

Seconde / Etude de fonctions



ChingQuizz : 1 exercice disponibles pour l'évaluation par QCM :

1. Encadrement par une fonction affine

E.1 Soit x un nombre réel ayant pour encadrement $2 \leq x \leq 4$.

Pour chaque question, déterminer un encadrement de l'expression littérale proposée :

- (a) $2x + 1$ (b) $-x + 3$ (c) $2x$ (d) $3x - 5$

E.2 Soit x un nombre réel ayant pour encadrement $-1 < x \leq 3$.

Pour chaque question, déterminer un encadrement de

l'expression littérale proposée :

- (a) $3x + 1$ (b) $-2x - 5$

E.3 Soit x un nombre réel ayant pour encadrement $-1 < x \leq 3$.

Pour chaque question, déterminer un encadrement de l'expression littérale proposée :

- (a) $3x + 1$ (b) $-2x - 5$ (c) $x + 2$ (d) $1 - 2x$

2. Encadrement par une fonction du second degré

E.4 Soit x un nombre réel ayant pour encadrement : $2 \leq x \leq 4$.

Pour chaque question, déterminer un encadrement de l'expression littérale proposée :

- (a) x^2 (b) $2 - x^2$ (c) $(x - 4)^2$ (d) $(x + 1)^2 + 1$

E.5 Soit x un nombre réel ayant pour encadrement : $1 < x \leq 4$.

Pour chaque question, déterminer un encadrement de l'expression littérale proposée :

- (a) $(x - 5)^2 - 2$ (b) $(x + 1)^2 + 1$

E.6 Soit x un nombre réel tel que $0 < x \leq 2$. Donner les

encadrements des nombres suivants :

- (a) $(x - 2)^2$ (b) $-2x^2 - 1$ (c) $(x + 1)^2 + 1$

E.7 Soit x un nombre réel vérifiant l'encadrement $2 \leq x < 5$.

Pour chaque question, déterminer un encadrement de l'expression littérale proposée :

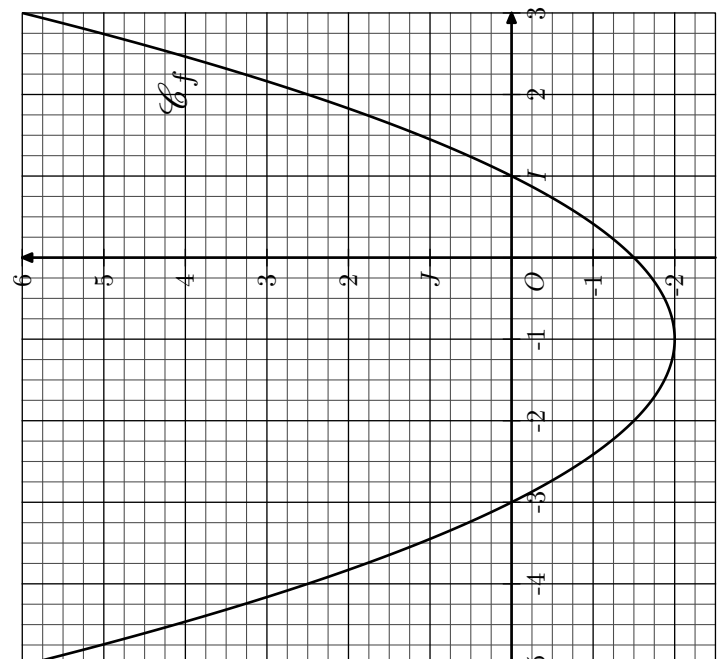
- (a) $(1 - x)^2$ (b) $(x - 4)^2$

E.8 À partir de l'encadrement $2 \leq x \leq 4$, en déduire les encadrements des expressions algébriques suivantes :

- (a) $3(x - 4)^2 + 2$ (b) $x^2 + 1$ (d) $(2x - 6)^2$

3. Fonction carré : étude de fonctions du second degré

E.9 On considère la fonction f définie sur $[-5; 3]$ dont la représentation est donnée ci-dessous :



Les questions suivantes doivent être traitées graphiquement et sans justification.

- ① Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- ② Dresser le tableau de signes de la fonction f .

③ Résoudre l'inéquation : $f(x) > \frac{5}{2}$

④ Déterminer les images des intervalles suivants :

a $[1; 3[$
b $[-4; -2[$
c $\left[-\frac{15}{4}; 1\right]$

4. Encadrement par une fonction rationnelle

E.10 Soit x un nombre réel vérifiant l'encadrement : $2 \leq x < 5$.

Pour chaque question, déterminer un encadrement de l'expression littérale proposée :

a $\frac{3}{2 \cdot x - 3}$

E.11 Soit x un nombre réel tel que : $1 < x \leq 4$.

Pour chaque question, déterminer un encadrement de l'expression littérale proposée :

a $\frac{1}{x}$
b $\frac{1}{x} + 2$
c $1 - \frac{1}{x+2}$

E.12 Soit x un nombre réel tel que : $-1 < x \leq 3$.

Pour chaque question, déterminer un encadrement de

l'expression littérale proposée :

a $\frac{1}{x+2}$
b $\frac{1}{x^2+1}$
c $\frac{2}{(x-1)^2+1}$

E.13 Soit x un nombre réel ayant pour encadrement $-1 < x \leq 3$.

Pour chaque question, déterminer un encadrement de l'expression littérale proposée :

a $\frac{1}{x+2}$
b $\frac{1}{x^2+1}$
c $\frac{2}{(x-1)^2+1}$

E.14 À partir de l'encadrement $2 \leq x \leq 4$, en déduire les encadrements des expressions algébriques suivantes :

a $\frac{1}{x+2}$
b $\left(\frac{1}{x}\right)^2$
c $\frac{x^2}{2x+1}$

5. Fonction inverse : étude de fonction homographique

E.15 On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{3x+1}{x-3}$$

① Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, on a :

$$\frac{3x+1}{x-3} = 3 + \frac{10}{x-3}$$

② Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty; 3[$.

E.16 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$g(x) = \frac{x+1}{2-x}$$

① Déterminer les réels a et b réalisant l'identité :

$$g(x) = a + \frac{b}{2-x}$$

② Dresser le tableau de variations de la fonction g

E.17 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{8x-11}{2x-3}$$

① Déterminer les réels a et b réalisant l'identité :

$$f(x) = a + \frac{b}{2x-3}$$

② Dresser le tableau de variations de la fonction f .

E.18 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{8-5 \cdot x}{x-2}$$

① Déterminer les valeurs des nombres réels a et b réalisant l'identité ci-dessous :

$$f(x) = a + \frac{b}{x-2}$$

② Établir que la fonction f est croissante sur l'intervalle $] -\infty; 2[$.

E.19 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression :

$$f(x) = \frac{2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 1}{x^2 + 2 \cdot x + 2}$$

① Déterminer les deux réels a et b vérifiant l'identité :

$$f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2+1}$$

② a Déterminer le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.

b Démontrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $] -\infty; -1]$.

E.20 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{-4 \cdot x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

- 1 Démontrer l'égalité suivante : $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} - 4$
- 2 a Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $] -\infty ; 0[$.
- b Établir le sens de variation sur l'intervalle $] 0 ; +\infty[$ de

6. Racine carrée : utilisation

E.21 Soit f la fonction dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = -2\sqrt{x+1} + 3$$

- 1 Justifier que l'ensemble de définition de la fonction f est : $\mathcal{D}_f = [-1 ; +\infty[$
- 2 Établir que la fonction f est décroissante sur son ensemble définition.

E.22 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x} + 3}$$

- 1 Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+$.
- 2 Établir que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

E.23 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{-x^2 - 2 \cdot x + \frac{7}{9}}$$

- 1 a Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- b Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 2 Dans le plan muni d'un repère $(O ; I ; J)$, on considère la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f et le cercle $\mathcal{C}'$ de centre $A(-1 ; 0)$ et de rayon $\frac{4}{3}$.
 - a Montrer que tout point M de la courbe $\mathcal{C}_f$ appartient au cercle $\mathcal{C}'$.
 - b On considère le demi-cercle $\mathcal{E}$ formé par l'ensemble des points du cercle $\mathcal{C}'$ dont l'ordonnée est positive

la fonction f .

