Seconde / Colinéarité et parallélisme

ChingEval : 6 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

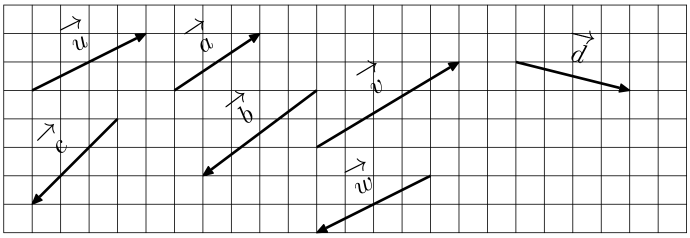
1. *Vecteurs opposés et soustractions*

E.1

Définition : soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. On appelle vecteur opposé du vecteur $\overrightarrow{u}$, le vecteur noté $-\overrightarrow{u}$ définit par :

- la même direction que le vecteur $\overrightarrow{u}$
- le sens opposé au vecteur $\overrightarrow{u}$
- la même longueur que $\overrightarrow{u}$

Dans le plan, on considère les 7 vecteurs ci-dessous :



1. Nommer le ou les vecteurs opposés au vecteur $\overrightarrow{u}$.
2. Tracer un vecteur $\overrightarrow{e}$ opposé au vecteur $\overrightarrow{d}$.

E.2

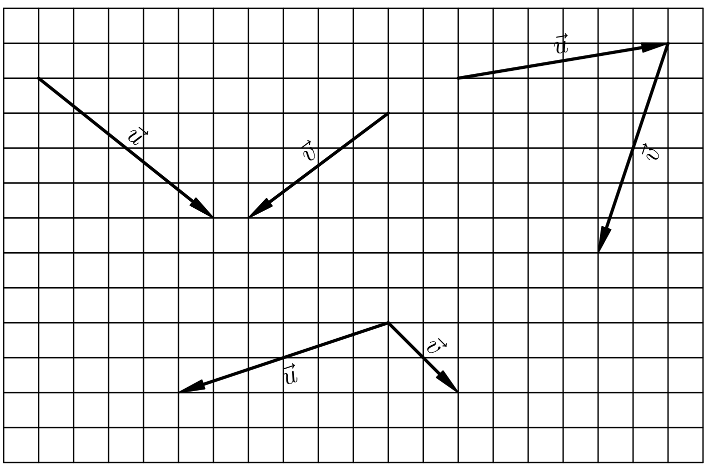
Définition :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. On définit la soustraction du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le vecteur $\overrightarrow{v}$ par la relation :
$$\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}+\left(-\overrightarrow{v}\right)$$

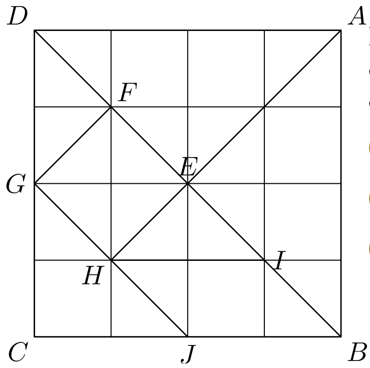
Autrement dit, on n'effectue jamais la soustraction par un vecteur, on ajoute son opposé

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

1. Que peut-on dire de la différence : $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}$?
2. Pour chacun des trois cas représentés ci-dessous, dessiner un représentant de la soustraction : $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$



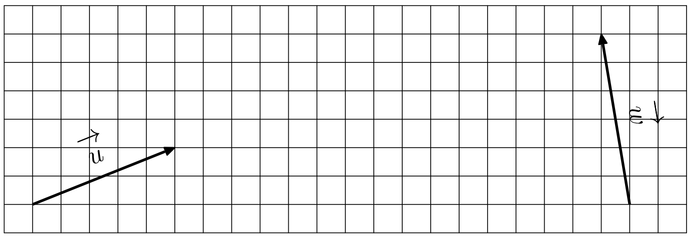
E.3



Déterminer un représentant de chacune des sommes ci-dessous :

1. $\overrightarrow{EI}-\overrightarrow{GF}$
2. $\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{JF}$
3. $\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{IF}-\overrightarrow{GE}$

E.4 Dans le plan, on considère les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ représentés ci-dessous.



Dessiner le vecteur $\overrightarrow{v}$ réalisant la relation :
$$\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w}$$

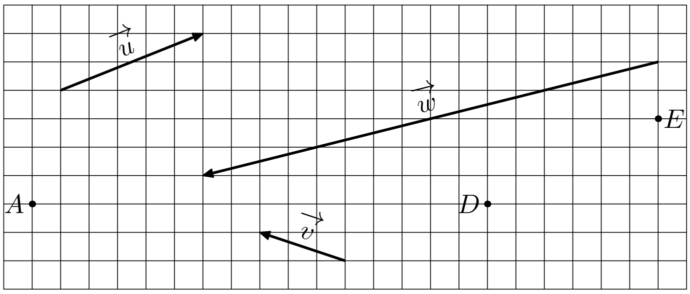
2. *Multiplication par un entier*

E.5

Proposition : dans le plan, on considère un vecteur $\overrightarrow{u}$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On définit le vecteur $n \cdot \overrightarrow{u}$ par :

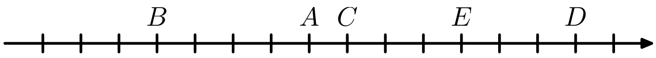
$$n \cdot \overrightarrow{u} = \underbrace{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} + \cdots + \overrightarrow{u}}_{n \text{ fois}}$$

Dans le plan, on considère les trois vecteurs et les trois points représentés ci-dessous :



1. Placer le point B tel que : $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{u}$
2. Placer le point C tel que : $\overrightarrow{CD} = 2 \cdot \overrightarrow{v}$
3. Placer le point F tel que : $\overrightarrow{w} = 4 \cdot \overrightarrow{EF}$

E.6 Sur une droite graduée, sont placés les points A, B, C, D, E :



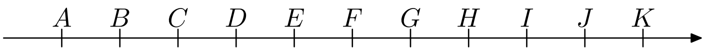
Pour chaque question, compléter les pointillés correctement :

(a) $\overrightarrow{BC} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{ED} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{AC}$

(c) $\overrightarrow{AC} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{CA}$ (d) $\overrightarrow{ED} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{CA}$

(e) $\overrightarrow{EA} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{AB}$ (f) $\overrightarrow{BA} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{BE}$

E.7 Le dessin ci-dessous représente une droite munit d'une graduation régulière.

