Première STMG / Probabilité

1. Dénombrements

E.1 Une urne contient 12 boules blanches, 5 boules noires et 8 boules bleues indiscernables au toucher. On considère notre univers d'expérience composé des trois événements élémentaires suivants :

- A : *“La boule tirée est blanche”*
- B : *“La boule tirée est noire”*
- C : *“La boule tirée est bleue”*

Compléter le tableau ci-dessous, au centième près, représentant la loi de probabilité de notre expérience :

X	A	B	C
$\mathcal{P}(X)$			

2. Ensemble

E.2 Le tableau ci-dessous donne, d'après un échantillon de 800 personnes interrogés en 2005, un aperçu de la lecture de la presse quotidienne en France.

	Tous les jours ou presque	Une ou deux fois par semaine	Seulement pendant certaines périodes	Rarement	Jamais	Total
Agriculteurs exploitants	1	10	2	8	79	100
Artisans, commerçants, chefs d'entreprise	11	11	5	7	66	100
Cadres	17	16	10	18	39	100
Professions intermédiaires	8	15	7	15	55	100
Employés	6	7	4	9	74	100
Ouvriers (y compris agricoles)	4	5	3	5	83	100
Retraités	6	7	2	6	79	100
Autres inactifs	5	9	4	9	73	100
Total en effectif	58	80	37	77	548	800
Pourcentages du total	7,25 %	10 %	4,625 %			

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme décimale et éventuellement arrondis à 0,001 près.

Partie A.

1. La dernière ligne du tableau ci-dessous représente la part de chaque catégorie par rapport à l'échantillon total. Calculer les valeurs manquantes de cette dernière ligne.
2. Donner la probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi les cadres ne lise jamais.

Partie B.

On choisit au hasard une personne dans cet échantillon de 800 personnes. Dans cette partie, on note les événements suivants :

- J l'événement : *“la personne choisie ne lit jamais”* ;
- O l'événement : *“la personne choisie est un ouvrier”*.

1. Calculer la probabilité de l'événement J et la probabilité de l'événement O.
2. Calculer la probabilité de l'événement $J \cap O$.
3. Calculer la probabilité de l'événement $J \cup O$

E.3

Une expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

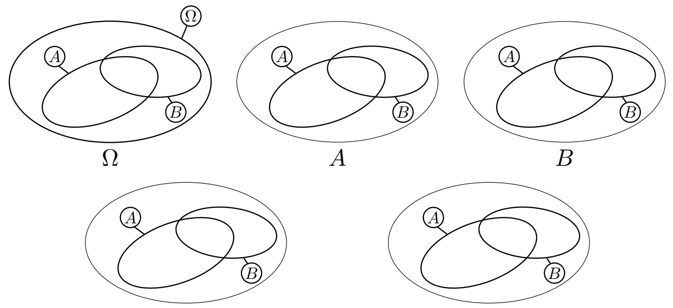
♡	♢	♠	♣
As	As	As	As
R	R	R	R
D	D	D	D
V	V	V	V
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7

1. Déterminer les probabilités des événements suivants :
   - A : *“La carte tirée est un pique”* ;
   - B : *“La carte tirée est une figure”* ;
   - C : *“La carte tirée est noire”* ;
   - D : *“La carte tirée est le valet”* ;
2. Déterminer les probabilités des événements suivants :

   a. $A \cap B$ b. $A \cap C$ c. $A \cup B$

   d. $B \cup C$ e. $C \cap D$ f. $C \cup D$

E.4 Ci-dessous sont représentés l'univers Ω d'une expérience aléatoire et deux événements A et B de Ω. Pour chacune des représentations ci-dessous, hachurer l'ensemble demandé.



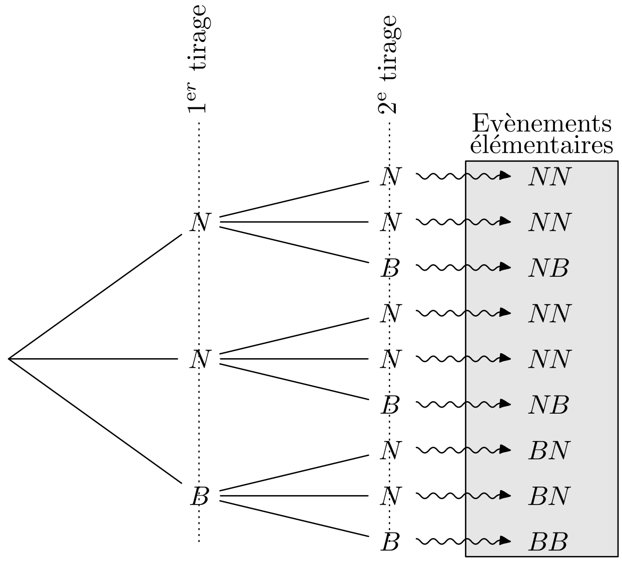
Ω A B

$A \cap B$ $A \cup B$

3. *Arbres de choix*

E.5 Une urne contient deux boules noires et une boule blanche ; le jeu se fait avec remise de la boule tirée : c'est-à-dire qu'une fois tirée, la boule est remise dans l'urne avant d'effectuer le tirage suivant.

