Seconde / Arithmétique: diviseurs, entiers premiers

ChingEval : 5 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. *Entiers, diviseurs, multiples*

E.1 Compléter le tableau par des croix pour indiquer si les entiers présentés sont divisibles par 2, 3, 5, 9.

Entiers	123	504	205	1433	2430
Divisible par 2					
Divisible par 3					
Divisible par 5					
Divisible par 9					

E.2

1. Donner l'expression des fractions ci-dessous sous forme irréductible :

   a. $\frac{14}{26}$ b. $\frac{66}{27}$ c. $\frac{15}{55}$ d. $\frac{56}{40}$

2. Effectuer les opérations ci-dessous en simplifiant au préalable chacun des termes du calcul :

   a. $\frac{15}{25}+\frac{9}{15}$ b. $\frac{42}{14}-\frac{36}{12}$

E.3 Parmi les nombres ci-dessous, lequel admet exactement 5 diviseurs :

10 25 35 81 125

E.4 Parmi les nombres ci-dessous, lequel admet exactement 4 diviseurs :

24 28 49 64 343

E.5 Je suis un nombre divisible par 6 et par 21, je suis plus petit que 100 et je possède 8 diviseurs. Qui suis-je?

E.6 Je suis un nombre divisible par 5 et par 7, je suis plus petit que 100 et je possède 8 diviseurs. Qui suis-je?

2. *Entiers pairs et impairs*

E.7

1. a. Effectuer les divisions euclidiennes ci-dessous *(et pas les divisions décimales)* et compléter la relation indiquée sous chacune d'elles :

   1 5 | 2 2 8 | 2 1 3 1 | 2 2 0 6 | 2

   b. Compléter les relations suivantes en lien avec la question a :
   - $15 = \ldots\times 2+\ldots$
   - $28 = \ldots\times 2+\ldots$
   - $131 = \ldots\times 2+\ldots$
   - $206 = \ldots\times 2+\ldots$

2. Que peut-on dire du reste de la division euclidienne par 2 d'un nombre pair? du reste de la division euclidienne par 2 d'un nombre impair?

E.8 Compléter sans justification les phrases suivantes à l'aide des mots **pair**, **impair**, **quelconque**.

a. La somme de deux entiers pairs est un entier ……

b. La somme de deux entiers impairs est un entier ……

c. Le produit de deux entiers impairs est un entier ……

d. Le produit d'un entier pair par un entier impair est un entier ……

E.9 Sans justicatif, dire si les assertions suivantes sont vraies, fausses ou indécidables :

1. La somme de deux entiers impairs est un entier pair.
2. Le produit d'un entier pair par un entier impair est pair.
3. Le produit de deux entiers consécutifs est un entier pair.
4. La somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5.

E.10

On utilisera les deux tableaux suivants :

+	Pair	Impair
Pair	Pair	Impair
Impair	Impair	Pair

×	Pair	Impair
Pair	Pair	Pair
Impair	Pair	Impair

Soit a un nombre entier tel que l'entier a^2+9 est un nombre pair.

Que peut-on dire de la parité de l'entier a? Justifier.

3. Parité et manipulations algébriques

E.11
1. a. Soit k et k' deux entiers relatifs *(*$k, k' \in \mathbb{Z}$*)*, développer et réduire l'expression : $\big(2{\cdot}k+1\big)\big(2{\cdot}k'+1\big)$

   b. En déduire la parité du produit de deux entiers impairs.

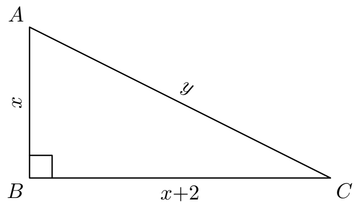
2. En déduire la parité du carré d'un nombre impair.

E.12 Montrer que la somme de quatre entiers consécutifs est un entier pair.

E.13 Montrer que, pour tout entier n impair, l'expression $3{\cdot}n^2+2{\cdot}n+1$ définit un entier pair.

E.14 Montrer que, pour tout entier n, l'expression $n^2+3{\cdot}n$ est un entier pair.