- c Dresser le tableau de variations de la fonction f (on indiquera les valeurs des extrêmes locaux).
- 3 Dédire de la question précédente, la valeur maximale de la fonction f .
- 4 a Déterminer algébriquement, les antécédents du nombre -3 par la fonction f .
- b Résoudre l'équation suivante : $f(x) = -x - 2$

ou nulle. Ce sous-ensemble peut se noter :

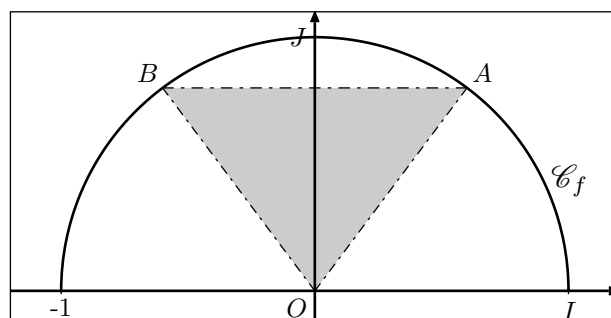
$$\mathcal{E} = \{M(x ; y) \in \mathcal{C}' \mid y > 0\}$$

Réciproquement, justifier que chaque point de $\mathcal{E}$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f .

E.24 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ par la relation :

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

dont la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative est donnée ci-dessous dans un repère $(O ; I ; J)$ ci-dessous :



Soit x un nombre réel appartenant à l'intervalle $] 0 ; 1[$. On note respectivement A et B les points de la courbe $\mathcal{C}_f$ respectivement d'abscisses x et $-x$.

Déterminer l'abscisse du point A afin que l'aire du triangle OAB soit maximale.

Indication : on pourra établir l'identité :

$$x^2 - x^4 = \frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$$

7. Fonction cube : utilisation

E.25 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 6 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 12$$

- 1 Établir que pour tout nombre réel x , on a :

$$f(x) = (x + 2)^3 + 4$$

- 2 Établir que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

8. Etude algébrique des variations

E.26 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = x^3 + x + 2$$

1 Soit a et b deux nombres réels quelconques. Déterminer l'identité :

$$f(a) - f(b) = (a - b) \cdot (b^2 + a \cdot b + a^2 + 1)$$

2 Établir que la fonction f est strictement croissante sur $] -\infty ; 0]$

E.27 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

1 Montrer que la fonction f est décroissante sur $]1 ; +\infty[$

2 a Soit a et b deux nombres réels distincts de 1. Montrer que :

$$f(a) - f(b) = \frac{b-a}{(a-1)(b-1)}$$

b En déduire que la fonction f est décroissante sur $] -\infty ; 1[$

E.28 On considère la fonction f définie par l'expression :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

2 a Pour tous nombres réels a et b , établir l'identité suivante :

$$f(b) - f(a) = \frac{(a-b)(a+b)}{(a^2+1)(b^2+1)}$$

b En déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_-$.

E.29 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{2 \cdot x^2 + x + 1}$$

1 Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2 a Soit a et b deux nombres réels, établir l'identité :

$$f(b) - f(a) = \frac{(b-a) \cdot (2 \cdot b + 2 \cdot a + 1)}{\sqrt{2 \cdot b^2 + b + 1} + \sqrt{2 \cdot a^2 + a + 1}}$$

b En déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $] -\frac{1}{4} ; +\infty[$

9. Un peu plus loin - ensemble de définition

E.30 On considère les deux fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto \sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{4x+3} \quad ; \quad g: x \mapsto \sqrt{(2x-1)(4x+3)}$$

1 a À l'aide d'une calculatrice graphique, tracer la courbe représentative de la fonction f , puis celle de la fonction g .

b Graphiquement, donner l'intervalle sur lequel ces deux fonctions coïncident.