Voici un arbre de décision basée sur le tirage de deux boules :



1. En tenant compte de l'ordre de tirage des boules, quel est le nombre possible de tirages différents?
2. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   a. A : *“La première boule tirée est blanche”*.
   b. B : *“Les deux boules tirées sont de couleurs différentes”*.
   c. C : *“La seconde boule est une boule noire”*.
3. Donner les probabilités des événements suivants :

   a. $A \cap B$ b. $A \cap C$ c. $A \cup C$

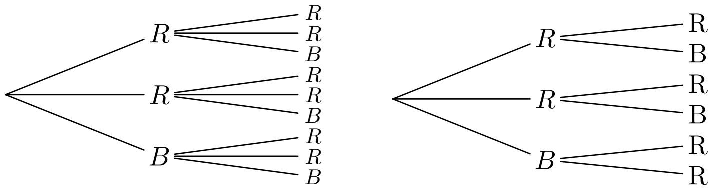
E.6 Une urne contient deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher.

Avec cette urne, on construit deux jeux :

- On tire une première boule dans l'urne, puis sans la remettre, on tire une seconde boule.
- On tire une première boule dans l'urne, on observe sa couleur puis on la remet dans l'urne. On tire alors une seconde boule.

Dans ces deux jeux, on considère que le jeu est gagné si les deux boules tirées sont de la même couleur.

On propose les deux arbres de choix ci-dessous :



Représentation 1 Représentation 2

1. Associer à chacun des jeux sa représentation sous la forme d'un arbre de choix.
2. Déterminer la probabilité de gagner pour chacun de ses jeux.

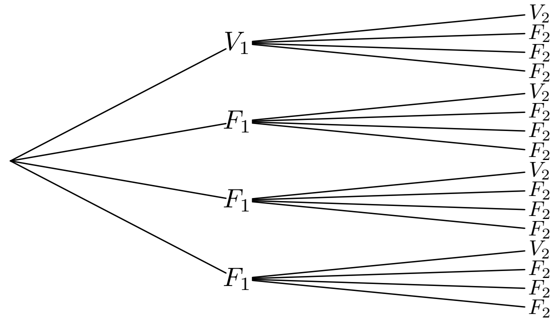
E.7 Un QCM *(questionnaire à choix multiple)* est proposé à des élèves : il comporte deux questions et quatre réponses sont proposées dont une seule est juste.

On souhaite étudier le pourcentage de réussite à ce QCM si les élèves y répondent complétement de réponse aléatoire ; on suppose alors que les réponses données à chacune des questions sont indépendantes entre elles.

On note :

- F_i : *“La réponse fournit à la question i est fausse”* ;
- V_i : *“La réponse fournit à la question i est vraie”* ;

Voici l'arbre de choix associé à cette situation :



On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard les réponses à ces deux questions

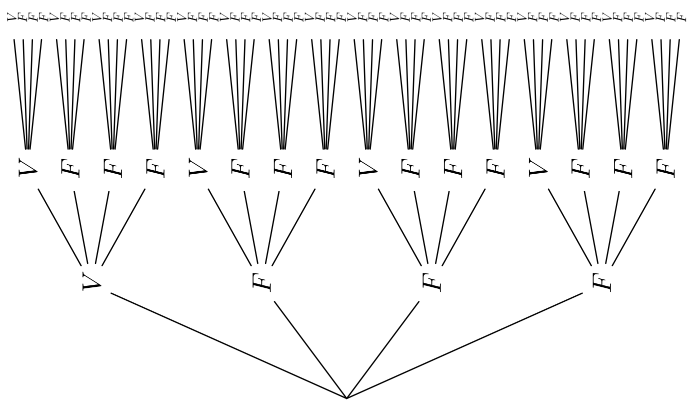
1. Donner la probabilité d'obtenir les deux bonnes réponses.
2. Donner la probabilité d'obtenir une seule bonne réponse.

4. *Arbre de probabilités*

E.8 On considère un questionnaire à choix multiple composé de 3 questions proposant chacune 4 réponses dont une seule est exacte.

