Seconde / Fonctions de référence

ChingEval : 2 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. *Fonction carré : variations*

E.1 Nous allons étudier la fonction carrée h définie par :

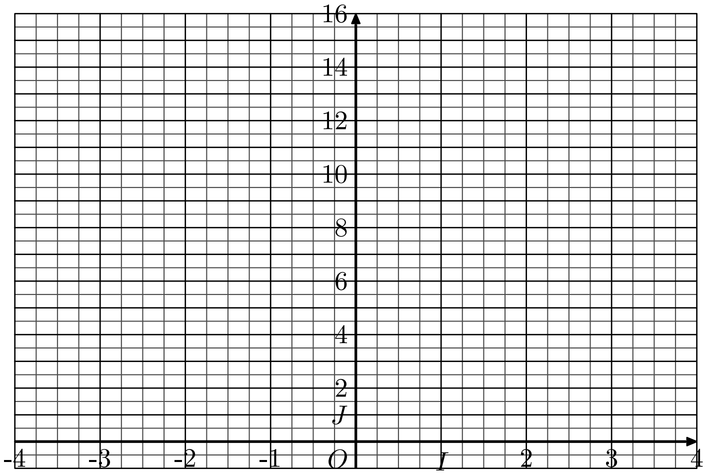
$f : x \longmapsto x^2$

(1) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction carré.

(2) (a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-3	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	2	4
$f(x)$							

(b) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessous :



(3) (a) Pour a et b non tous les deux nuls, établir l'égalité suivante : $f(b) - f(a) = (b+a)(b-a)$.

(b) En déduire le sens de variation de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$.

(4) La courbe représentative de la fonction f possède-t-elle un axe de symétrie ou un centre de symétrie?

E.2 Soit f la fonction carrée :

(1) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-10	$-\sqrt{5}$	$-\dfrac{3}{2}$	0	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$1+\sqrt{2}$
$f(x)$							

(2) (a) Que peut-on dire de la comparaison de deux nombres négatifs et de leurs carrés?

(b) Que peut-on dire de la comparaison de deux nombres positifs et de leurs carrés?

2. *Fonction carré : images d'intervalle*

E.3

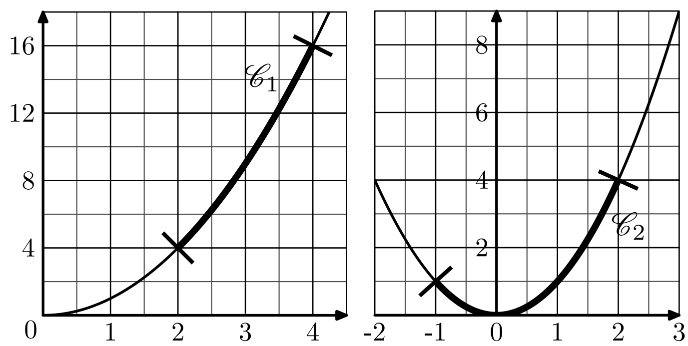
Définition : on appelle **image de l'intervalle $[a\,;b]$ par la fonction f**, l'ensemble constitué des images de tous les éléments de l'intervalle $[a\,;b]$.

Exemple :

Voici deux animations pour mieux appréhender l'image d'intervalles.

r513-1 r513-3

Les deux graphiques ci-dessous présente deux parties $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de la courbe représentative de la fonction carrée :



(1) (a) Déterminer l'ensemble de nombres formé par toutes les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_1$.

(b) Déterminer l'ensemble de nombres formé par toutes les ordonnées des points de la courbe $\mathscr{C}_1$.

(c) En déduire l'image de l'intervalle $[2\,;\,4]$.

(2) (a) Déterminer l'ensemble de nombres formé par toutes les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_2$.