2 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

3 a Déterminer le tableau de signes de l'expression algébrique $(2x-1)(4x+3)$.

b En déduire le domaine de définition de la fonction g .

E.31

1 Développer l'expression : $(x+1)(3-2x)(x-1)$.

2 On considère les deux fonctions f et g dont leurs images du nombre x sont définies de la manière suivante :

$$f(x) = \frac{-2x^3 + 3x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} \quad ; \quad g(x) = 3 - 2x$$

a Déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.

b Établir que les deux fonctions f et g sont égales sur un ensemble qu'on précisera.

E.32

1 On considère les deux fonctions f et g dont l'image de x est définie par les relations :

$$f(x) = \frac{-x^2 - 3x + 4}{(3x-2)(-x+1)} \quad ; \quad g(x) = \frac{x+4}{3x-2}$$

a Simplifier l'expression : $g(x) - f(x)$.

b Comparer les fonctions f et g .

2 On considère les deux fonctions j et ℓ définies par :

$$j(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{4-x}} \quad ; \quad \ell(x) = \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{4-x}}{4x-3}$$

a Déterminer l'ensemble de définition de ces deux fonctions.

b Développer l'expression suivante :

$$A = (\sqrt{3x+1} + \sqrt{4-x})(\sqrt{3x+1} - \sqrt{4-x})$$

c Montrer que les deux fonctions j et ℓ sont égales sur l'ensemble $[-\frac{1}{3}; 4] \setminus \{\frac{3}{4}\}$

E.33

1 On considère les deux fonctions :

$$f: x \mapsto 3x - 2 \quad ; \quad g: x \mapsto \frac{14x+7}{2x+1}$$

a Établir l'égalité suivante :

$$6x^2 + 13x + 5 = (2x+1)(3x+5)$$

b On considère la fonction $f+g$. Établir l'égalité :

$$(f+g)(x) = 3x + 5$$

c Donner l'ensemble sur lequel la fonction $f+g$ est définie.

2 On considère les deux fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+x} \quad ; \quad g: x \mapsto (x+1)(-3x+x^2)$$

a On considère la fonction $f \cdot g$. Établir l'égalité suivante :

$$(f \cdot g)(x) = 2x^2 - 5x - 3$$

b Donner l'ensemble sur lequel la fonction $f \cdot g$ est définie.

3 On considère les deux fonctions f et g définies par :

$$f: x \mapsto x^2 - x \quad ; \quad g: x \mapsto x + \sqrt{x}$$

a Établir l'égalité suivante :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - \sqrt{x}$$

b Donner l'ensemble sur lequel la fonction $\frac{f}{g}$ est définie.

10. Encadrements et sens de variation

E.34  Soit x un nombre réel :

- ① Supposons que $1 < x \leq 3$. Donner un encadrement de chacun des nombres suivants :

Ⓐ x^2

Ⓑ $1 - \frac{1}{x}$

Ⓒ $3 - 2x$

- ② Supposons que $-4 < x < 1$ et considérons y un nombre réel vérifiant l'encadrement $2 < y < 4$.

- Ⓐ Donner un encadrement des expressions suivantes :
 $x + y$; $(x + 4) \cdot y$

- Ⓑ Justifier, par un contre-exemple, que l'encadrement ci-dessous est faux :
 $-8 < x \cdot y < 4$

E.35  Soit x un nombre vérifiant l'encadrement : $3 < x \leq 5$

Déterminer un encadrement de chacune de ces expressions :

Ⓐ $2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x - 3\right)^2 - 2$

Ⓑ $\frac{1}{(2 - x)^2}$

11. Exercices non-classés

E.36 

- ① Soit a et b deux nombres appartenant à l'intervalle $[-2; 0]$ tels que $a < b$.

Établir la comparaison suivante : $\frac{3}{a^2+1} < \frac{3}{b^2+1}$

- ② En déduire le sens de variation, sur l'intervalle $[-2; 0]$, de la fonction f définie par : $f: x \mapsto \frac{3}{x^2+1}$