On crée une expérience aléatoire en demandant aux participants de répondre au hasard aux questions proposées dans le formulaire.

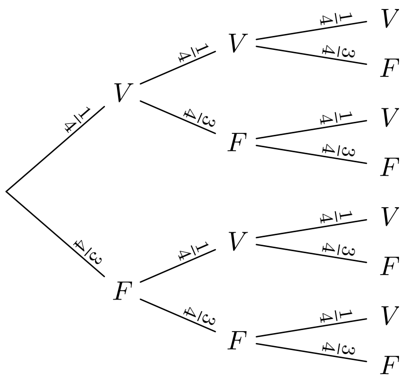
On représente cette situation par l'arbre de choix ci-dessous :



1 Compléter le tableau de probabilités ci-dessous :

k	0	1	2	3
Probabilité d'obtenir k bonnes réponses				

En remarquant que, pour chaque question du Q.C.M., la probabilité d'avoir une bonne réponse est de $\dfrac{1}{4}$ et une mauvaise réponse est de $\dfrac{3}{4}$. On simplifie l'arbre de choix par l'arbre de probabilité ci-dessous :



On souhaite retrouver les résultats de la question 1 à l'aide de cet arbre de probabilités :

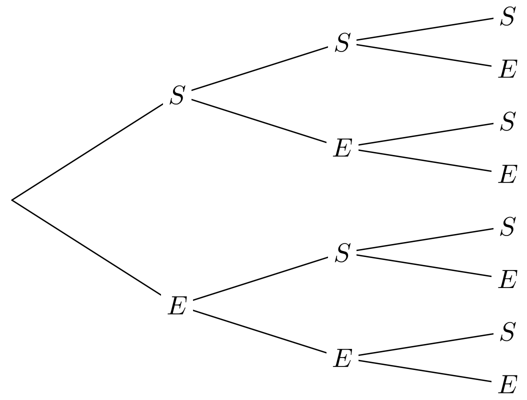
2 a Quel calcul, en utilisant les données de l'arbre ci-dessous, permet de retrouver la probabilité d'obtenir 3 réponses correctes au $Q.C.M.$?

b Quel calcul, en utilisant les données de l'arbre ci-dessous, permet de retrouver la probabilité d'obtenir 0 réponse correcte au $Q.C.M.$?

c Quel calcul, en utilisant les données de l'arbre ci-dessous, permet de retrouver la probabilité d'obtenir 1 réponse correcte au $Q.C.M.$?

E.9 On considère un schéma de Bernoulli de paramètres 3 et 0,4.

1 Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



2 Combien d'issues a cette expérience aléatoire?

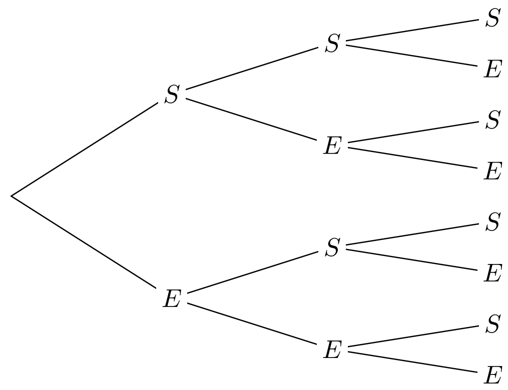
3 Déterminer la probabilité d'obtenir 3 succès.

4 a Combien d'issues représentent 2 succès?

b Déterminer la probabilité d'obtenir 2 succès dans cette expérience aléatoire.

E.10 On considère un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et 0,4.

1 Compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :



2 Combien d'issues a cette expérience aléatoire?

3 Déterminer la probabilité d'obtenir 4 succès.

4 a Combien d'issues représentent 3 succès?

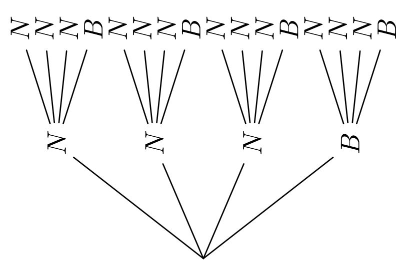
b Déterminer la probabilité d'obtenir 3 succès dans cette expérience aléatoire.

5. *Loi binomiale*

E.11

1 Dans une urne se trouve quatre boules : trois boules noires et une boule blanche. On tire successivement et avec remise deux boules de cette urne.