E.15 On considère le triangle ABC rectangle en B, représenté ci-dessous, tel que $BC=AB+2$ et ses mesures soient entières :



On modélise la situation en notant $AB=x$ et $AC=y$.

1. a. Exprimer y^2 en fonction de x sous la forme d'une expression développée et réduite.

   b. En déduire que l'entier y est pair.

2. a. Justifier que $2{\cdot}x^2+4{\cdot}x+4$ est un multiple de 4.

   b. En déduire que l'entier x est pair.

3. Compléter l'algorithme ci-dessous nous donnant les valeurs de x et de y *(avec* $y<1000$*)* réalisant les dimensions de ce triangle :

```
import math
for x in range(...):
    y=math.sqrt(...)
    if math.floor(...)==...:
        print(x,y)
```

E.16
1. Montrer que pour tout entier k, l'entier k^2+k est pair.
2. Soit a et b deux entiers impairs. Montrer que l'entier a^2+b^2+6 est un multiple de 8.

4. Nombres premiers

E.17 Le crible d'Ératosthène *(III*^{ième} *siècle avant J.C.)* permet de trouver facilement les entiers premiers à partir d'une liste.

1. a. Justifier que 2 est un entier premier.

   b. Dans le tableau ci-dessous, hachurer toutes les cases dont l'entier est un multiple de 2 *(ne pas hachurer la case « 2 »)*.

2. a. Justifier que 3 est un entier premier.

   b. Dans le tableau ci-dessous, hachurer toutes les cases dont l'entier est un multiple de 3 *(ne pas hachurer la case « 3 »)*.

3. a. La case blanche suivant la case du 3 est la case du 5 : justifier, à l'aide de cette observation, que 5 est un entier premier.

   b. Hachurer toutes les cases multiples de 5, sauf la case « 5 ».

4. a. Dans le tableau ci-dessous, quel est la case blanche succédant à « 5 »?
   Justifier également, en se servant de l'observation du tableau, que 7 est un entier premier.

   b. Hachurer tous les multiples de l'entier 7 dans le tableau *(à l'exception de la case « 7 »)*.

5. Continuer le travail pour hachurer dans le tableau tous les nombres entiers non-premiers présents parmi les nombres entiers de 1 à 100.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

E.18 Un entier naturel est dit premier s'il admet comme diviseur uniquement 1 et lui-même : 3 est un entier premier, car ses seuls diviseurs sont 1 et 3.

1. Parmi les entiers ci-dessous, lesquels sont premiers?
   2 ; 4 ; 7 ; 12
2. Donner tous les entiers premiers de 1 à 25.

5. *Décomposition en produit de facteurs premiers*

E.19

1. Utiliser l'algorithme précédent afin de déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers suivants :

   a. 84 b. 144 c. 140 d. 196

2. En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers des produits suivant :

   a. 84×144 b. 140×196

E.20 Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des trois entiers ci-dessous :

a. 16×25 b. 34×12 c. $72\times18\times10$ d. 32×121

6. *Produit de facteurs premiers, diviseurs et multiples*

E.21 Voici la décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier 360 : $360=2^3\times3^2\times5$

1. Justifier que les entiers suivants sont des diviseurs de 360 :

   a. $2^1\times3^2$ b. 2×5 c. $2^2\times3^0\times5$

2. Parmi les entiers suivants, quels sont les diviseurs de 360 :

   a. $2^0\times3^0\times5^0$ b. $2^4\times3$

   c. 2×5^2 d. $2^3\times3^2\times5$

3. Quelles conditions, sur les exposants, peut-on donner à l'entier $2^n\times3^n\times5^p$ pour qu'il soit un diviseur de 360?

