Indication : on utilisera le résultat de la question 1

a. La forme de factorisée de $-x^2-\frac{3}{2}\cdot x+\frac{5}{2}$ est :
- ☐ $(x+5)(1-x)$
- ☐ $\left(x+\frac{5}{2}\right)(1-x)$
- ☐ $(x+5)\left(1-\frac{1}{2}\cdot x\right)$
- ☐ $\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)$

b. La forme de factorisée de $-2\cdot x^2-3\cdot x+5+(1-x)$ est :
- ☐ $(2\cdot x+5)(1-x)$
- ☐ $(2\cdot x+5)\cdot x$
- ☐ $(2\cdot x+6)(1-x)$
- ☐ $(2\cdot x+6)(2-x)$

c. La forme de factorisée de $-2\cdot(x+1)^2-3\cdot(x+1)+5$ est :
- ☐ $(2\cdot x+6)(1-x)$
- ☐ $(2\cdot x+6)(2-x)$
- ☐ $-(2\cdot x+7)\cdot x$
- ☐ $(2\cdot x+7)(2-x)$

E.22 Factoriser les expressions suivantes :

(a) $2x^2 - 6x + 2$

Indication : on simplifiera au maximum l'expression factorisée de ces polynômes, notamment en portant un soin sur l'expression de leurs racines.

E.23 Factoriser, si possible, chacun des polynômes ci-dessous :

(a) $3x^2 - 12x + 12$ (b) $-5x^2 + 2x - 1$ (c) $6x^2 + x - 15$

E.24 Factoriser l'expression : $A = 12x^2 + 12x - 3$

Indication : on factorise l'expression sous la forme :
$A = (2x+\alpha)(6x+\beta)$
où α et β sont deux nombres réels.

8. *Factorisations (degré 3)*

E.25 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = x^3 - 7{\cdot}x - 6$

(1) Vérifier que le nombre 3 est un zéro de la fonction f.

Le polynôme $x^3-7{\cdot}x-6$ admet le nombre 3 pour racine. Il admet donc une factorisation de la forme :
$x^3-7{\cdot}x-6=(x-3)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c)$ où $a,b,c\in\mathbb{R}$

(2) (a) Pour a, b, c des nombres réels, vérifier l'identité suivante :
$(x-3)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c) = a{\cdot}x^3+(b-3a){\cdot}x^2+(c-3b){\cdot}x-3c$

(b) Déterminer les valeurs de a et b vérifiant :
$a=1$; $b-3a=0$; $c-3b=-7$; $-3c=-6$

(c) En déduire la forme factorisée de la fonction f en facteurs de degré 1.

E.26 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression est : $f(x)=2{\cdot}x^3-7{\cdot}x^2+4{\cdot}x+3$

(1) Déterminer les nombres réels a, b, c réalisant l'égalité :
$f(x) = (2{\cdot}x-3)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c)$

(2) En déduire la forme factorisée de la fonction f en produit de facteurs de degré 1.

9. *Tableau de signes*

E.27 Établir le tableau de signes des expressions suivantes :

(a) $3x^2+4x-4$ (b) $-4x^2+2x+6$

E.28 Dresser le tableau de signes de chacune des expressions ci-dessous :

(a) $2{\cdot}x^2+9{\cdot}x+10$ (b) $12x^2-31x+20$ (c) $-5x^2-3x-1$

E.29 Établir le tableau de signes des expressions suivantes :

(a) $2x^2+11x+5$

E.30 Dresser, sur $\mathbb{R}$, le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

(a) $f(x) = 5x^2 - 4x + 1$ (b) $g(x) = -3x^2 + 7x + 20$

10. *Tableau de signes et inéquation*

E.31 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $x^2-x-2<0$ (b) $-9x^2+12x-4\leqslant 0$

E.32 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $-4x^2+2x+2\geqslant 0$ (b) $3{\cdot}x^2+x+1<0$

E.33 Résoudre les inéquations :

(a) $6{\cdot}x^2 + x - 1 \geqslant 0$ (b) $-x^2 + x - 3 > 0$

E.34 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $-10x^2 - 13x + 3 \geqslant 0$ (b) $(3x+1)(x^2+x+1) < 0$

E.35 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $x^2-3x+2>0$ (b) $5x^2+4x-1<0$

11. *Tableau de signe et inéquation (degré 3)*

E.36 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = x^3 - 4{\cdot}x^2 - 4{\cdot}x + 16$

(1) Vérifier que le nombre 2 est un zéro de la fonction f.