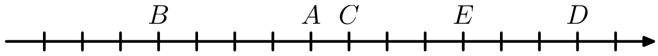


Compléter les pointillés par le nombre manquant :

(a) $\overrightarrow{DG} = \ldots\ldots\ \overrightarrow{DE}$ (b) $\overrightarrow{CE} = \ldots\ldots\ \overrightarrow{GI}$

(c) $\overrightarrow{DB} = \ldots\ldots\ \overrightarrow{DF}$ (d) $\overrightarrow{EI} = \ldots\ldots\ \overrightarrow{AC}$

E.8 Sur une droite graduée, on place les points A, B, C, D, E :



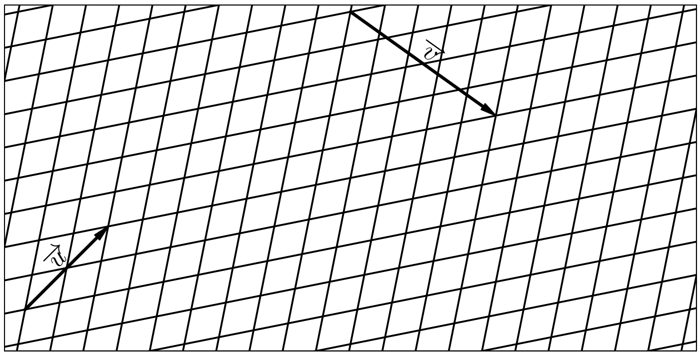
Pour chaque question, déterminer la valeur du nombre k vérifiant l'égalité :

(a) $\overrightarrow{BC} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{ED} = k \cdot \overrightarrow{AC}$

(c) $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{CA}$ (d) $\overrightarrow{ED} = k \cdot \overrightarrow{CA}$

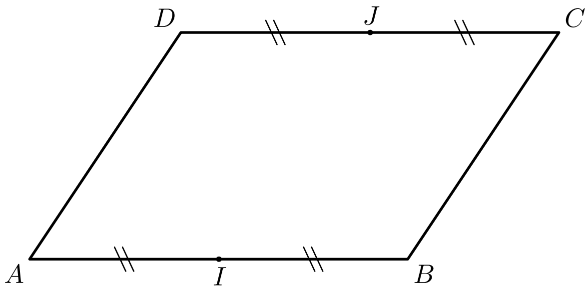
(e) $\overrightarrow{EA} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ (f) $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{BA}$

E.9 On considère, dans le plan, les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ci-dessous :



Tracer dans le quadrillage un représentant du vecteur $\overrightarrow{w}$ défini par : $\overrightarrow{w} = 2\,\overrightarrow{u} + 3\,\overrightarrow{v}$.

E.10 On considère le parallélogramme $ABCD$ représenté ci-dessous où les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.



Pour chaque question, donner sans justification un vecteur égal à l'expression proposée :

(a) $2 \times \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{BD}$ (b) $3 \cdot \overrightarrow{DJ} + 2 \cdot \overrightarrow{IA}$ (c) $2 \cdot \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{BC}$

3. *Multiplications par un reel*

E.11 Soient A et B deux points du plan, on note I le milieu du segment $[AB]$

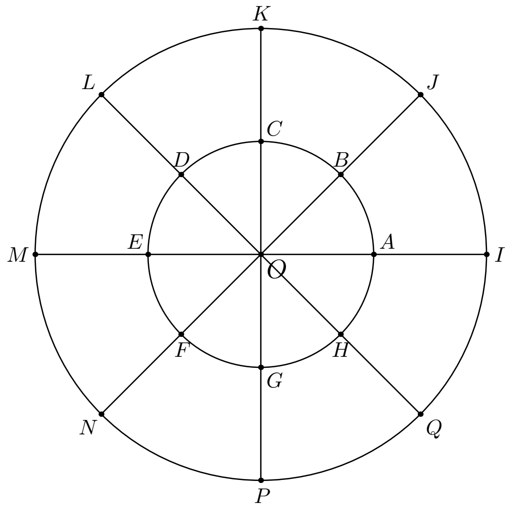
1. Compléter les pointillés pour vérifier la relation vectorielle suivante : $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{A\ldots\ldots}$
2. Recopier et compléter avec les mots "*double*" et "*moitié*" les phrases suivantes :

   (a) $\overrightarrow{AI}$ est ... de $\overrightarrow{AB}$ (b) $\overrightarrow{AB}$ est ... de $\overrightarrow{AI}$

3. En rapport avec la question précédente, compléter les pointillés avec le nombre adéquat :

   (a) $\overrightarrow{AI} = \ldots\ldots\ \overrightarrow{AB}$ (b) $\overrightarrow{AB} = \ldots\ldots\ \overrightarrow{AI}$

E.12 On considère les deux cercles concentriques de centre O et dont le rayon de l'un est le double de l'autre :



1. Justifier l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{LJ} = 2 \cdot \overrightarrow{DB}$
2. Sans justification, compléter les égalités :
   a. $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{\ldots\ldots} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{\ldots\ldots} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{\ldots\ldots}$
   b. $\overrightarrow{FB} = 2 \cdot \overrightarrow{\ldots\ldots} = 2 \cdot \overrightarrow{\ldots\ldots} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{\ldots\ldots}$

4. Simplification et manipulation algébrique

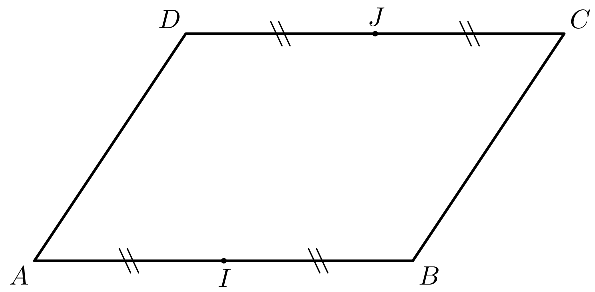
E.13 Dans le plan, on considère A, B, C trois points du plan non-alignés.

