# *Première spécialité / Trigonométrie*

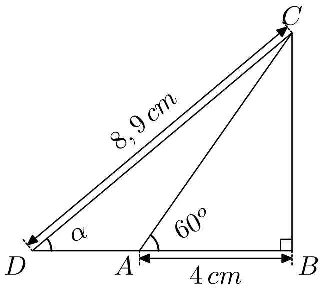
**ChingEval** : 1 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

## 1. *Rappels*

**E.1**

On considère le triangle $ABC$ rectangle en $B$ représenté ci-dessous :

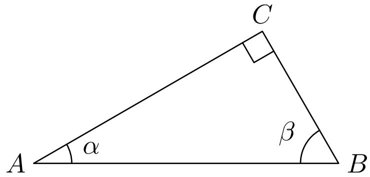
1. Déterminer la longueur du segment $[BC]$ arrondie au millimètre près.
2. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{CDB}$ arrondie au degré près.




**E.2**

On considère un triangle $ABC$ rectangle en $C$. On note :

$\alpha = \widehat{CAB}$ ; $\beta = \widehat{ABC}$




1. Justifier que les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CBA}$ sont deux angles complémentaires.
2. a. À l'aide des longueurs des côtés du triangle $ABC$, exprimer les valeurs de $\cos\alpha$ et $\sin\beta$.

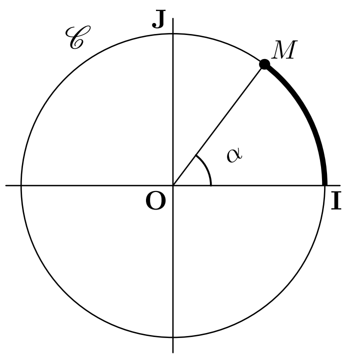
   b. En déduire l'égalité : $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
3. a. A l'aide des longueurs des côtés du triangle $ABC$, exprimer les valeurs de $\tan\alpha$ et $\tan\beta$

   b. En déduire l'égalité : $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha}$
4. Établir l'égalité : $\left(\cos\alpha\right)^2 + \left(\sin\alpha\right)^2 = 1$

## 2. *Radians*

**E.3**

Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère un cercle de centre $O$ et de rayon 1 *(ce cercle passe par les points $I$ et $J$)*.
Un point $M$ du cercle est repéré par la mesure de l'angle $\widehat{MOI}$




1. a. Donner la mesure de la circonférence du cercle.

   b. Compléter le tableau suivant :

| Valeur de $\alpha$ | 0 | 360 | 180 | 90 |
|---|---|---|---|---|
| Longueur de l'arc $\widehat{IM}$ | | | | |

   c. Que peut-on dire du tableau ci-dessus?
2. À l'aide de la proportionnalité, compléter le tableau ci-dessous :

| Valeur de $\alpha$ | 36 | 45 | 60 | 30 |
|---|---|---|---|---|
| Longueur de l'arc $\widehat{IM}$ | | | | |

**E.4**

1. Déterminer la mesure exacte en radian des angles suivants :

   a. $90^o$ b. $60^o$ c. $45^o$

   d. $30^o$ e. $72^o$ f. $1^o$
2. Déterminer la mesure exacte en degré des angles suivants :

   a. $\frac{\pi}{2}$ rad b. $\frac{\pi}{3}$ rad c. $\frac{\pi}{6}$ rad

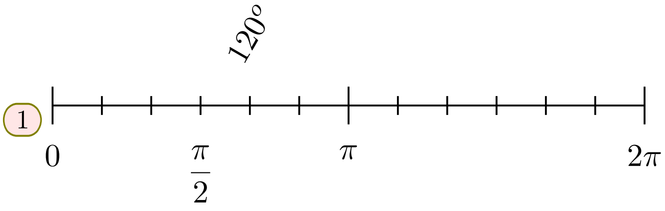
   d. $\frac{3{\cdot}\pi}{5}$ rad e. $\frac{\pi}{12}$ rad f. $\frac{3{\cdot}\pi}{4}$ rad
3. Compléter les pointillés ci-dessous avec les valeurs adéquates, approchées au millième près :

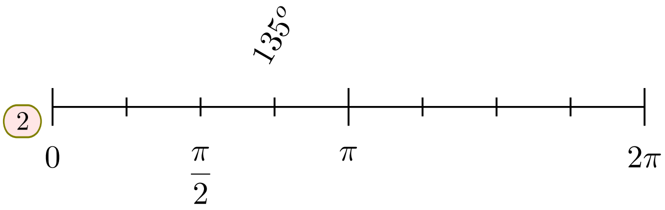
   a. $66^o \approx \ldots$ rad b. $137^o \approx \ldots$ rad

   c. $2\,\text{rad} \approx \ldots{}^o$ d. $0{,}69\,\text{rad} \approx \ldots{}^o$

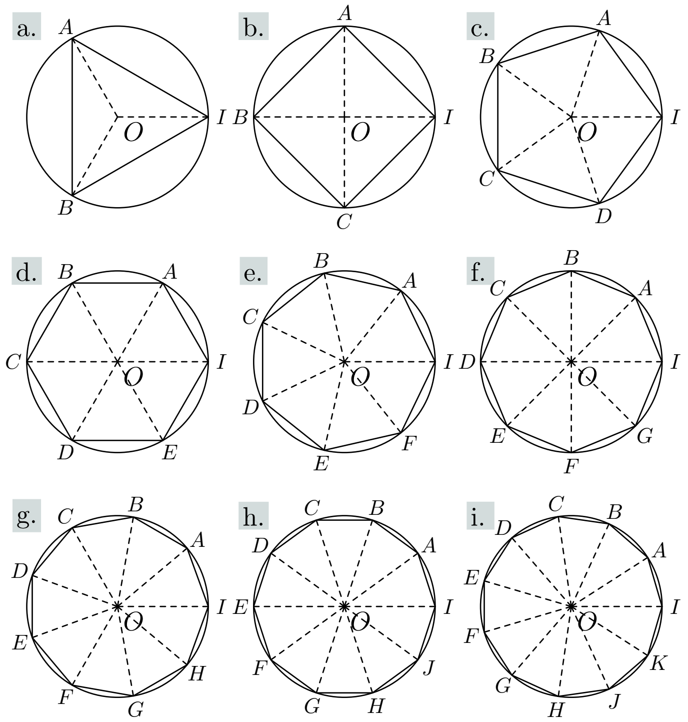
**E.5** Ci-dessous sont représentées deux droites graduées représentant les mesures d'un angle en radian sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.