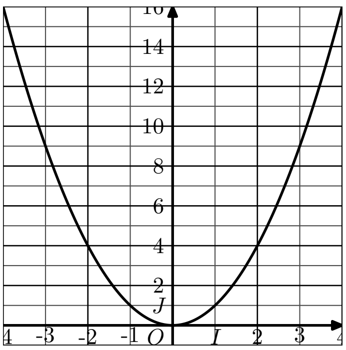
(b) Déterminer l'ensemble de nombres formé par toutes les ordonnées des points de la courbe $\mathscr{C}_2$.

c En déduire l'image de l'intervalle $[-1\,;2]$.

E.4 Ci-dessous dans un repère, est donnée la courbe représentative de la fonction carrée :

1. a Donner les deux intervalles I et J tels que :
   $I \subset \mathbb{R}_- \quad ; \quad J \subset \mathbb{R}_+ \quad ; \quad I \cup J = [-1\,;5]$

   b En déduire l'image de l'intervalle $[-1\,;5]$ par la fonction f.



2. Sans justification, donner l'image des intervalles suivants par la fonction carrée :

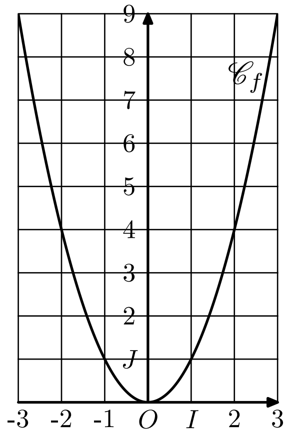
   a $]-4\,;2]$

   b $]-1\,;3[$

E.5 Donner, sans justification, les images des intervalles suivants par la fonction carrée :

a $]2\,;3]$ b $]-5\,;-1]$ c $]-2\,;4]$

E.6 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthornormal, est donnée ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction carrée :



Sans justification, recopier et compléter les assertions suivantes :

1. Si $x \in [1\,;3[$ alors $x^2 \in \ldots\ldots$
2. Si $x \in]-1\,;2]$ alors $x^2 \in \ldots\ldots$
3. Si $x \in [-3\,;-2] \cup [2\,;3[$ alors $x^2 \in \ldots\ldots$
4. Si $x \in]-\sqrt{11}\,;-2] \cup]\sqrt{2}\,;\sqrt{7}]$ alors $x^2 \in \ldots\ldots$

3. *Fonction carré : équations et inéquations*

E.7 Résoudre les équations :

a $x^2 = 2$ b $x^2 = 0$ c $x^2 = -1$

E.8 On note f la fonction carrée. Résoudre les inéquations :

a $f(x) \leqslant 10^{16}$ b $f(x) \geqslant \dfrac{9}{4}$ c $f(x) > \pi$

4. *Fonction inverse : variations*

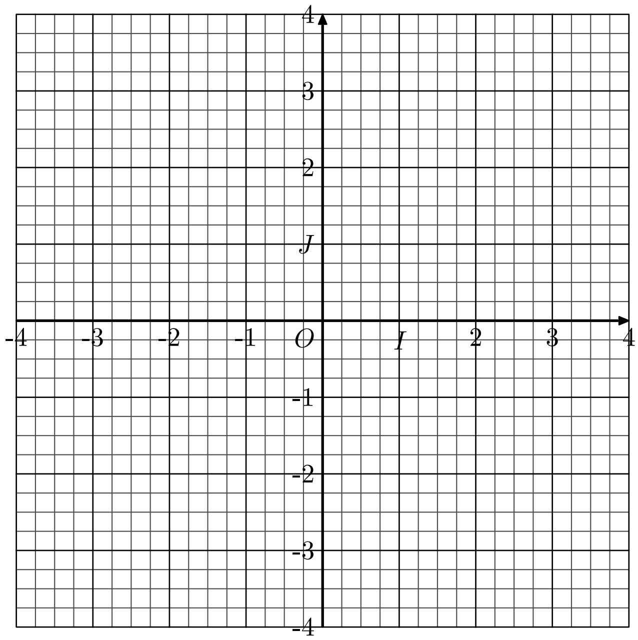
E.9 Nous allons étudier la fonction inverse f définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$$

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction inverse.
2. a Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-4	-2	-1	$-0{,}5$	$0{,}25$	1	2	4
$f(x)$								

   b Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessous :



3. a Pour a et b non tous les deux nuls, établir l'égalité suivante : $f(b) - f(a) = \dfrac{a-b}{a \cdot b}$.

   b En déduire le sens de variation de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. La courbe représentative de la fonction f possède-t-elle un axe de symétrie ou un centre de symétrie?