Pour chaque question, déterminer la valeur du réel k vérifiant l'égalité :

a. $3 \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

b. $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} + 2 \cdot \overrightarrow{BA} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

E.14 On considère le parallélogramme $ABCD$ représenté ci-dessous où les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.



À l'aide des points de la figure, donner un représentant de la somme : $2 \cdot \overrightarrow{AJ} + 2 \cdot \overrightarrow{CB}$

5. Vecteurs et distributivité

E.15

Proposition : dans le plan, on considère les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et un réel k. On a les deux identités ci-dessous :
- $k \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k \cdot \overrightarrow{u} + k \cdot \overrightarrow{v}$
- $k \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = k \cdot \overrightarrow{u} - k \cdot \overrightarrow{v}$

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Simplifier chacune des sommes vectorielles suivantes :

a. $3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$

b. $2 \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - \overrightarrow{u}$

d. $-(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + 2 \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$

e. $\frac{2}{3} \cdot \left(2 \cdot \overrightarrow{u} - \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{v}\right) - \frac{1}{6}\overrightarrow{u}$

E.16 Dans le plan, on considère A, B, C trois points du plan non-alignés.

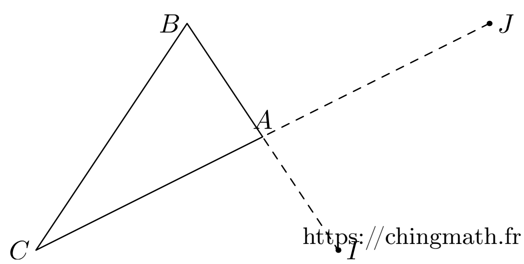
Pour chaque question, déterminer la valeur du réel k vérifiant l'égalité :

a. $2 \cdot \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AC}$

b. $\overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{BC} = k \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})$

6. Décomposition dans une base vectorielle

E.17 Dans le plan, on considère le triangle quelconque ABC. On note respectivement I et J les symétriques respectifs de B et de C par rapport à A :



Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$, donner les coordonnées des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{IA}$ b) $\overrightarrow{AJ}$ c) $\overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{CB}$ e) $\overrightarrow{IJ}$ f) $\overrightarrow{IC}$

E.18 Dans le plan, on considère les trois points A, B, C. On considère le vecteur $\overrightarrow{v}$ défini par :

$$\overrightarrow{v} = \frac{5}{6}\cdot\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{CA}$$

1) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{v}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

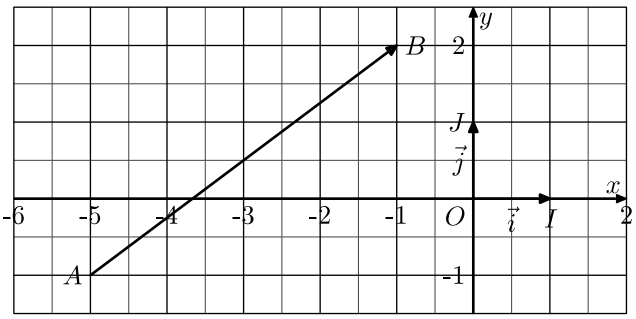
2) Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$, donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$

7. Base vectorielle et introduction aux opérations sur les coordonnées

E.19

Définition : dans le plan muni d'un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$, on appelle vecteur unitaire des abscisses *(resp. des ordonnées)*, noté $\overrightarrow{i}$ *(resp.* $\overrightarrow{j}$*)*, le vecteur $\overrightarrow{OI}$ *(resp.* $\overrightarrow{OJ}$*)*.

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les deux points A et B représentés ci-dessous :



1) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base vectorielle $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$. C'est-à-dire, compléter les pointillés de l'égalité : $\overrightarrow{AB} = \ldots\ldots\times\overrightarrow{i} + \ldots\ldots\times\overrightarrow{j}$

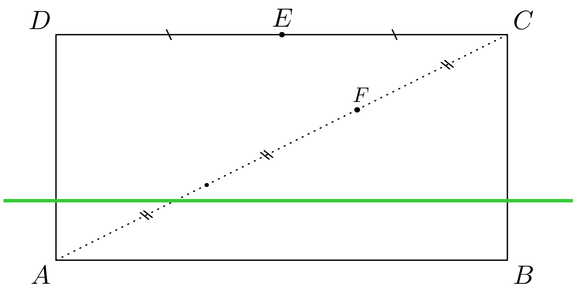
2) a) Donner les coordonnées des points A et B.

b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3) Quelle comparaison peut-on faire des coordonnées d'un vecteur et de sa décomposition dans la base vectorielle des vecteurs unitaires du repère?

8. Coordonnées de points

E.20 On considère le rectangle $ABCD$ représenté ci-dessous



On considère le plan muni du repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)$.

1) a) Compléter les pointillés dans l'égalité :
$\overrightarrow{AC} = \ldots\cdot\overrightarrow{AB} + \ldots\cdot\overrightarrow{AD}$
En déduire les coordonnées du point C.

b) Donner les coordonnées des points A, B, D.

2) Le point E est le milieu du segment $[CD]$. Déterminer les coordonnées du point E.

3) On définit le F par l'égalité : $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{CA}$
Donner les coordonnées du point F.

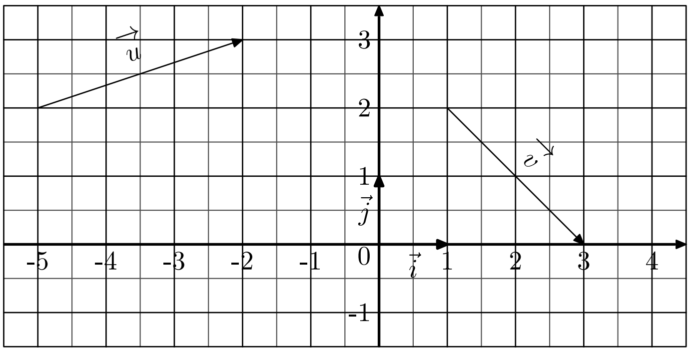
9. Opérations sur les coordonnées

E.21

Proposition : soit $\overrightarrow{u}\,(x\,;y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x'\,;y')$ deux vecteurs et k un nombre réel *($k\in\mathbb{R}$)*.