Compléter la graduation du bas *(représentant une mesure d'angle en radian)*, puis compléter les valeurs du haut représentant la conversion correspondante en degré :

**E.6** On a représenté ci-dessous les neufs premiers polygones réguliers inscrit dans le cercle trigonométrique.

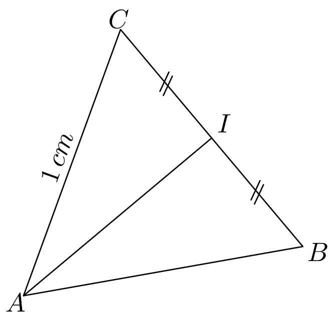



1. Donner la mesure, en radians, de l'angle au centre séparant deux sommets consécutifs de chacun de ces polygones :
2. Nommer chacun de ces polygones.

## 3. *Angles remarquables*

**E.7**

Soit $ABC$ un triangle équilatéral dont la mesure des côtés vaut $1\,cm$.
On note $I$ le milieu du segment $[BC]$.




1. Que représente la droite $(AI)$ dans le triangle $ABC$?
2. Compléter le tableau ci-dessous :

| | $\widehat{CIA}$ | $\widehat{CAB}$ | $\widehat{CAI}$ | $\widehat{IAC}$ |
|---|---|---|---|---|
| Mesure en radian | | | | |

3. a. À l'aide du théorème de Pythagore, démontrer que : $AI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,cm$.

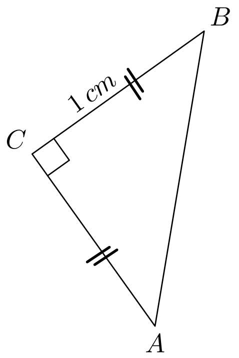
   b. Dans le triangle $AIC$, déterminer le sinus, le cosinus et la tangente des angles $\widehat{IAC}$ et $\widehat{ICA}$. Puis, compléter le tableau suivant :

| $\alpha$ | $\frac{\pi}{6}$ rad | $\frac{\pi}{3}$ rad |
|---|---|---|
| $\cos\alpha$ | | |
| $\sin\alpha$ | | |
| $\tan\alpha$ | | |

**E.8**

On considère le triangle rectangle-isocèle en $C$ tel que $BC$=1 $cm$




(1) Compléter le tableau suivant :

| | $\widehat{ACB}$ | $\widehat{CAB}$ |
|---|---|---|
| Mesure en radian | | |

(2) (a) À l'aide du théorème de Pythagore, déterminer la mesure du côté $[AB]$.

(c) Dans le triangle rectangle $ABC$, déterminer le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle $\widehat{CAB}$, puis compléter le tableau suivant :

| $\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\tan\alpha$ |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{\pi}{4}$ rad | | | |

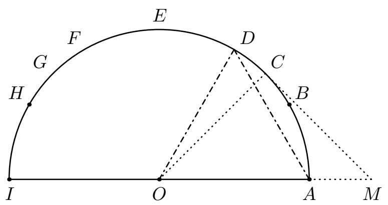
**E.9**

Voici le tableau des valeurs trigonométriques des angles remarquables :

| $\alpha$ | $0$ | $\dfrac{\pi}{6}$ | $\dfrac{\pi}{4}$ | $\dfrac{\pi}{3}$ | $\dfrac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\dfrac{1}{2}$ | $0$ |
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\tan\alpha$ | $0$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\times$ |

## 4. *Angles remarquables*

**E.10** On considère la figure ci-dessous, où $\mathscr{C}$ est un demi-cercle de centre $O$ et admettant le segment $[IA]$ pour diamètre :




Les autres points présents sur cette figure appartiennent au demi-cercle $\mathscr{C}$ et vérifient les propriétés suivantes :

- Le triangle $OAD$ est un triangle équilatéral ;
- Le triangle $OCM$ est un triangle rectangle isocèle en $C$ ;
- Le triangle $AEO$ est un triangle rectangle en $O$ ;
- La demi-droite $[OB)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{DOA}$ ;
- Le point $F$ est le symétrique du point $D$ par rapport à la droite $(EO)$ ;
- Les mesures des angles $\widehat{AOG}$ et $\widehat{AOC}$ sont supplémentaires ;
- Le point $H$ est le point d'intersection du demi-cercle $\mathscr{C}$ avec la droite parallèle à la droite $(AI)$ et passant par le point $B$.