7. *Produit de facteurs premiers et réduction de fractions*

E.22

1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres 60 et 450.
2. En déduire l'expression simplifiée du quotient $\dfrac{60}{450}$
3. Effectuer la somme : $\dfrac{1}{60}+\dfrac{1}{450}$

E.23

1. Donner la décomposition des entiers 108 et 30 en produits de facteurs premiers.
2. Mettre en avant votre démarche pour les deux questions suivantes :

   a. Simplifier la fraction $\dfrac{30}{108}$.

   b. Effectuer la soustraction ci-dessous et donner le résultat sous forme de fraction irréductible : $\dfrac{5}{108}-\dfrac{7}{30}$

E.24

1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier 36.
2. On donne la décomposition en produit de facteurs premiers suivante : $56=2^3\times7$

   a. Donner le plus grand diviseur commun à 36 et 56.

   b. En déduire l'expression réduire de l'expression $\dfrac{36}{56}$

3. On donne la décomposition en produit de facteurs premiers suivante : $42=2\times3\times7$

   a. Donner les valeurs des entiers naturels a, b, c tels que l'entier $n=2^a\times3^b\times7^c$ soit le plus petit multiple de 36 et 42.

   b. En déduire la somme de : $\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{42}$

E.25

1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers suivants :

   a. 2 016 b. 2 100 c. 864

2. Effectuer les opérations suivantes et donner le résultat sous forme simplifiée :

   a. $\dfrac{2\,016}{2\,100}$ b. $\dfrac{1}{2\,100}+\dfrac{1}{864}$

8. *Puissances*

E.26

1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers : 16 ; 24
2. a. Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers du produit : 16×24.

   b. Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers du produit : $16^3\times24^2$.

3. Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers du quotient : $\dfrac{24^5}{16^2}$.

E.27 Simplifier l'écriture des entiers suivants sous forme de produit de facteurs premiers :

a. $\dfrac{5\times3^4\times12^2}{21^2\times15^3}$

E.28 En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers, donner une écriture des nombres ci-dessous sous la forme :

$2^m \times 3^n \times \cdots$ où les exposants sont des entiers **relatifs**.

(a) $\dfrac{9}{24}$ (b) $\dfrac{28^2}{32}$ (c) $\dfrac{81\times 6^4}{27^2\times 7^5}$ (d) $\dfrac{38^2\times 11}{6^5\times 4^4\times 19}$

9. *Entiers et nombres de diviseurs*

E.29 On considère l'entier : $a=156$

1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre a.
2. (a) Justifier que $2^2\times 17$ ne peut être un diviseur de a
   (b) Justifier que l'entier $2^2\times 3^2$ n'est pas un diviseur de a.
3. Donner l'ensemble des diviseurs de l'entier a.

Rappel : les entiers premiers inférieurs à 20 sont :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19

E.30

1. Déterminer la décomposition de 245 en produit de facteurs premiers.
2. Utiliser un arbre de choix, afin de déterminer l'ensemble des diviseurs de 245.

E.31

1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier 306.
2. Donner l'ensemble des diviseurs de l'entier 306.

10. *Approfondissement : parité et raisonnement par l'absurde*

E.32

1. Prouver que l'assertion ci-dessous est vraie :
   "*Il n'existe pas d'entier impair admettant un diviseur pair*" ?

Pour prouver cette assertion, on suppose qu'il existe un entier n admettant un diviseur k pair. Il suffit alors de montrer que cette supposition entraine une contradiction : cette supposition ne peut donc pas être vrai.

2. Que pensez-vous de l'assertion :
   "*Un entier pair n'admet pas de diviseur impair*" ?

11. *Approfondissement : parité et raisonnement par disjonction de cas*

E.33 Prouver que la somme de deux entiers de même parité est un entier pair.

Indication : pour cela, on étudiera séparemment :
- la somme de deux entiers pairs
- et la somme de deux entiers impairs.

E.34 Montrer que la différence des carrés de deux entiers consécutifs est toujours un entier impair.

E.35 On considère un entier relatif a $(a\in\mathbb{Z})$, tel que l'entier a^2+9 est un entier pair. Donner la parité de l'entier a.

12. *Approfondissement : critère de primalité*

E.36 Déterminer si les entiers ci-dessous sont premiers ou non. Justifier votre démarche.

(a) 251 (b) 623

E.37 ⚠ Parmi les entiers strictement inférieurs à 1 000, donner le plus grand entier premier.

13. *Exercices non-classés*

E.38 Parmi les entiers suivants, dire s'ils sont premiers ou non. Justifier vos réponses :

(a) 903 (b) 167