Le polynôme $x^3-4{\cdot}x^2-4{\cdot}x+16$ admet le nombre 2 pour racine. Il admet donc une factorisation de la forme :
$$x^3-4{\cdot}x^2-4{\cdot}x+16=(x-2)\big(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c\big) \quad \text{où } a,b,c\in\mathbb{R}$$

(2) (a) Pour a, b, c des nombres réels, vérifier l'identité suivante :
$$(x-2)\big(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c\big) = a{\cdot}x^3+(b-2a){\cdot}x^2+(c-2b){\cdot}x-2c$$

(b) Déterminer les valeurs de a et b vérifiant :
$$a=1 \quad ; \quad b-2a=-4 \quad ; \quad c-2b=-4 \quad ; \quad -2c=16$$
Proposer une forme factorisée de la fonction f.

(c) Établir le tableau de signes de la fonction f.

E.37 On considère le polynôme $\mathcal{P}$ admettant pour expression :
$$\mathcal{P}=2{\cdot}x^3+7{\cdot}x^2-7{\cdot}x-12$$

(1) Établir la factorisation suivante où b est un nombre réel à déterminer :
$$\mathcal{P}=(x+1){\cdot}(2{\cdot}x^2+b{\cdot}x-12)$$

(2) En déduire le tableau de signes du polynôme $\mathcal{P}$.

E.38 On considère le polynôme du troisième degré :
$$\mathcal{P}=3x^3+5x^2-5x+1$$
On sait que le polynôme P admet une factorisation de la forme :
$$\mathcal{P}=(3x-1)\big(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c\big)$$

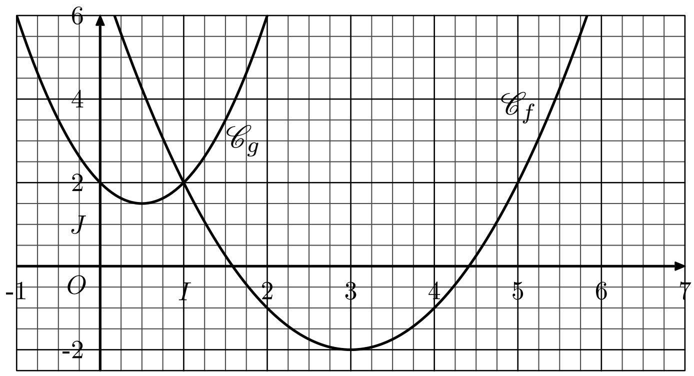
(1) Déterminer les valeurs de a, b, c vérifiant cette factorisation.

(2) En déduire l'ensemble des racines du polynôme $\mathcal{P}$.

(3) Dresser le tableau de signes de $\mathcal{P}$.

12. *Positions relatives de courbes*

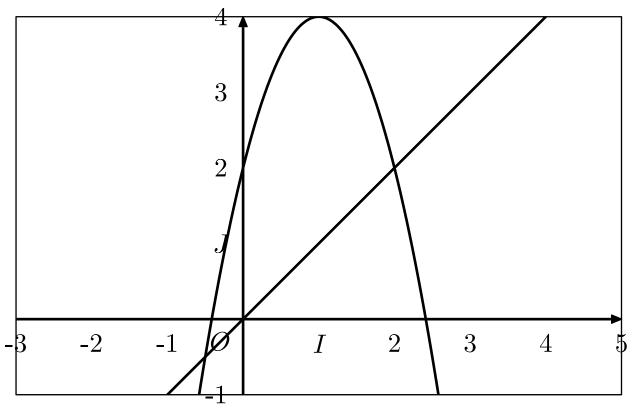
E.39 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=x^2-6{\cdot}x+7 \quad ; \quad g(x)=2{\cdot}x^2-2{\cdot}x+2$$
Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$, on donne les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement des fonctions f et g.



Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

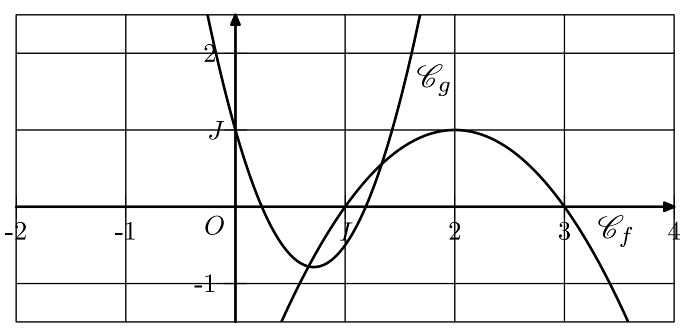
E.40 On considère la fonction f dont l'image de tout nombre réel x est définie par la relation : $f(x)=-2x^2+4x+2$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f et la droite (Δ) première bissectrice du plan admettant pour équation $y=x$.



Algébriquement, étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (Δ).

E.41 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g définies par :
$$f(x)=-x^2+4{\cdot}x-3 \quad ; \quad g(x)=\frac{7}{2}{\cdot}x^2-5x+1$$



Déterminer la position relative de ces deux courbes.

13. Positions relatives de courbes (degré 3)

E.42 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ par les relations :

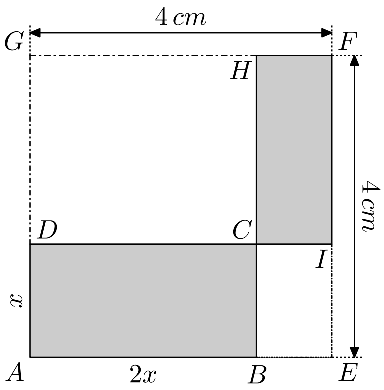
$$f(x) = \frac{5}{4x^2+1} \quad ; \quad g(x) = -x+2$$

Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement des fonctions f et g.

14. Problèmes et inéquations

E.43 On considère la figure ci-dessous composée :

- du carré $AEFG$,
- de deux rectangles $ABCD$ et $CIFH$.



Les points B, D, I, H appartiennent aux côtés du carré $AEFG$.

On considère le domaine grisé représenté ci-contre et on note son aire $\mathcal{A}$:

(les mesures sont exprimées en centimètre)

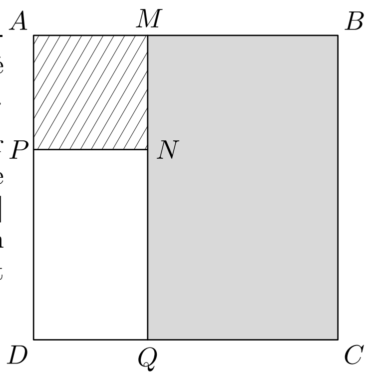
Déterminer l'ensemble des valeurs de x réalisant l'inéquation :

$$\mathcal{A} \geqslant \frac{37}{4}$$

Toute trace de recherche ou de prise d'initiative sera prise en compte dans l'évaluation.

E.44

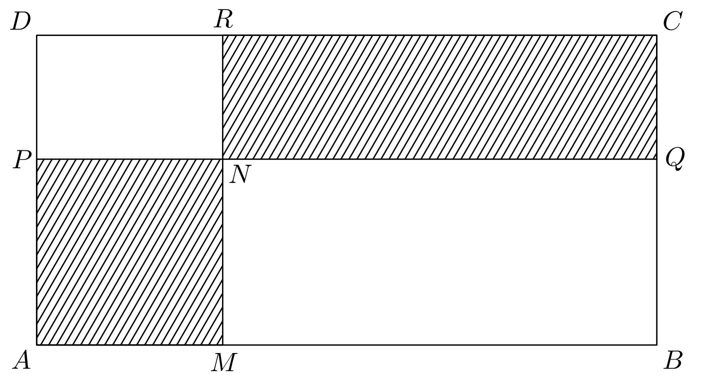
On considère la figure ci-contre où $ABCD$ est un carré dont les côtés mesurent $5\,cm$.



On considère un point M sur le segment $[AB]$ et on place le point P sur le segment $[AD]$ et les points N et Q afin que $AMNP$ soit un carré et $BCQM$ est un rectangle.

On note x la mesure du segment $[AM]$. Déterminer l'ensemble des valeurs de x afin que l'aire du carré $AMNP$ soit strictement supérieure à l'aire du rectangle $BCQM$.