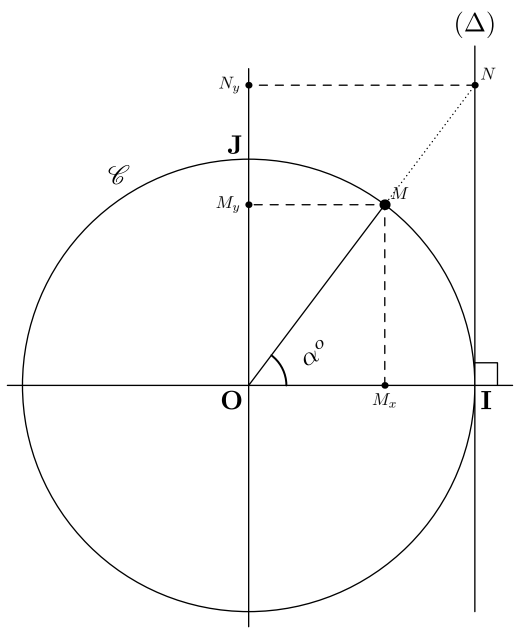
Donner la mesure exacte des angles ci-dessous en radian :

(a) $\widehat{AOB}$ (b) $\widehat{AOC}$ (c) $\widehat{AOD}$ (d) $\widehat{AOE}$

(e) $\widehat{AOF}$ (f) $\widehat{AOG}$ (g) $\widehat{AOH}$ (h) $\widehat{AOI}$

## 5. *Introduction au cercle trigonométrique*

**E.11** On considère le plan muni du repère orthonormé $\big(O\,;I\,;J\big)$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $O$ et **de rayon 1** : ce cercle s'appelle le *cercle trigonométrique*.



On considère la tangente $(\Delta)$ au cercle $\mathscr{C}$ passant par le point $I$ et perpendiculaire à l'axe des abscisses.

On place un point $M$ sur le cercle $\mathscr{C}$, on note :

- On repère ce point par l'angle $\alpha = \widehat{IOM}$
- $M_x$ le projeté orthogonal de $M$ sur l'axe $(OI)$ ;
- $M_y$ le projeté orthogonal de $M$ sur l'axe $(OJ)$ ;

On repère ainsi le point $M$ par l'angle qu'il définit : on note $M(\alpha)$, ou par ses coordonnées cartésiennes $M(M_x\,;M_y)$.

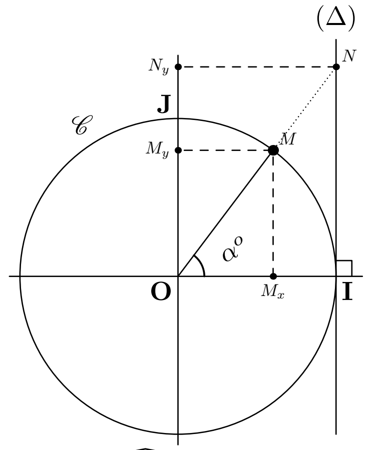
Le point $N$, s'il existe, est l'intersection de la droite $(\Delta)$ avec la droite $(OM)$. On note :

- $N_y$ le projeté orthogonal de $N$ sur $(OJ)$ ;

1. On se place dans le triangle $OMM_x$ :
   a. Quelle est la nature du triangle $OMM_x$ ? Justifier.
   b. Établir les égalités suivantes :
      $\cos\alpha = OM_x \quad ; \quad \sin\alpha = MM_x$
2. Dans le triangle $ONI$ rectangle en $I$, établir l'égalité suivante :
   $\tan\alpha = NI$
3. Relativement à l'angle $\alpha$, dire ce que représente les longueurs $OM_x$, $OM_y$ et $ON_y$.
4. Aux vues du travail effectué précédemment, justifier l'égalité :
   $\big(\cos\alpha\big)^2 + \big(\sin\alpha\big)^2 = 1$

E.12

On considère le plan muni du repère orthonormé $\big(O\,;I\,;J\big)$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $O$ et **de rayon 1** : ce cercle s'appelle le *cercle trigonométrique*.




On considère la tangente $(\Delta)$ au cercle $\mathscr{C}$ passant par le point $I$ et perpendiculaire à l'axe des abscisses.

On place un point $M$ sur le cercle $\mathscr{C}$, on note :

- On repère ce point par l'angle $\alpha = \widehat{IOM}$
- $M_x$ le projeté orthogonal de $M$ sur l'axe $(OI)$ ;
- $M_y$ le projeté orthogonal de $M$ sur l'axe $(OJ)$ ;

On repère ainsi le point $M$ par l'angle qu'il définit : on note $M(\alpha)$, ou par ses coordonnées cartésiennes $M(M_x\,;M_y)$.

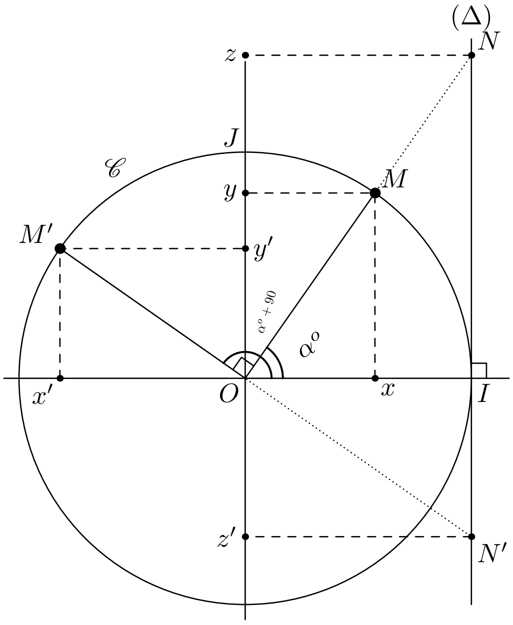
Le point $N$, s'il existe, est l'intersection de la droite $(\Delta)$ avec la droite $(OM)$. On note :

- $N_y$ le projeté orthogonal de $N$ sur $(OJ)$ ;

1. On se place dans le triangle $OMM_x$ :
   a. Quelle est la nature du triangle $OMM_x$ ? Justifier.
   b. Établir les égalités suivantes :
      $\cos\alpha = OM_x \quad ; \quad \sin\alpha = MM_x$
2. Dans le triangle $ONI$ rectangle en $I$, établir l'égalité suivante : $\tan\alpha = NI$
3. Relativement à l'angle $\alpha$, dire ce que représente l'abscisse du point $M$, l'ordonnée du point $M$ et l'ordonnée du point $N$.
4. Établir l'identité : $\big(\cos\alpha\big)^2 + \big(\sin\alpha\big)^2 = 1$

E.13 Sur le cercle trigonométrique, le point $M$ est repéré à partir de l'angle $\alpha$ et le point $M'$ est repéré à l'aide de l'angle $\alpha$+90.