E.10

(1) Soit f la fonction qui, à tout nombre non-nul, renvoie son inverse.
Compléter le tableau avec les valeurs décimales des images arrondies au centième près :

x	-10	-3	-2	$-0{,}5$	$0{,}2$	$0{,}75$	2
$f(x)$							

(2) (a) Que peut-on dire de la comparaison de deux nombres négatifs et de leurs inverses?

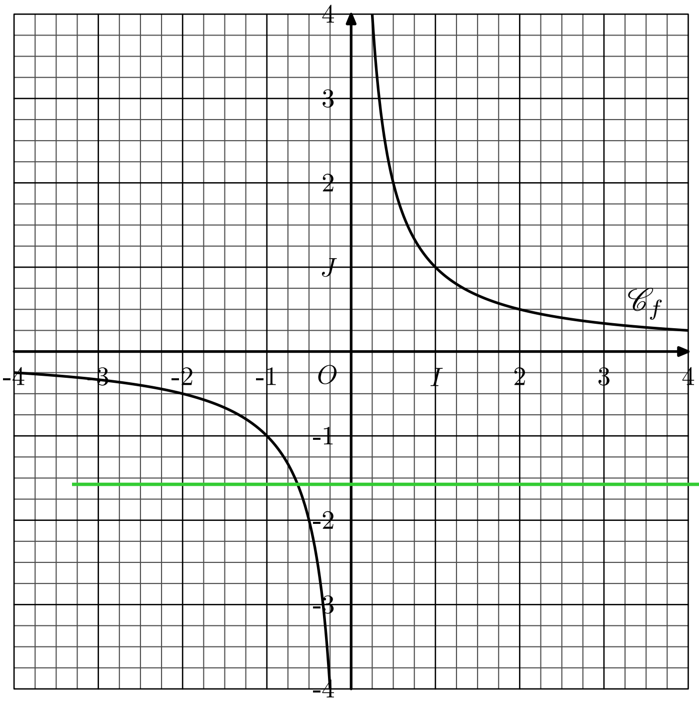
(b) Que peut-on dire de la comparaison de deux nombres positifs et de leurs inverses?

E.11 Comparez les couples de nombres suivants :

(a) $3\,;\,6$ (b) $\dfrac{1}{\pi}\,;\,\dfrac{1}{3}$ (c) $-\dfrac{1}{5{,}15}\,;\,-\dfrac{1}{5{,}105}$

5. *Fonction inverse : images d'intervalle*

E.12 On considère la fonction inverse notée f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère $(O\,;I\,;J)$ est donnée ci-dessous :



Graphiquement et sans justification, donner l'image par la fonction f des intervalles suivants :

(a) $[1\,;2]$ (b) $]-3\,;-0{,}5[$ (c) $[0{,}25\,;4[$

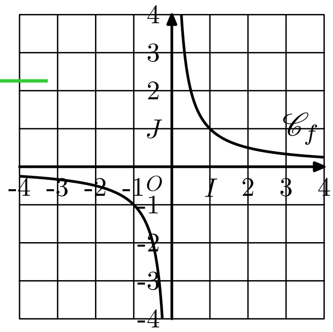
E.13 Donner, sans justification, l'image des intervalles suivants par la fonction inverse :

(a) $]-4\,;-1[$ (b) $\left[2\,;\dfrac{5}{2}\right]$ (c) $]0{,}0001\,;1{,}5]$

E.14 Sans justification, donner l'image des intervalles ci-dessous par la fonction inverse :