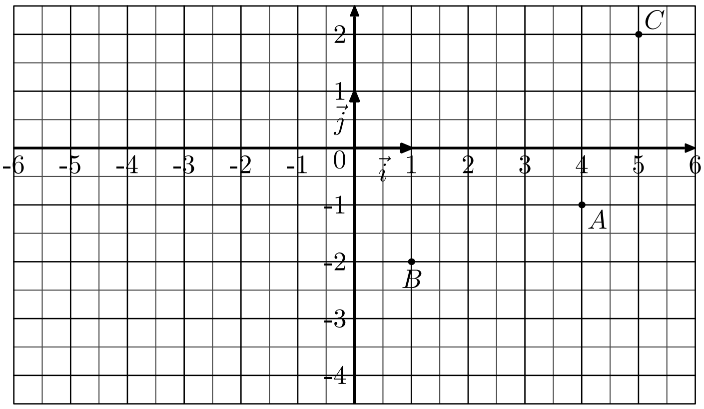
- Le vecteur $-\overrightarrow{u}$, opposé du vecteur $\overrightarrow{u}$, a pour coordonnées : $-\overrightarrow{u} = (-x\,;-y)$
- La somme $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\,(x+x'\,;y+y')$
- Le vecteur $k\times\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées : $k\times\overrightarrow{u}\,(k\times x\,;k\times y)$

Dans le plan muni du repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$, on considère les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés ci-dessous :



1. Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
2. Soit $\vec{w}$ le vecteur défini par : $\vec{w} = \vec{u}+2\cdot\vec{v}$
   a. Donner les coordonnées du vecteur $\vec{w}$.
   b. Tracer le vecteur $\vec{w}$.
3. Soit $\vec{z}$ le vecteur défini par : $\vec{z} = \vec{u} - \vec{v}$
   a. Donner les coordonnées du vecteur $\vec{z}$.
   b. Tracer le vecteur $\vec{z}$

E.22 On considère muni du repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ orthonormé et des trois poins A, B, C représentés ci-dessous :



1. a. Donner, sans justification, les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}$
   b. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ défini par : $\vec{u} = 3\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$
2. Déterminer l'unique nombre réel k $(k\in\mathbb{R})$ vérifiant : $\vec{u} = k\times\overrightarrow{AB}$

10. *Opérations et recherche des coordonnées d'un point*

E.23 On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ orthonormé et les trois points A, B et C de coordonnées respectives $(-2\,;1)$, $(0\,;3)$ et $(3\,;0)$.

1. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
2. On considère le point D vérifiant la relation : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$
   a. En notant $(x_D\,;y_D)$ les coordonnées du point D, justifier qu'on a les deux égalités :
   $$\begin{cases} x_D + 2 = 7 \\ y_D - 1 = 1 \end{cases}$$
   b. En déduire les coordonnées du point D.

E.24 On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ quelconque et les trois points suivants déterminés par leurs coordonnées : $A(2\,;1)$; $B(3\,;2)$

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $3\cdot\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que :
$$\overrightarrow{AD} = 3\cdot\overrightarrow{AB}.$$

E.25 On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ quelconque et les trois points suivants déterminés par leurs coordonnées : $A(2\,;1)$; $B(3\,;2)$; $C(-1\,;-1)$

1. Déterminer les coordonnées du vecteur défini par l'expression : $2\cdot\overrightarrow{AB}-4\cdot\overrightarrow{AC}$
2. Déterminer les coordonnées du point E vérifiant la relation : $\overrightarrow{AE}=2\cdot\overrightarrow{AB}-4\cdot\overrightarrow{AC}$

E.26 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$, on considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$A(2\,;1)$; $B(-1\,;3)$; $C(0\,;-2)$

Déterminer les coordonnées du point N vérifiant la relation vectorielle suivante : $4\cdot\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{BN} - 2\cdot\overrightarrow{CN} = \vec{0}$

11. *Colinéarité de vecteurs*

E.27

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nul du plan. Deux vecteurs sont dits **colinéaire** s'il existe un nombre réel k tels que : $\vec{u} = k\cdot\vec{v}$

Le nombre réel k s'appelle le **coefficient de colinéarité** de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $2\vec{u} = 3\vec{v}$
   Justifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et que leur coefficient de colinéarité est $\dfrac{3}{2}$.
2. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.
   Justifier que ces deux vecteurs sont colinéaires.

3. Pour chacune des questions ci-dessous, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Déterminer la valeur du coefficient de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$:

a. $\frac{1}{2}\cdot\vec{u} = \frac{3}{4}\cdot\vec{v}$ b. $3\cdot\vec{u} - 2\cdot\vec{v} = \vec{0}$

E.28 On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. Pour chaque question, déterminer si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
S'ils le sont, donner le coefficient associé de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$:

a. $\vec{u}\,(-1\,;2)$; $\vec{v}\,(4\,;-8)$ b. $\vec{u}\,(3\,;2)$; $\vec{v}\,(9\,;4)$

c. $\vec{u}\,(2\,;3)$; $\vec{v}\,(4{,}2\,;6{,}3)$ d. $\vec{u}\,(0{,}7\,;4{,}1)$; $\vec{v}\,(-2{,}8\,;16{,}4)$

E.29 Pour chaque question, préciser si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et, le cas échéant, donner le coefficient de colinéarité du vecteur $\vec{u}$ par rapport au vecteur $\vec{v}$:

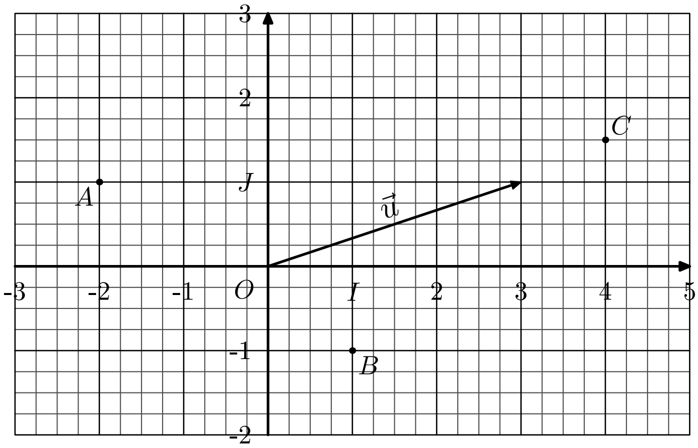
a. $\vec{u}\,(-2\,;-10)$ et $\vec{v}\,(4\,;20)$ b. $\vec{u}\,(0\,;5)$ et $\vec{v}\,(-5\,;0)$

E.30 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on considère les cinq points :
$A(2\,;-2)$; $B(11\,;-14)$; $C(-3\,;1)$; $D(5\,;3)$; $E(12\,;-19)$

Parmi les quatre vecteurs ci-dessus, un seul est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Lequel ? Justifier votre réponse.