L'arbre de choix ci-dessous illustre tous les événements élémentaires de cette expérience aléatoire :



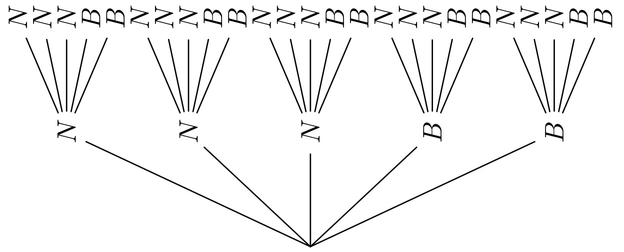
a Construire l'arbre de probabilités associées

b On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associant le nombre de boules blanches tirées. Déterminer les probabilités suivantes :

$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}2)$

2. Dans une urne se trouve cinq boules : trois boules noires et deux boules blanches. On tire successivement et avec remise deux boules de cette urne.

   L'arbre de choix ci-dessous illustre tous les événements élémentaires de cette expérience aléatoire :



a. Construire l'arbre de probabilités associées

b. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associant le nombre de boules blanches tirées. Déterminer les probabilités suivantes :

$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}1)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}2)$

E.12

1. a. Construire un arbre de probabilité associé à un schéma de Bernoulli de paramètre 2 et 0,4.

   b. On note $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre 2 et 0,4. Déterminer les probabilités suivantes : $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}1)$

2. a. Construire un arbre de probabilité associé à un schéma de Bernoulli de paramètre 3 et 0,4.

   b. On note $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre 3 et 0,4. Déterminer les probabilités suivantes : $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}1)$

6. *Loi binomiale et espérance*

E.13

L'espérance d'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètres n et p est le nombre $n{\times}p$ et se note $E(\mathcal{X})$.

L'espérance est la valeur moyenne observée du nombre de succès réalisée dans le schéma de Bernoulli lorsqu'on réalise un grand nombre de fois cette expérience aléatoire.

1. On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètres 10 et 0,3.
   Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

2. On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètres 24 et 0,45.
   Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

E.14 Cinq garçons et trois filles participent écrivent leur nom sur un bout de papier et l'insèrent dans une urne.

On extrait, successivement et avec remise, deux bouts de papier de l'urne. On considère que les deux tirages sont indépendants.

1. À chaque tirage, on regarde si le papier tiré désigne un garçon ou une fille. Construire l'arbre de probabilité lié à cette expérience.

2. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associant à une issue de ce tirage le nombre de filles sélectionnées.

   a. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

   b. Calculer son espérance mathématique de $E(\mathcal{X})$. On arrondira le résultat au millième près.

E.15 On dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. En lançant le dès, on considère que la partie est gagnée si on obtient une valeur paire.

On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par $\mathcal{X}$ le nombre de fois où un nombre pair a été obtenu.

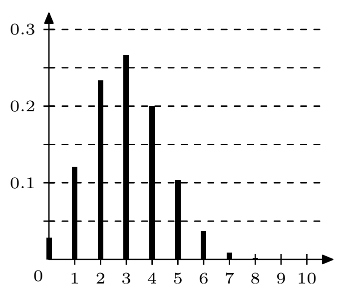
1. Dresser l'arbre de probabilité associé à cette expérience aléatoire.

2. Donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}2)$.

3. Donner l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

7. *Loi binomiale et représentation*

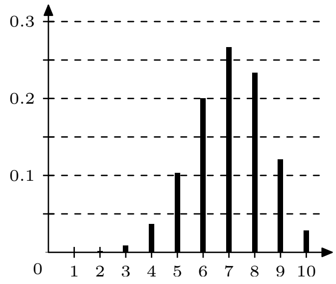
E.16 Ci-dessous est représentée la loi de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètres $n{=}10$ et $p{=}0{,}3$:



Donner une valeur approchée des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}1)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}3)$

E.17 Ci-dessous est donnée la représentation de la loi d'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre $n=10$ et $p=0{,}7$. :



Donner l'inégalité qui est vérifiée :

(a) $\mathcal{P}(\mathcal{X}<5) \leqslant 0{,}5$ (b) $\mathcal{P}(\mathcal{X}<5) \geqslant 0{,}5$

8. *Loi binomiale et calculatrice*

E.18 On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 0,2 et 20.

On répondra aux questions à l'aide de la calculatrice. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près :

1. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

   (a) $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ (b) $\mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$

2. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

   (a) $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 5)$ (b) $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 9)$

E.19 On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 30 et 0,24.

On répondra aux questions à l'aide de la calculatrice. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près :

1. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

   (a) $\mathcal{P}(\mathcal{X}=10)$ (b) $\mathcal{P}(\mathcal{X}=12)$

2. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

   (a) $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 10)$ (b) $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 18)$

E.20 On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}63$.