(a) $[10^{-1}\,;10^{5}]$ (b) $]10^{-10}\,;10^{-9}]$ (c) $[-10^{6}\,;-10^{5}[$

E.15 Dans des repères $(O\,;I\,;J)$ orthonormaux, sont données ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement de la fonction carrée et de la fonction inverse :



Compléter, sans justification, les assertions suivantes :

(1) Si $x\in]2\,;4]$ alors $\dfrac{1}{x}\in\ldots\ldots$

(2) Si $x\in]0\,;2]$ alors $\dfrac{1}{x}\in\ldots\ldots$

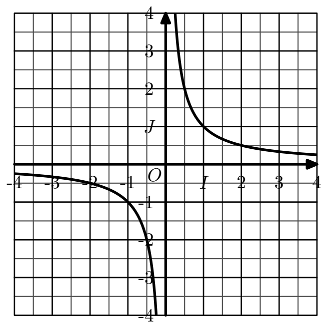
(3) Si $x\in\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right]$ alors $\dfrac{1}{x}\in\ldots\ldots$

6. *Fonction inverse : équation et inéquation*

E.16 Résoudre les équations suivantes :

(a) $\dfrac{1}{x}=2$ (b) $\dfrac{1}{x}=0$ (c) $\dfrac{1}{x}=-4$

E.17

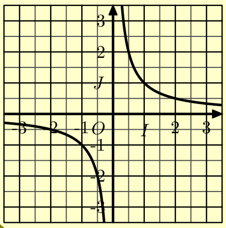


On considère la fonction inverse notée f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère $(O\,;I\,;J)$ est donnée ci-dessous :
Graphiquement et sans justification, donner l'ensemble des solutions des équations et inéquations suivantes :

(a) $\dfrac{1}{x}\geqslant 1$ (b) $\dfrac{1}{x}<-3$ (c) $\dfrac{1}{x}>7$

E.18

Soit f la fonction inverse. Ci-dessous sont donnée la courbe représentative et le tableau de variations de la fonction f :



x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variation de f	0 ↘ $-\infty$		‖	$+\infty$ ↘ 0	

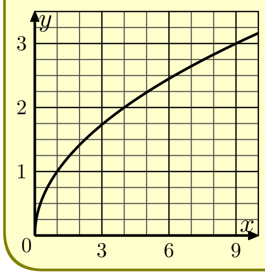
En se basant sur la courbe représentative ou le tableau de variations de la fonction inverse, donner, sans justification, les ensembles de solutions pour chacune des inéquations suivantes :

a) $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{5}$ b) $\dfrac{1}{x} > \dfrac{3}{4}$ c) $\dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{3}$

7. Racine carré : image d'intervalle

E.19

Représentation de la fonction racine carrée :
Ci-dessous sont donnés la courbe représentative et le tableau de variation de la fonction racine carrée :



x	0	$+\infty$
Variation de f	0 ↗	$+\infty$

Sans justification, donner les images des intervalles ci-dessous par la fonction racine carrée :

a) $[1\,;4]$ b) $[0{,}81\,;2{,}25[$ c) $]5\,;9[$

8. Racine carré : équation et inéquation

E.20 Sans justification, donner l'ensemble de solutions des inéquations suivantes :

a) $\sqrt{x}>4$ b) $\sqrt{x}<9$

E.21 Sans justification, donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes :

a) $\sqrt{x}>3$ b) $\sqrt{x}<5$

9. Fonction cube : variations

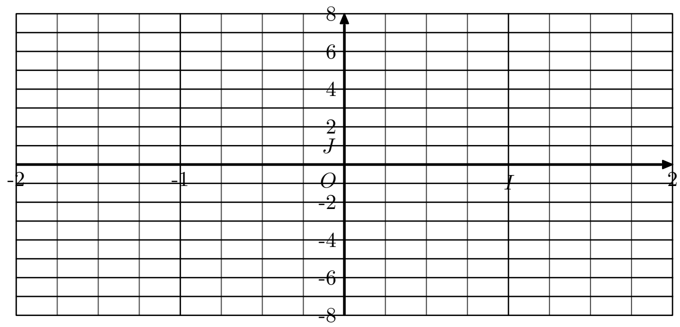
E.22 Nous allons étudier la fonction cube h définie par :

$$f : x \longmapsto x^3$$

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction cube.
2. a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2
$f(x)$							

   b) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessous :

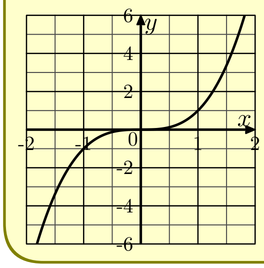


3. a) Pour a et b non tous les deux nuls, établir l'égalité suivante : $f(b)-f(a)=(b-a)(b^2+a{\cdot}b+a^2)$
   b) En déduire le sens de variation de la fonction cube sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$.
4. La courbe représentative de la fonction f possède-t-elle un axe de symétrie ou un centre de symétrie?

10. *Fonction cube : images d'intervalle*

E.23

Représentation de la fonction cube :
Ci-dessous sont donnés la courbe représentative et le tableau de variation de la fonction cube :



x	$-\infty$	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Sans justification, donner les images des intervalles ci-dessous par la fonction cube :

a) $[1\,;4]$ b) $[-3,\,-1[$ c) $[-\sqrt[3]{4}\,;-\sqrt[3]{2}[$

11. *Fonction cube : équations et inéquations*

E.24 Sans justification, répondre aux questions suivantes :

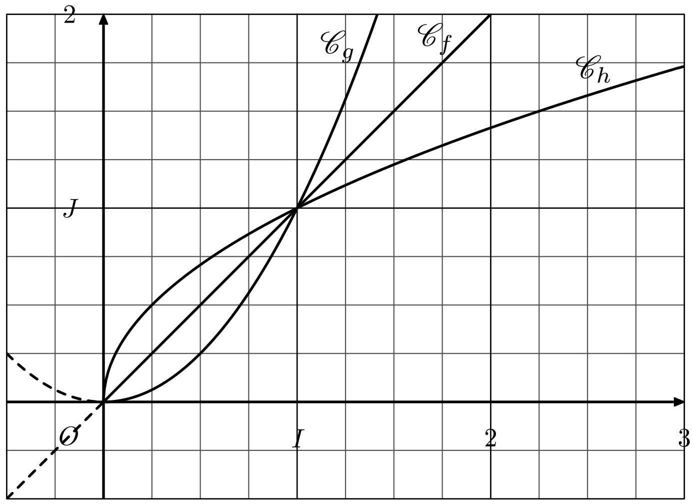
1) Résoudre l'inéquation : $x^3 > 8$
2) Résoudre l'inéquation : $x^3 \leqslant 27$

12. *Positions relatives des fonctions de références*

E.25 On considère les trois fonctions f, g, h définies par :

$$f: x \longmapsto x \quad ; \quad g: x \longmapsto x^2 \quad ; \quad h: x \longmapsto \sqrt{x}$$

dont les courbes représentatives sont données dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé ci-dessous :



1) Graphiquement, étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ sur $\mathbb{R}_+$.

Établissons le résultat de la question précédente d'un point de vue algébrique :

2) a) Dresser le tableau de signes de l'expression $x^2 - x$.
 b) Comparer les fonctions f et g sur chacun des intervalles $[0\,;1]$ et $[1\,;+\infty[$.

3) a) Pour $x \in]0\,;+\infty[$, établir l'égalité :
$$f(x) - h(x) = \frac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}}$$
 b) Comparer les fonctions f et h sur chacun des intervalles $]0\,;1]$ et $[1\,;+\infty[$.

E.26

1) On considère les deux fonctions f et g définies par :
$$f: x \longmapsto (x-1)^2 \quad ; \quad g: x \longmapsto (x^2-1)^2$$
Comparer les fonctions f et g sur l'intervalle $[0\,;1]$.

2) On considère les fonctions h et j définies par :
$$h: x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}+1} \quad ; \quad j: x \longmapsto \frac{1}{2x+1}$$
Comparer les fonctions h et j sur chacun des intervalles $[0\,;1]$ et $[1\,;+\infty[$.