1 a Donner en fonction de $\alpha$, la mesure de l'angle $\widehat{x'OM'}$.

b En déduire la mesure de l'angle $\widehat{M'OJ}$.

2 Trouver des relations entre les valeurs de $\cos\alpha$, $\cos(\alpha+90)$, $\sin\alpha$ et $\sin(\alpha+90)$.

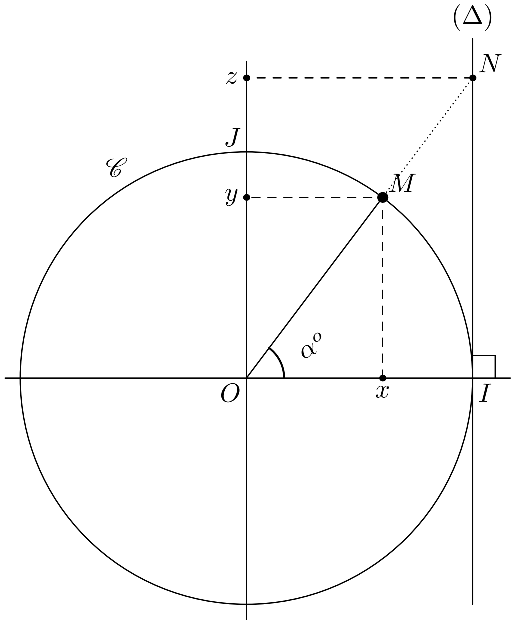
E.14 On considère le plan muni du repère orthonormé $\big(O\,;I\,;J\big)$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $O$ et de rayon 1 : ce cercle s'appelle le *cercle trigonométrique*. On considère la droite $(\Delta)$ passant par le point $I$ et perpendiculaire à l'axe des abscisses.
On considère le point $M$ du plan appartenant au cercle $\mathscr{C}$, l'angle $\widehat{MOI}$ mesure $\alpha$ degré.

1 Donner une relation faisant intervenir la longueur $x$ et la mesure de l'angle $\alpha$.

2 Faîtes de même avec la longueur $y$ et l'angle $\alpha$.

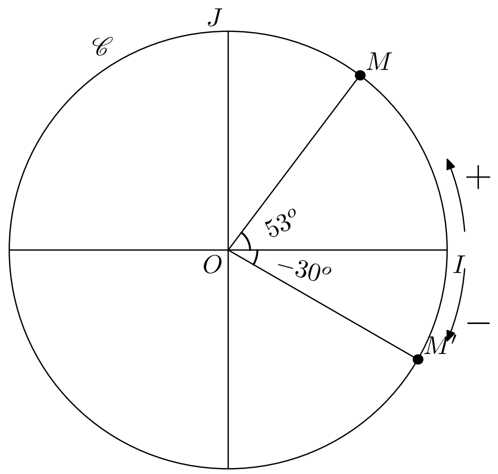
3 a En étudiant le rapport $\dfrac{NI}{OI}$, donner une relation dans le cercle trigonométrique entre la longueur $z$ et l'angle $\alpha$.

b Comment s'appelle la droite $(\Delta)$ relativement au cercle $\mathscr{C}$

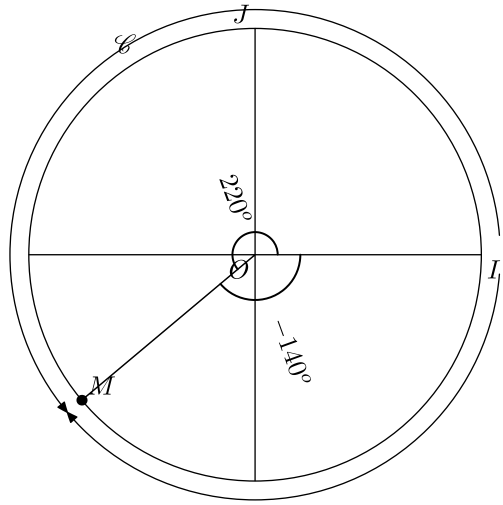


**E.15** Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;I\,;J)$.
On appelle cercle trigonométrique, le cercle de centre $O$ l'origine du repère et de rayon 1.
Pour caractériser tout point $M$ du cercle, on mesure l'angle $\widehat{MOI}$. C'est le début des repères polaires où chaque point sera caractérisé de manière unique relativement à leur distance à l'origine du repère et l'angle cité précédemment.

Un angle aura une valeur positive si on parcourt l'arc $\widehat{IM}$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Et l'angle sera négatif, si on parcourt ce même arc dans le sens des aiguilles d'une montre.