$\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{CE}$

E.31 On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ et on considère les points A, B et C ci-dessous :



1. a. Donner les coordonnées des points A, B et C.
   b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   c. En déduire les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ défini par :
   $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{BC}$
2. Justifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

12. *Colinéarité et manipulation algébrique*

E.32 Soit A, B, C et D quatre points du plan vérifiant la relation :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

E.33 Pour chacune des questions ci-dessous, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Déterminer la valeur du coefficient de colinéarité de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{v}$:

a. $3\cdot(\vec{u} - 2\cdot\vec{v}) = \vec{0}$ b. $-2\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = 2\cdot\vec{u} + 3\cdot\vec{v}$

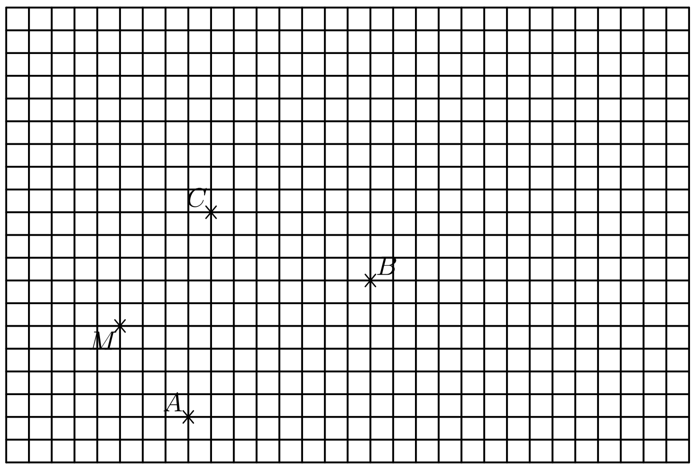
E.34 Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que :
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + 2\cdot\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

1. Établir l'égalité : $\overrightarrow{AB} = -2\cdot\overrightarrow{CD}$
2. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$?

E.35 Soit A, B, C et D quatre points du plan vérifiant la relation :
$\overrightarrow{AC} - 3\cdot\overrightarrow{BD} + 2\cdot\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

E.36 Dans le plan, représenté ci-dessous muni d'un quadrillage, on considère les points A, B, C, M :



Donner un représentant du vecteur $\vec{u}$ défini par la relation :
$\vec{u} = 2\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$

1. Placer le point N tel que : $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$.
2. On définit le vecteur $\vec{v}$ défini par : $\vec{v} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$
   Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

E.37 Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que :
$5\cdot\overrightarrow{AD} = 2\cdot\overrightarrow{AC} + 3\cdot\overrightarrow{BD}$

Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

E.38 Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que :

$$3\cdot\overrightarrow{AD} + 4\cdot\overrightarrow{BC} = 7\cdot\overrightarrow{AC}$$

Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

E.39 Soit A, B, C trois points du plan vérifiant la relation :

$$-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\cdot\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$$

1. Montrer que ces trois points vérifient : $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{AC}$
2. Que peut-on dire des points A, B, C ?

E.40 Dans le plan, on considère un triangle ABC non aplati. On considère les trois points M, N et P définis par :

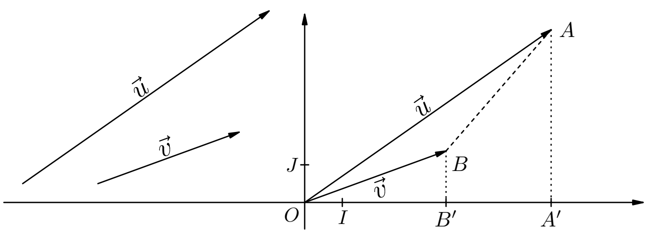
$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{BA} \quad ; \quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{AP} = 2\cdot\overrightarrow{AC}$$

Montrer que les points M, N et P sont alignés.

13. *Introduction au critère de colinéarité*

E.41 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x\,;y)$ et $\overrightarrow{v}(x'\,;y')$ tels que :

$0 < x' < x \quad ; \quad 0 < y' < y$



On considère les deux points A et B tels que :

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u} \quad ; \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$

1. a. Exprimer les aires des figures suivantes en fonction de x, x', y et y' :
   $OBB' \quad ; \quad OAA' \quad ; \quad AA'B'B$
   b. En déduire l'expression de l'aire du triangle OAB en fonction de x, x', y et y'.
2. a. Que peut-on dire des points O, A, B lorsque : $x\times y' - x'\times y = 0$?
   b. La réciproque est-elle vraie?

14. *Critères de colinéarités*

E.42

Définition : soit $\overrightarrow{u}(x\,;y)$ et $\overrightarrow{v}(x'\,;y')$, on appelle **déterminant des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$**, noté $\det(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$, défini par :

$\det(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = x\times y' - x'\times y$

Pour chacun des couples de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ défini ci-dessous, déterminer la valeur de $\det(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$:

a. $\overrightarrow{u}(2\,;-1)$; $\overrightarrow{v}(3\,;4)$ b. $\overrightarrow{u}(-5\,;1)$; $\overrightarrow{v}(2\,;-2)$

E.43

Proposition : Dans le plan muni d'un repère, on considère les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires entre eux si, et seulement si, leur déterminant est nul.