E.45 On considère la configuration ci-dessous où :



où :

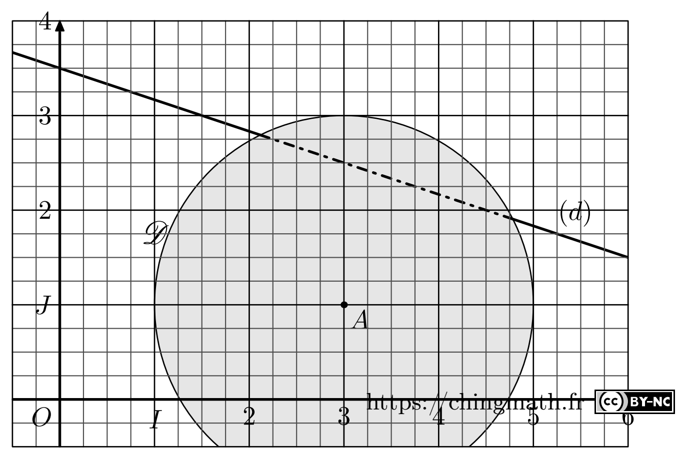
- les quadrilatères $ABCD$ et $CRNQ$ sont des rectangles et $AMNP$ est un carré
- les points M, Q, R, P appartiennent respectivement aux segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$
- $AB = 10\,cm$ et $AD = 5\,cm$.

On note x la longueur du segment $[AM]$ et on note $\mathcal{A}$ l'aire de la partie non hachurée de cette figure :

1. Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ s'exprime en fonction de x par :
   $\mathcal{A} = -2{\cdot}x^2 + 15{\cdot}x$
2. a. Résoudre l'équation $\mathcal{A} = 27$
   b. Déterminer les positions du point M pour que la surface non hachurée ait une aire supérieure ou égale à $27\,cm^2$.
3. De même, on déterminera les positions du point M pour que la surface non hachurée ait une aire supérieure ou égale à $18\,cm^2$.

15. Problèmes, inéquations et racines carrées

E.46 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère le disque $\mathscr{D}$ de centre $A(3\,;1)$ et de rayon 2 et la droite (d) passant par les points $B(0\,;3{,}5)$ et $C(1{,}5\,;3)$:



Déterminer l'ensemble des abscisses des points de la droite (d) inclus dans le disque $\mathscr{D}$.

Indication : on s'intéressera à l'ensemble des points M de la droite (d) tels que $AM^2 \leqslant 4$

16. *Fractions rationnelles et simplifications*

E.47 On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^2-6\cdot x-7$

1. Déterminer la forme factorisée de la fonction f.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\,;7\}$ par :
$$g(x) = \frac{x^2-6\cdot x-7}{(x-3)(x-7)}.$$
   a. Simplifier l'expression de la fonction g.
   b. Dresser le tableau de signes de la fonction g.

E.48 Simplifier la fraction rationnelle suivante :
$$\frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$$

E.49 Simplifier l'expression des fractions rationnelles ci-dessous :

a. $\dfrac{3x-1}{3x^2+2x-1}$ b. $\dfrac{6x^2-5x+1}{1-4x^2}$

17. *Tableau de variations et tableau de signes*

E.50 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ définies par les relations :
$$f(x) = x^2+x+1 \quad ; \quad g(x) = -2x^2-3x+5$$

1. Dresser le tableau de variations de chacune de ces fonctions.
2. Établir le tableau de signes de chacune de ces fonctions.

E.51 Déterminer le tableau de signes des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$:

a. $2x^2-3x-2$ b. $(2x+1)(3x^2-2x-1)$

18. *Partage*

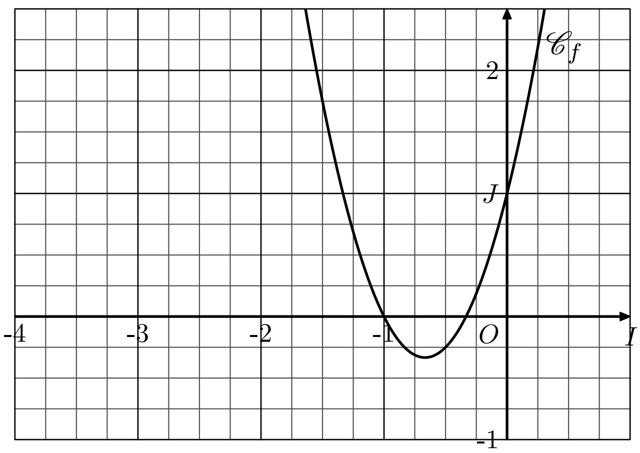
E.52 On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y=x^2-x-10$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=2x-1$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.
2. Donner les valeurs de x pour lesquelles le point $\mathcal{P}$ ayant pour abscisse x se trouve au-dessus du point de $\mathcal{D}$ ayant même abscisse.