Tout point du cercle peut être repéré par un angle. Mais, on peut facilement associer deux angles à un seul point :

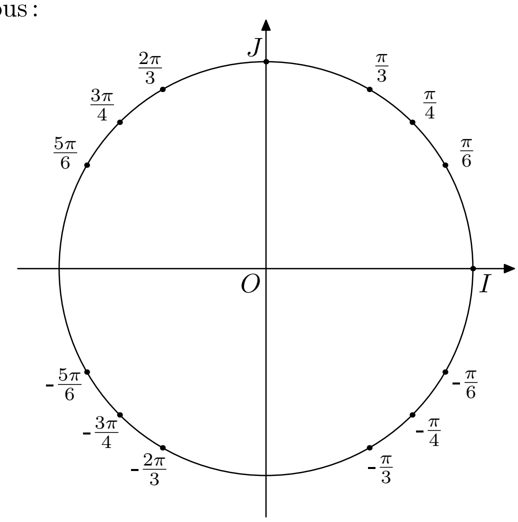



De même, on pourra parler également d'angle faisant plus d'un tour. Mais, la géométrie plane étudiant pas des figures dynamiques, mais plutôt des configurations fixes du plan, parler d'un angle de $390^o$ et de $30^o$ revient au même

Que peut-on dire des points caractérisés par les angles :
$30^o \quad ; \quad -330^o \quad ; \quad 390^o$

## 6. *Angles associés*

**E.16** On munit le plan d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et on considère le cercle trigonométrique ci-dessous :




où sont représentés les points $M$ du cercle trigonométrique dont la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ est un angle remarquable.

Donner la valeur exacte des rapports ci-dessous :

(a) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ (b) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (c) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ (d) $\cos(\pi)$

(e) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (f) $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ (g) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ (h) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

**E.17**

1. Tracer un cercle trigonométrique et placer les points suivants dont le repérage par leur mesure principale :

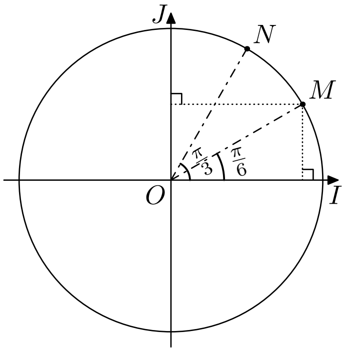
(a) $A\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ (b) $B\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ (c) $C\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

(d) $D\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (e) $E\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (f) $F\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

2. Préciser les valeurs du cosinus et du sinus associées à chacun des angles repérant les points précédents.

**E.18** On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$




1. a. Déterminer les coordonnées cartésiennes du point $M$.

   b. Placer le point $M'$ symétrique du point $M$ par la symétrie d'axe $(OJ)$. Donner les coordonnées cartésiennes du point $M'$. Puis, donner l'angle repérant le point $M'$ dans le cercle $\mathscr{C}$.

   c. Placer le point $M''$ symétrique du point $M$ par la symétrie d'axe $(OI)$. Donner les coordonnées cartésiennes du point $M''$. Puis, donner l'angle repérant le point $M''$ dans le cercle $\mathscr{C}$.

2. a. Déterminer les coordonnées cartésiennes du point $N$.

   b. Placer le point $N'$ symétrique du point $N$ par la symétrie d'axe $(OJ)$. Donner les coordonnées cartésiennes du point $N'$. Puis, donner l'angle repérant le point $N'$ dans le cercle $\mathscr{C}$.

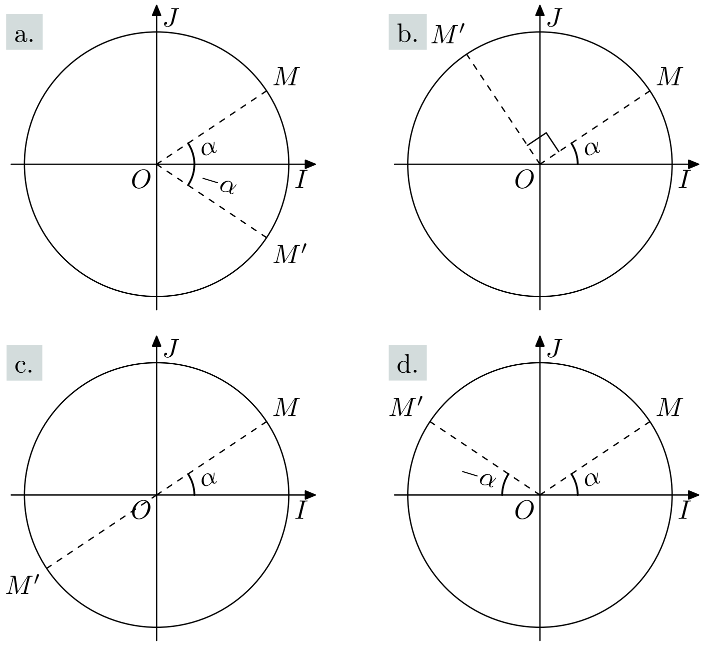
   c. Placer le point $N''$ symétrique du point $N$ par la symétrie d'axe $(OI)$. Donner les coordonnées cartésiennes du point $N''$. Puis, donner l'angle repérant le point $N''$ dans le cercle $\mathscr{C}$.

**E.19**

1. Dans les quatre cas suivants, un point $M$ est placé sur le cercle trigonométrique repéré par un angle $\alpha$. On rappelle qu'on note alors :

   $\widehat{IOM} = \alpha$ ou $M(\alpha)$.