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$ et les quatre points :

$A(3\,;-5) \quad ; \quad B(1\,;-1) \quad ; \quad C(13\,;2) \quad ; \quad D(18\,;-8)$

Établir que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

E.44 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$, on considère les deux vecteurs :

$$\overrightarrow{u}\Big(\big(\sqrt{2}+\sqrt{3}\big)^2\,;1-\sqrt{10}\Big)$$

$$\overrightarrow{v}\Big(5\sqrt{2}+4\sqrt{3}\,;\sqrt{2}-2\sqrt{5}\Big)$$

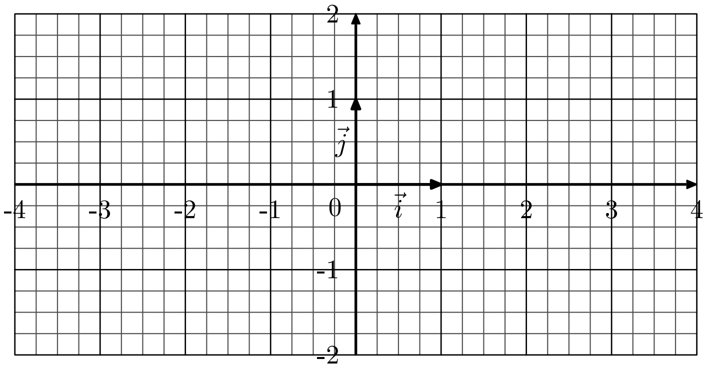
Établir que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

15. *Parallélisme et colinéarité*

E.45 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$, on considère les trois points : $A(-3\,;-1)$; $B(1\,;5)$; $C(-1\,;2)$

Montrer que les points A, B, C sont alignés.

E.46 On considère le plan muni du repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,\right)$ représenté ci-dessous :



On considère les quatre vecteurs ci-dessous :

$$\vec{u}\left(\frac{9}{4}\,;-\frac{3}{4}\right) \quad ; \quad \vec{v}\left(\frac{7}{2}\,;-\frac{3}{2}\right) \quad ; \quad \vec{w}\left(-\frac{15}{4}\,;\frac{5}{4}\right)$$

1. Représenter les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ avec pour origine le point O.
2. a. Conjecturer la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ entre eux.

   b. Établir votre conjecture.

E.47 On munit le plan d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,\right)$ et les trois points :

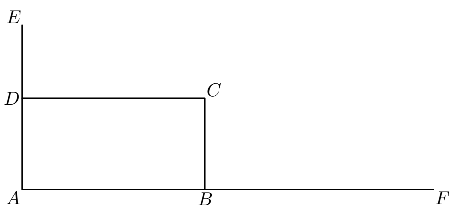
$A\left(2\sqrt{2}+1;3+2\sqrt{2}\right)$; $B\left(\sqrt{2}-1;\sqrt{2}+1\right)$; $C\left(\sqrt{2}+5;\sqrt{2}+7\right)$

Montrer que les points A, B et C sont alignés.

16. *Modélisation et colinéarité*

E.48 Dans le plan, on considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB=4\,cm$ et $AD=2\,cm$ et les deux points E et F vérifiant :

- $F\in[AB]$ et $AF=9\,cm$
- $E\in[AD]$ et $AE=3{,}6\,cm$

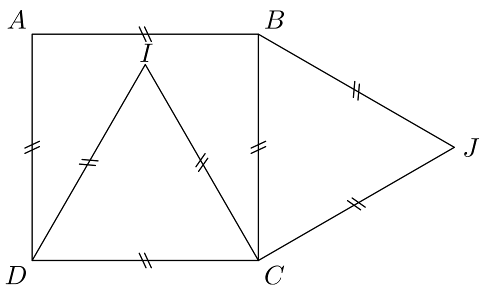


On munit le plan du repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)$.

1. a. Compléter les égalités suivantes :
   $\overrightarrow{AE}=\ldots\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AF}=\ldots\overrightarrow{AB}$

   b. Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)$, donner les coordonnées des six points de ce plan .
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$.
3. En déduire que les points C, E, F sont alignés.

E.49 On considère la figure ci-dessus composée d'un carré $ABCD$ et de deux triangles équilatéral DIC et BJC :



Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

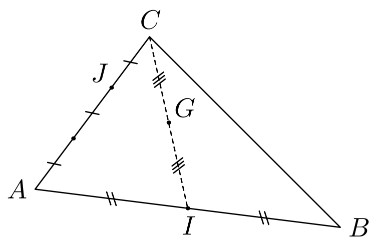
Démontrer que les points A, I, J sont alignés.

(Dans un triangle équilatéral de côté a, on admet que toutes ses hauteurs ont pour longueur $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$).

E.50

On considère le triangle ci-contre où I et G sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CI]$, le point J est défini par la relation :

$$\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{CA}$$



On considère la base vectorielle $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$.

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ dans la base vectorielle $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$.
2. Établir que la décomposition vectorielle du vecteur $\overrightarrow{AG}$:
   $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}$
3. En déduire l'alignement des points B, G, J.

17. *Colinéarité et recherche des coordonnées*

E.51 On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,\right)$.

Soit A, B, C et D quatre points du plan de coordonnées :

$$A(-5\,;1) \quad ; \quad B(2\,;4) \quad ; \quad C(-1\,;-2) \quad ; \quad D(3\,;y_D)$$

Déterminer les coordonnées du point D tel que les droites (AB) et (CD) soient parallèles et que le point D ait 3 pour abscisse.

E.52 On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j})$.
Soit A, B et C trois points du plan de coordonnées respectives : $(4\,;-1)$; $(1\,;3)$; $(1\,;-2)$

Déterminer les coordonnées du point D tel que les droites (AB) et (CD) soient parallèles et que le point D ait 3 pour abscisse.