19. *Exercices non-classés*

E.53 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x) = 3\cdot x^2+4\cdot x+1$$

Ci-dessous, est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :

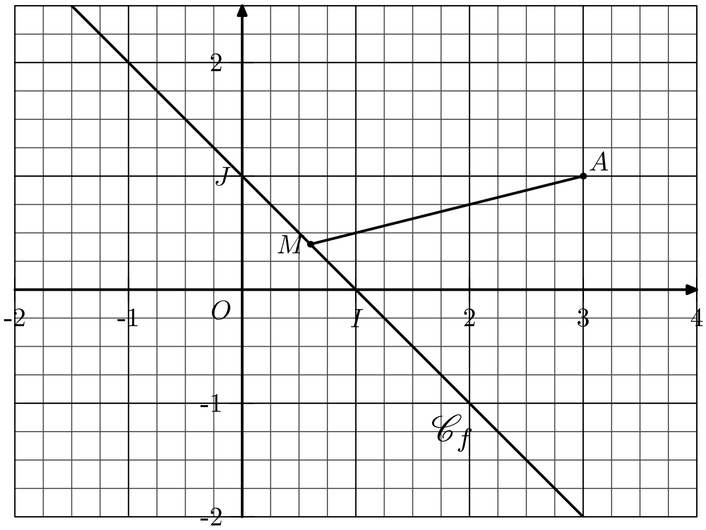


1. On considère la droite (d) passant par les points $A(-3\,;2)$ et $B(-2\,;1)$.
   a. Tracer la droite (d) dans le repère ci-dessous.
   b. Déterminer l'équation réduite de la droite (d).
2. Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (d).

E.54 On considère la fonction f définie par la relation :

$f(x) = -x + 1$

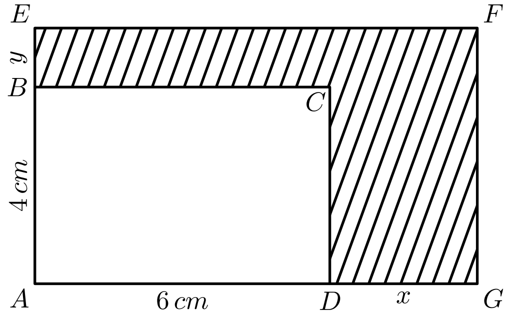
La représentation graphique est donnée ci-dessous :



On considère le point A de coordonnée $(3\,;1)$ et M un point de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Déterminer la position du point M sur $\mathscr{C}_f$ afin que la longueur AM soit minimale.

E.55 Soit $ABCD$ un rectangle de dimension $6\,cm$ et $4\,cm$. On considère les points E et G, situés hors du rectangle $ABCD$, appartenant respectivement aux demi-droites $[AB)$ et $[AD)$ et le point F tels que le quadrilatère $AGFE$ est un rectangle.



On note x et y les deux distances suivantes :

$x = DG \quad ; \quad y = BE$

On impose aux points E et G de former un rectangle $AEFG$ dont le périmètre est de $28\,cm$.

1. a. Montrer que la longueur y s'exprime en fonction de x par : $y = 4 - x$
   b. En déduire les valeurs possibles de x.

On note $\mathcal{A}$ l'aire de la partie hachurée *(celle du polygone $BEFGDC$)*.

2. Établir que l'aire de la partie hachurée s'écrit en fonction de x est obtenue par l'égalité :
   $\mathcal{A}(x) = -x^2 + 2x + 24$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur $\big[0\,;4\big]$. *(on indiquera la valeur de l'extrémum local).*
4. Donner la valeur de l'aire maximale de la partie hachurée? Pour quelles valeurs de x est-elle atteinte?