13. *Partage*

E.27 On désigne par f la fonction carrée. Dire si les assertions suivantes sont "*vraies*" ou "*fausses*". Dans le cas où une assertion est fausse, on citera un contre-exemple :

1) Si $x > 1$ alors $x^2 > 1$.
2) Si $x^2 > 1$ alors $x > 1$.
3) L'image de l'intervalle $[-3\,;4]$ par la fonction f est $[9\,;16]$.
4) L'image de l'intervalle $[-5\,;1]$ par la fonction f est

$[0\,;25]$.

⑤ $-4<1 \implies f(-4)<f(1)$.

⑥ La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

14. *Exercices non-classés*

E.28 Sans justification, donner les images des intervalles ci-dessous par la fonction racine carrée :

ⓐ $[10^4\,;\,10^{20}[$ ⓑ $[2^{16}\,;\,2^{32}[$

E.29 Le tableau ci-dessous représente les quotients, arrondis au centième près, de carrés d'entiers :

÷	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
1	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
4	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16	20,25	25	30,25	36	42,25	49	56,25
9	0,11	0,44	1	1,78	2,78	4	5,44	7,11	9	11,11	13,44	16	18,78	21,78	25
16	0,06	0,25	0,56	1	1,56	2,25	3,06	4	5,06	6,25	7,56	9	10,56	12,25	14,06
25	0,04	0,16	0,36	0,64	1	1,44	1,96	2,56	3,24	4	4,84	5,76	6,76	7,84	9
36	0,03	0,11	0,25	0,44	0,69	1	1,36	1,78	2,25	2,78	3,36	4	4,69	5,44	6,25
49	0,02	0,08	0,18	0,33	0,51	0,73	1	1,31	1,65	2,04	2,47	2,94	3,45	4	4,59
64	0,02	0,06	0,14	0,25	0,39	0,56	0,77	1	1,27	1,56	1,89	2,25	2,64	3,06	3,52
81	0,01	0,05	0,11	0,20	0,31	0,44	0,60	0,79	1	1,23	1,49	1,78	2,09	2,42	2,78
100	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25
121	0,01	0,03	0,07	0,13	0,21	0,30	0,40	0,53	0,67	0,83	1	1,19	1,40	1,62	1,86
144	0,01	0,03	0,06	0,11	0,17	0,25	0,34	0,44	0,56	0,69	0,84	1	1,17	1,36	1,56
169	0,01	0,02	0,05	0,09	0,15	0,21	0,29	0,38	0,48	0,59	0,72	0,85	1	1,16	1,33
196	0,01	0,02	0,05	0,08	0,13	0,18	0,25	0,33	0,41	0,51	0,62	0,73	0,86	1	1,15
225	0	0,02	0,04	0,07	0,11	0,16	0,22	0,28	0,36	0,44	0,54	0,64	0,75	0,87	1

① ⓐ À l'aide du tableau, vérifier l'encadrement ci-dessous :
$$\frac{100}{81} < 1{,}25 < \frac{81}{64}$$

ⓑ À l'aide du tableau, justifier l'encadrement :
$$\frac{10}{9} < \sqrt{1{,}25} < \frac{9}{8}$$

② Établir l'encadrement : $\dfrac{15}{14} < \sqrt{1{,}16} < \dfrac{13}{12}$

③ À l'aide du tableau, donner l'encadrement le plus précis du nombre $\sqrt{2{,}5}$.

E.30

① Pour tous nombres réels a et b, établir l'égalité :
$$a^3-b^3 = (a-b)\cdot\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3{\cdot}b^2}{4}\right]$$

② Établir que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

E.31

① Soit a et b deux nombres réels. Établir l'identité suivante :
$$a^3-b^3 = (a-b)\cdot(a^2+a{\cdot}b+b^2)$$

② On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est définie par :
$$f(x)=x^3$$
Établir que la fonction f est croissante sur $]-\infty\,;0]$.