   À partir de ce point $M$ est placé un nouveau point $M'$ :

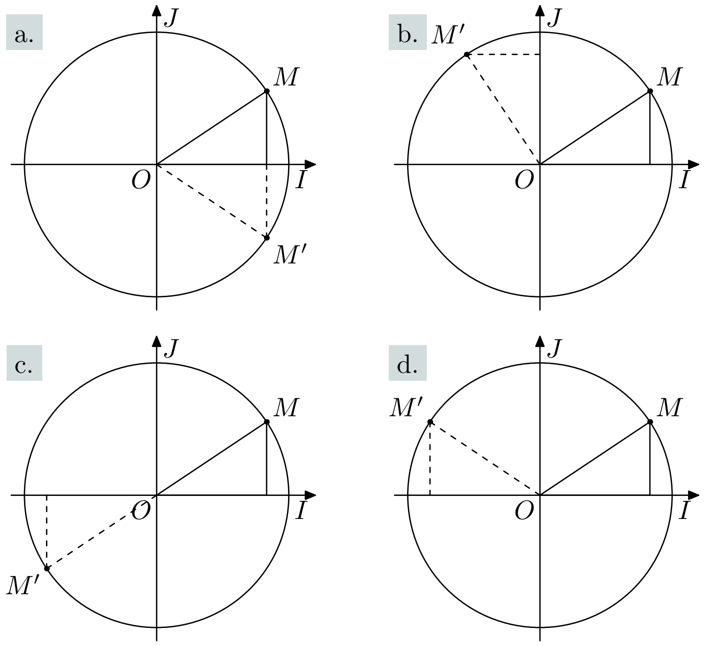



   Exprimer l'angle repérant le point $M'$ en fonction de $\alpha$.

2. Nous utiliserons la définition et les propriétés suivantes :

> **Définition :**
> Deux triangles sont **isométriques** si leurs côtés sont deux à deux de même mesure.

> **Proposition :**
> Si deux triangles ont un côté de même longueur adjacent à deux angles respectivement égaux alors ces deux triangles sont isométriques



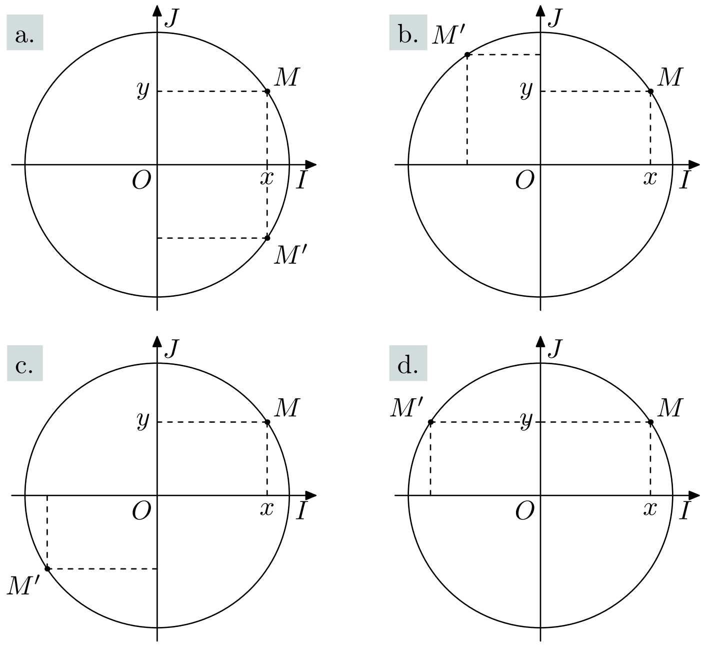

   Justifier, dans chaque cas, que le triangle présenté en trait plein et le triangle présenté en pointillés sont isométriques.

3. Ouvrir le fichier "*angleAssocie.ggb*".

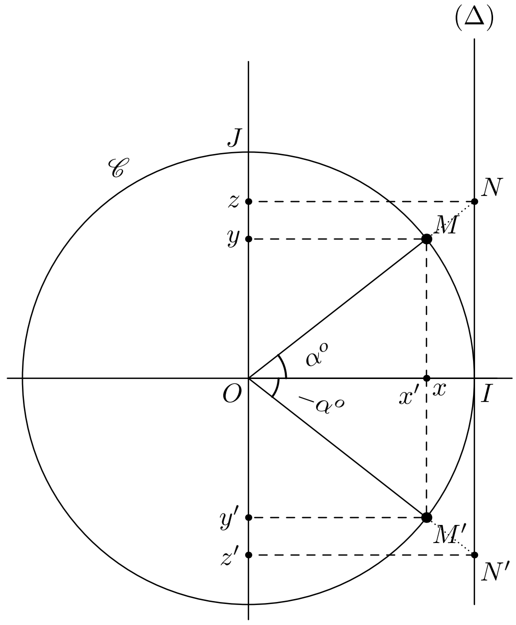
Modifier la position du point $M$ et observer la relation entre les coordonnées du point $M$ et $M'$ dans chacun des cas.

4. Indiquer sur la figure les coordonnées du point $M'$ en fonction des coordonnées $(x\,;y)$ du point $M$ :




**E.20** Sur le cercle trigonométrique, on repère le point $M$ et $M'$ relativement à partir des $\widehat{IOM}$ et $\widehat{IOM'}$ qu'ils forment à partir de l'axe des abscisses.

1. Comparer : $\cos\alpha$ et $\cos(-\alpha)$.
2. Comparer : $\sin\alpha$ et $\sin(-\alpha)$.
3. Comparer : $\tan\alpha$ et $\tan(-\alpha)$.