On donnera les valeurs des probabilités arrondies au millième.

1. Déterminer les probabilités suivantes :

   (a) $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$ (b) $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$ (c) $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$

2. Donner la probabilité de l'événement $\{\mathcal{X}\geqslant 4\}$.

E.21 Pour le concert de fin d'année, l'auditorium du conservatoire dispose de 400 places réservées aux parents d'élèves. On s'intéresse au nombre $\mathcal{X}$ de parents d'élèves assistant au concert de fin d'année dans l'auditorium.
On estime à 0,75 la probabilité que chacun des 500 parents d'élèves assiste au concert. On admet que $\mathcal{X}$ suit la loi binomiale de paramètres 500 et 0,75.

1. Calculer l'espérance de $\mathcal{X}$.
2. Déterminer la probabilité que le nombre de places réservées aux parents d'élèves soit suffisant. On arrondira le résultat au millième.

E.22 Un vaccin est en phase de test sur une population de 100 individus. 30 d'entre eux réagissent avec ce vaccin avec de fortes fièvres. Chaque phase de test est effectuée sur un groupe de 5 individus choisis au hasard et indépendamment entre chaque test.

Notons $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui associe à chaque phase de test le nombre d'individus ayant eu une réaction avec de fortes fièvres.

1. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres 5 et 0,3.
2. Déterminer la probabilité pour que 2 individus aient réagi au vaccin avec de la fièvre sur une phase de test.
3. Sur une phase de test, quelle est la probabilité qu'au plus 4 individus aient réagi avec de la fièvre.

E.23 En choisissant un élève au hasard parmi les élèves inscrits à la demi-pension, on sait que la probabilité pour que l'élève choisi soit satisfait de la demi-pension est de 0,675.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au nombre d'élèves déclarant être satisfaits de la qualité des repas. Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on admet que $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres 4 et 0,675.

Les résultats seront arrondis au millième.

1. Calculer la probabilité de l'événement A : "*aucun élève n'est satisfait*".
2. Calculer la probabilité de l'événement B : "*les quatre élèves sont satisfaits de la qualité des repas*".

9. *Intervalle de fluctuation*

E.24

Un agriculteur conditionne ses tomates en fonction de leur taille *(calibre)*. À ses fournisseurs, il annonce que 40 % de ses tomates ont un calibre supérieur ou égal à 6 *(un diamètre supérieur à 47 mm)*.

Se rendant dans l'exploitation, un fournisseur prélève 30 tomates et observent que, parmi elles, 10 tomates sont d'un calibre supérieur ou égal à 6.

L1	L2
0	2.2E-7
1	4.6E-6
2	4.7E-5
3	3.1E-4
4	0.0015
5	0.0057
6	0.0172
7	0.0435
8	0.094
9	0.1763
10	0.2915
11	0.4311
12	0.5785
13	0.7145
14	0.8246
15	0.9029
16	0.9519
17	0.9788
18	0.9917
19	0.9971
20	0.9991
21	0.9998
22	1
23	1
24	1
25	1
26	1
27	1
28	1
29	1
30	1

Ci-contre est donnée la loi cumulative d'une variable aléatoire binomiale de paramètres 30 et 0,4. On peut y extraire les résultats ci-dessous :

$$\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant 10\big)\approx 0{,}2915 \quad ; \quad \mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant 20\big)\approx 0{,}9991$$

1. a. Déterminer la valeur du plus petit entier a réalisant la condition :
   $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant a\big) > 0{,}025$

   b. Déterminer la valeur du plus petit entier b réalisant la condition :
   $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant b\big) \geqslant 0{,}975$

   c. En déduire l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence observée pour la variable aléatoire $\mathcal{X}$. *(on arrondira les bornes à 10^{-3})*

2. Que peut-on dire de l'observation du fournisseur?

E.25 On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 30 et 0,32 : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}\big(30\,;0{,}32\big)$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0	0	0,001	0,005	0,018	0,049	0,11	0,208	0,341

k	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,494	0,645	0,774	0,871	0,934	0,97	0,988	0,995	0,999

k	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

1. Déterminer les plus petits entiers a et b tels que :
   $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant a\big) > 0{,}025 \quad ; \quad \mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant b\big) \geqslant 0{,}975$

2. Justifier que : $\mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) \geqslant 0{,}95$

3. En notant $F=\dfrac{\mathcal{X}}{30}$ la variable aléatoire qui représente la fréquence aléatoire du succès. Justifier que :
   $\mathcal{P}\left(\dfrac{a}{30}\leqslant F\leqslant\dfrac{b}{30}\right) \geqslant 0{,}95$