E.53 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j})$ orthonormé, on considère les trois points suivants :

$A(-1\,;1)$; $B(-3\,;-1)$; $C(2\,;3)$

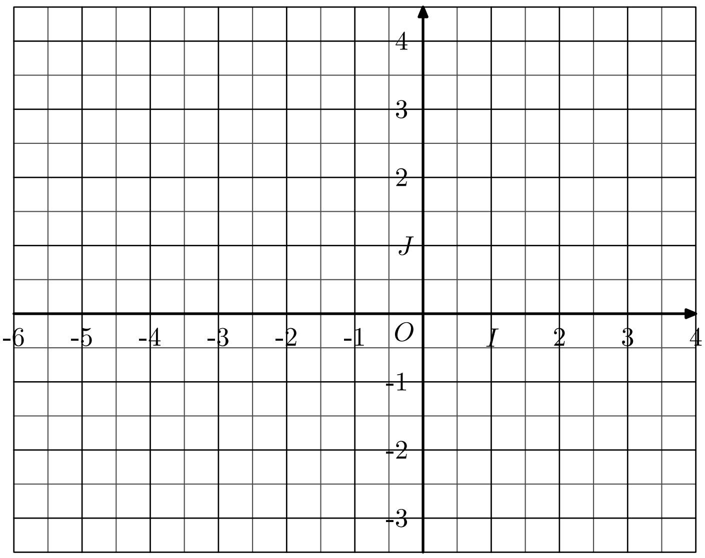
1. Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier votre réponse.
2. Déterminer les coordonnées de l'unique point D ayant pour abscisse -2 tel que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

E.54 On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j})$.
Soit A, B, C, D quatre points du plan de coordonnées respectives : $A\left(2\,;\frac{8}{3}\right)$; $B\left(\frac{2}{3}\,;2\right)$; $C\left(\frac{4}{5}\,;0\right)$; $D\left(x_D\,;-\frac{1}{2}\right)$
où x_D est un nombre réel.

Sachant que les droites (AB) et (CD) soient parallèles, déterminer les coordonnées du point D.

18. *Géométrie vectorielle*

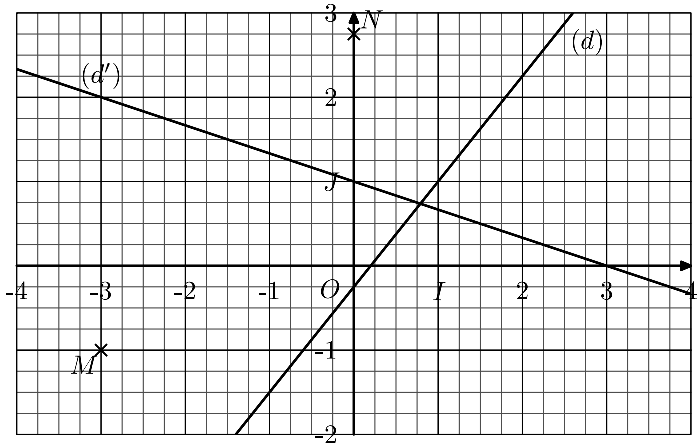
E.55 On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j})$ orthonormé :



1. Placer les trois points A, B, C dans le repère ci-dessous :

   $A(3\,;-3)$; $B(-4\,;3)$; $C(-5\,;-1)$
2. Déterminer les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$.
3. a. Déterminer les longueurs AB et MC
   b. Établir que le triangle ABC est rectangle en C.
4. On note N le point d'intersection de l'axe des ordonnées avec la droite parallèle à (CM) passant par le point B.
   a. Placer le point N dans le repère.
   b. Déterminer les coordonnées du point N.

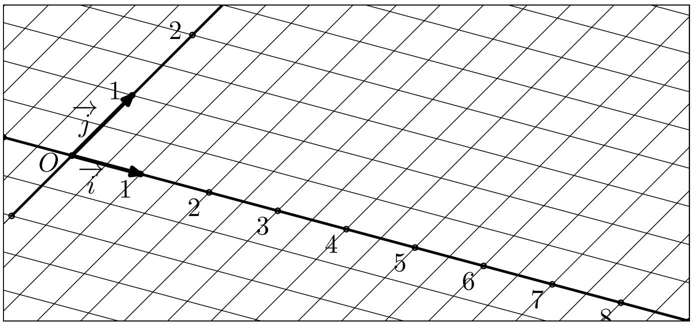
E.56 Dans le plan muni du repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les droites (d) et (d') ci-dessous :



1. Déterminer graphiquement les équations réduites des droites (d) et (d').
2. a. Donner graphiquement les coordonnées des points M et N.
   b. Justifier que la droite (MN) est parallèle à la droite (d).
3. Soit Q un point de la droite (d) tel que la droite (MQ) soit parallèle à (d'). On note x l'abscisse du point Q.
   a. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{u}\left(1\,;-\frac{1}{3}\right)$ sont colinéaires.
   b. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{MQ}$ a pour coordonnée en fonction de x : $\overrightarrow{MQ}\left(x+3\,;\frac{5}{4}\cdot x+\frac{3}{4}\right)$
   c. Résoudre l'équation : $x+3=-3\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot x+\frac{3}{4}\right)$.
   d. En déduire les coordonnées du point Q.

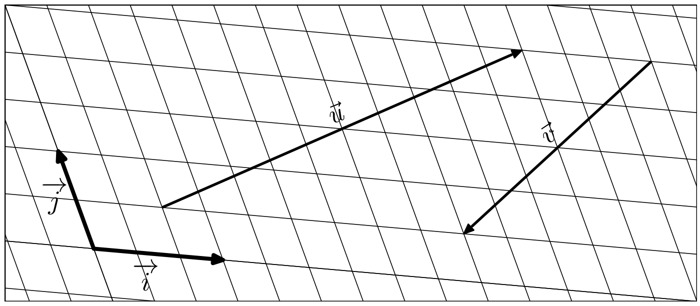
19. *Approfondissement : repères quelconques*

E.57 On munit le plan d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,)$ quelconque représenté ci-dessous :



1. a. Dans le repère ci-dessous, placer les deux points :
   $A(-1\,;2)$; $B(4\,;1)$
   b. Justifier graphiquement que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(\,5\,;-1\,)$.
2. On considère les deux vecteurs suivants :
   $\vec{u}\,(3\,;2)$; $\vec{v}\,(\,-2\,;-2\,)$
   Donner un représentant de votre choix de chacun de ces deux vecteurs dans le repère ci-dessus.

E.58 Dans le plan, on considère les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaire représentés ci-dessous :



La représentation des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont également représentés ci-dessus.