## 7. *Angles associées 2*

**E.21**

**Formule des angles associés**

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(\pi+x) = -\cos x$
- $\cos(\pi-x) = -\cos x$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\sin(\pi+x) = -\sin x$
- $\sin(\pi-x) = \sin x$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

Simplifier chacune des expressions suivantes :

a. $\cos(x-\pi)$

b. $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

c. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

d. $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

**E.22** Simplifier l'écriture de chacune des expressions ci-dessous :

a. $\sin(3\pi+x)$

b. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)$

c. $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

d. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$

**E.23** Simplifier l'écriture de chacune des expressions ci-dessous :

a. $\sin(\pi-x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

b. $3\cdot\sin(\pi+x) - 2\cdot\sin(\pi-x) + 4\cdot\sin(x-\pi)$

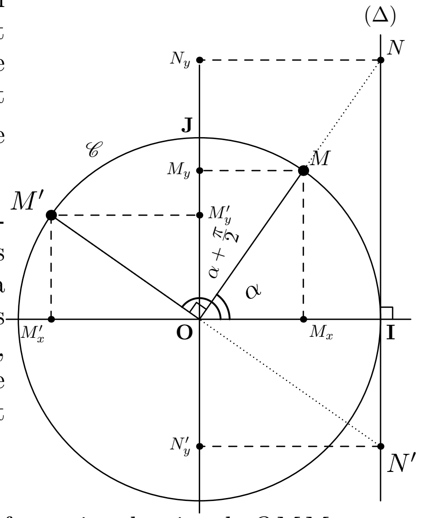
**E.24**

1. On donne la valeur exacte : $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
   a. En utilisant la formule $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$, déterminer la valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{8}$.
   b. En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{5\pi}{8}$ en justifiant votre démarche.
   c. Établir l'égalité : $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.
2. On considère l'expression suivante :
   $A = \cos\dfrac{9\pi}{8} - 3\cdot\sin\dfrac{5\pi}{8} + 2\cdot\cos\dfrac{7\pi}{8}$
   Déterminer une écriture de l'expression de $A$ en fonction des rapports trigonométriques de l'angle $\dfrac{\pi}{8}$.

## 8. *Relation entre cosinus et sinus*

**E.25**

Dans le plan munit d'un repère orthonormé et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère deux points $M(\alpha)$ et $M'\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ du cercle trigonométrique.

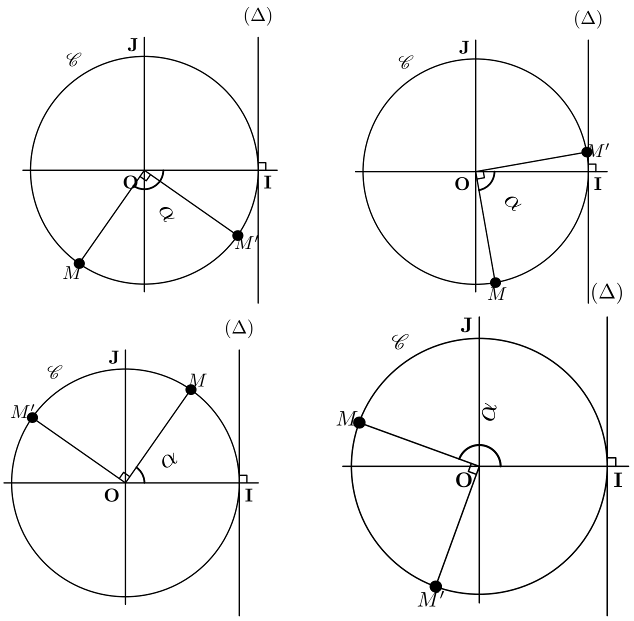



1. À l'aide des coordonnées des points figurant sur la figure, donner les valeurs du cosinus, sinus et tangente pour les angles $\alpha$ et $\alpha+\frac{\pi}{2}$.

2. a. Par quelle transformation, le triangle $OMM_x$ a pour image le triangle $OM'M'_y$?

   b. En déduire les valeurs de $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

3. Nous allons déterminer le signe des différentes valeurs des fonctions trigonométriques pour les angles $\alpha$ et $\alpha+\frac{\pi}{2}$.
Ceci afin de s'assurer de la validité des formules trouvées à la question 2 quelle que soit la valeur de l'angle $\alpha$ :




| | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\tan\alpha$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ | | | |
| $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$ | | | |
| $\alpha\in\left]-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right[$ | | | |
| $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[$ | | | |

| | $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ | $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ | $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ | | | |
| $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$ | | | |
| $\alpha\in\left]-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right[$ | | | |
| $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[$ | | | |

On en déduit que :

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\tan\alpha.$$

*Question subsidiaire :*
Nous allons montrer d'une autre manière que :

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-1}{\tan\alpha}:$$

4. a. Exprimer $ON$ en fonction de $\alpha$.

   b. En utilisant le fait que $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, exprimer la valeur de $ON'$ en fonction de $\alpha$

   c. En déduire l'aire du triangle $ONN'$.

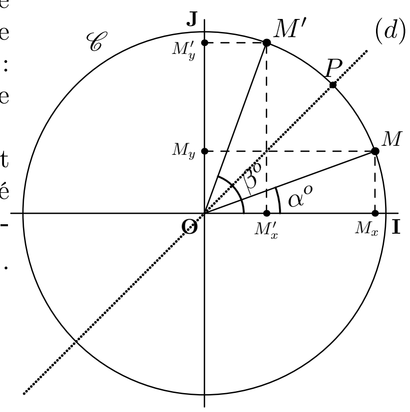
5. En utilisant le fait que $(OI)$ est la hauteur du triangle $ONN'$ issue de $O$, exprimer l'aire du triangle $ONN'$ d'une autre façon.

6. Établir la formule suivante :
$$IN'+\tan\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\times\frac{1}{\sin\alpha}$$

7. En déduire la relation : $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-1}{\tan\alpha}$.

## E.26

Dans le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère le cercle $\mathscr{C}$ trigonométrique : c'est-à-dire le cercle de centre $O$ et de rayon 1.
On note les points $M$ et $M'$ respectivement repéré par les angles complémentaires $\alpha$ et $\beta$ $\left(\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\right)$.
On note :
$M(\alpha)$ et $M'(\beta)$




On note $(d)$ la bissectrice de l'angle $\widehat{JOI}$ et $P$ le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec $(d)$

1. Dans cette question, nous allons montrer que les deux points $M$ et $M'$ sont symétriques relativement à la droite $(d)$. Pour cela, notons $N$ le symétrique du point $M$ par rapport à la droite $(d)$ :

   a. Justifier que le point $N$ est un point du cercle $\mathscr{C}$.

   b. Donner la mesure de l'angle $\widehat{JON}$ en fonction de $\alpha$.
   En déduire que le point $N$ appartient à la demi-droite $[OM')$.

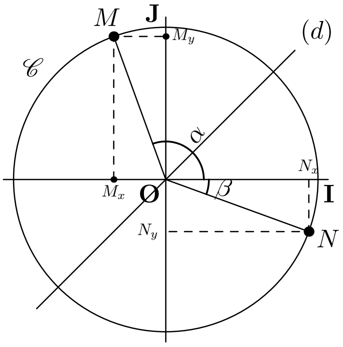
   c. Justifier que le symétrique de $M$ relativement à la droite $(d)$ est le point $M'$.

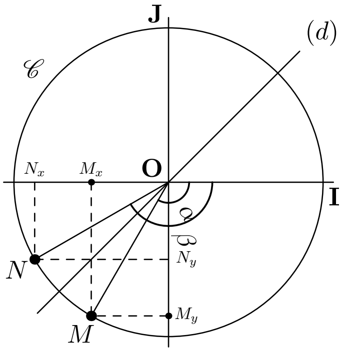
On note $M_x$ *(resp.* $M'_x$*)* le projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et $M_y$ *(resp.* $M'_y$*)* le projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées du point $M$ *(resp.* $M'$*)*

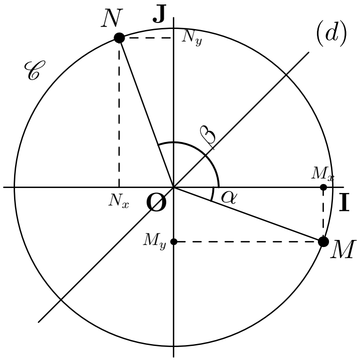
2. a. Établir des liens entre les coordonnées des points $M$ et $M'$ dans le repère $(O\,;I\,;J)$.

   b. En déduire les relations suivantes :
   $$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\quad;\quad\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Pour finir l'étude de comparaison du cosinus et du sinus de deux angles complémentaire, il faut aussi voir ce qui se passe si le point $M$ se trouve sur un autre quadrant sur le cercle trigonométrique. On considère deux points $M$ et $N$ du cercle trigonométrique caractérisés respectivement par les angles $\alpha$ et $\beta$ ainsi que leurs projetés orthogonaux respectifs sur les axes du repère :




3 a Pour chacune des trois figures ci-dessous, établir oralement la véracité de l'assertion ci-dessous :

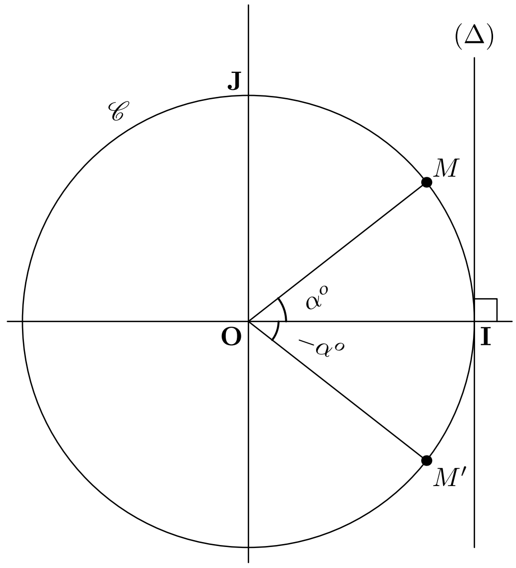
Les angles $\alpha$ et $\beta$ sont complémentaire si, et seulement si, les points $M$ et $N$ sont symétriques relativement à la droite $(d)$

b Justifier que ceci nous suffit pour établir pour toute valeur de $\alpha$, les égalités suivantes :

$\cos\alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ ; $\sin\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$

4 En déduire la relation reliant $\tan\alpha$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$

**E.27** On considère un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et le cercle trigonométrique de ce repère : c'est-à-dire le cercle de centre $O$ et de rayon 1. La droite $(\Delta)$ est la tangente en $I$ au cercle $\mathscr{C}$.




Soit $\alpha$ un nombre réel quelconque. On considère les points $M(\alpha)$ et $M'(-\alpha)$.

Un exemple de cette situation est donnée dans le graphique ci-contre.

1 Pour mettre en évidence, les différentes valeurs des fonctions trigonométriques associées aux angles $\alpha$ et $-\alpha$ :

a Tracer le projeté orthogonal de $M$ sur la droite $(OI)$. Le nommer $M_x$.

b Tracer le projeté orthogonal de $M$ sur la droite $(OJ)$. Le nommer $M_y$.

c Nommer $N$ le point d'intersection des droites $(OM)$ et $(\Delta)$.
Tracer le projeté orthogonal de $N$ sur la droite $(OJ)$. Le nommer $N_y$.

d Faîtes de même pour le point $M'$

2 a Comparer les abscisses des points $M$ et $M'$.

b En déduire une relation entre $\cos\alpha$ et $\cos(-\alpha)$?.

3 a Comparer les ordonnées des points $M$ et $M'$.

b En déduire une relation entre $\sin\alpha$ et $\sin(-\alpha)$?.

4 a Comparer les ordonnées des points $N$ et $N'$.

b En déduire une relation entre $\tan\alpha$ et $\tan(-\alpha)$?.