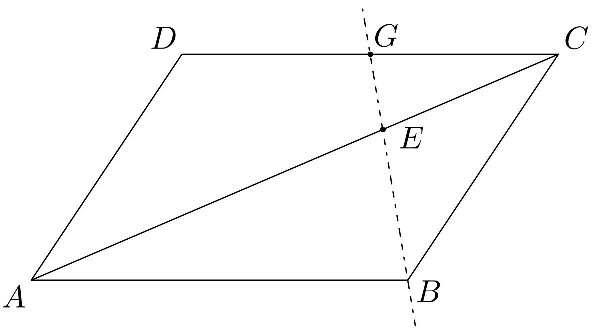
1. Dans la base vectorielle de $(\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,)$, donner les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Par la méthode de votre choix, déterminer les coordonnées du vecteur somme : $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$.
3. Par la méthode de votre choix, déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{t}$ réalisant l'égalité suivante :
   $\vec{v}=\vec{u}+\vec{t}$

20. *Approfondissement : base quelconque et fonction affine*

E.59 Soit $ABCD$ un parallélogramme. On note E le point appartenant au segment $[AC]$ vérifiant :

$$AE=\frac{2}{3}\cdot AC$$

Les droites (BE) et (CD) s'interceptent au point G.



Le plan est muni du repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$.

1. Donner, sans justification, les coordonnées des points :
   A ; B ; C ; D ; E
2. a. Justifier que la droite (BE) admet pour équation :
   $y=-\dfrac{2}{3}\cdot x+\dfrac{2}{3}$
   b. En déduire les coordonnées du point G.
3. Que représente le point G pour le segment $[CD]$? Justifier.

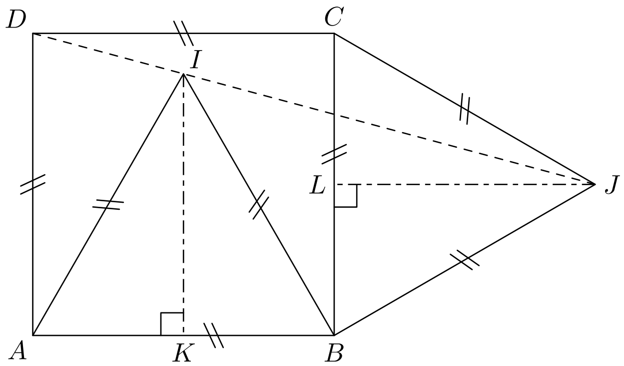
E.60 On considère un carré $ABCD$ de côté $1\,cm$.

- Le point I est l'unique point tel que le triangle AIB soit équilatéral et soit contenu dans le carré $ABCD$;
- Le point J est l'unique point tel que le triangle BCJ soit équilatéral et soit extérieur au carré $ABCD$.

On note :

- K est le pied de la hauteur issue du sommet I dans le triangle AIB.
- L est le pied de la hauteur issue de J dans le triangle BCJ.

Voici la représentation de cette configuration :



Le but de l'exercice est de démontrer que les points D, I et J sont alignés.

On considère le plan munit du repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})$.

1. Quelle est la nature du repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})$?

(2) (a) Déterminer la longueur du segment $[KI]$.

(b) Donner les coordonnées du point I dans le repère considéré.

(3) En admettant que la longueur LJ mesure $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donner les coordonnées du point J.

(4) Considérons la droite (d) d'équation :

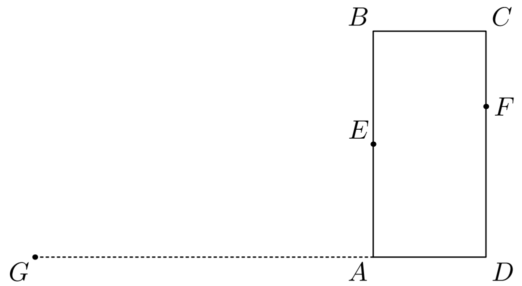
$$y=\left(\sqrt{3}-2\right)x+1$$

Montrer que les trois points D, I et J appartiennent à la droite (d).

21. *Approfondissement : décomposition de vecteurs dans une base quelconque*

E.61 Considérons un rectangle $ABCD$ et les trois points E, F, G définis par :

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{DF}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{DC} \quad ; \quad \overrightarrow{DG}=4\cdot\overrightarrow{DA}$$



On considère les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ non colinéaire formant une base vectorielle.

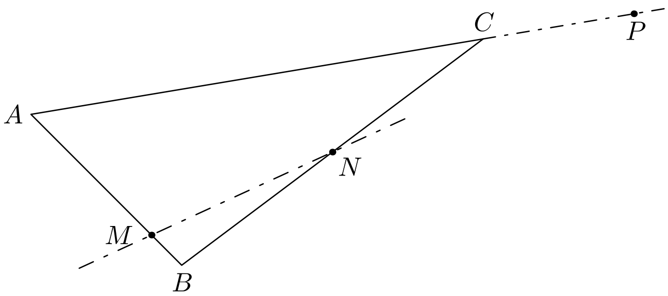
(1) Déterminer la décomposition du vecteur $\overrightarrow{EF}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)$.

(2) Établir la décomposition du vecteur $\overrightarrow{EG}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)$:

$$\overrightarrow{EG}=-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}-3\cdot\overrightarrow{AD}$$

(3) Démontrer que les point E, F et G sont alignés.

E.62 Dans le plan, on considère le triangle ABC représenté ci-dessous :



Les points M, N et P sont définis par les relations :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{4}{5}\cdot\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{AP}=\frac{4}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$$

L'étude s'effectuera dans le repère $\left(B\,;\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)$.

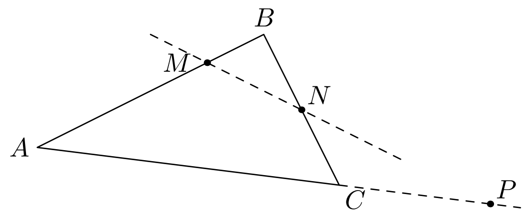
(1) Donner les coordonnées des points M et N.

(2) (a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

(b) En déduire les coordonnées du point P.

(3) Justifier que les points M, N et P sont alignés.

E.63 Dans le plan, on considère le triangle ABC :



On considère les points M et N définis par :

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{BA} \quad ; \quad \overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}$$

On définit le point P par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AP}=\alpha\cdot\overrightarrow{AC} \quad \text{où } \alpha\in\mathbb{R}$$

(1) Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

(2) On munit le plan du repère $\left(B\,;\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)$:

(a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ et du vecteur $\overrightarrow{MP}$ en fonction du réel α.

(b) Déterminer la valeur de α afin que les points M, N et P soient alignés.

