Seconde / Identités remarquables

ChingEval : 4 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. Rappels

E.1 Résoudre les équations suivantes :

a. $\dfrac{2x-1}{3} = 5x+1$

b. $(x+1)(2-x) = (2x-4)(5x-3)$

c. $\dfrac{x-4}{3} = x-2$

E.2 En utilisant la méthode de votre choix, résoudre les équations suivantes :

a. $3x^2+x=0$

b. $(3x+1)^2 = 3x+1$

c. $\dfrac{2x+1}{6} - \dfrac{1-x}{2} = x$

d. $(2x+1)(3x+4)-(3x+1)(2x+4)=0$

2. Introduction

E.3 Dans cet exercice, on considère un carré de côté $a{+}b$ où a et b sont deux nombres réels positifs ($a,b\in\left]0\,;+\infty\right[$).

1. Pour chacune des figures ci-dessous, donner l'aire du domaine hachurée :

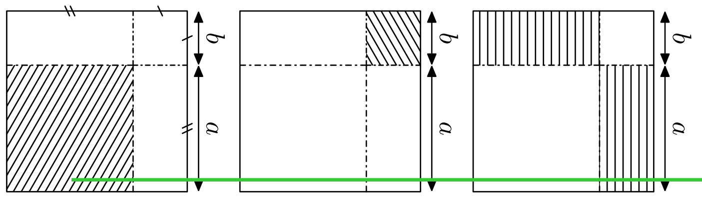


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

2. Parmi les expressions ci-dessous, donner les deux réponses permettant d'exprimer l'aire du carré :

a. $\left(a+b\right)^2$

b. a^2+b^2

c. $a^2+2ab+b^2$

d. $a^2-2ab+b^2$

E.4 Soit a et b deux nombres réels strictement positifs. On considère les quatre représentations d'un même carré de côté a ci-dessous :

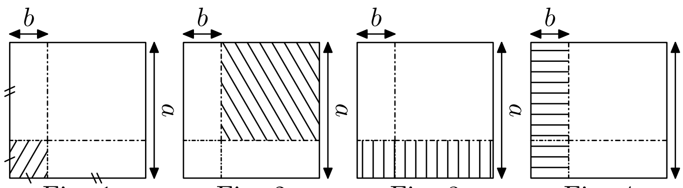


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

1. a. Exprimer à l'aide des nombres a et b l'aire de chacune des parties hachurées.

   b. Quelle partie de cette figure admet pour aire l'expression : $\left(a{-}b\right)^2{+}2ab{-}b^2$

2. Justifier l'identité : $\left(a{-}b\right)^2{=}a^2{-}2ab{+}b^2$

3. Développement et identité remarquable

E.5

1. Établir chacune des identités ci-dessous :

   a. $\left(3x+5\right)^2 = \left(3x\right)^2+2{\times}3x{\times}5+5^2$

   b. $\left(4x+3\right)^2 = \left(4x\right)^2+2{\times}4x{\times}3+3^2$

2. Établir chacune des identités ci-dessous :

   a. $\left(2x-1\right)^2 = \left(2x\right)^2-2{\times}2x{\times}1+1^2$

   b. $\left(3-6x\right)^2 = 3^2-2{\times}3{\times}6x+\left(6x\right)^2$

3. Établir chacune des identités ci-dessous :

   a. $\left(x+2\right)\left(x-2\right) = x^2-2^2$

   b. $\left(4x+5\right)\left(4x-5\right) = \left(4x\right)^2-5^2$

4. Développer une identité remarquable

E.6 Compléter le tableau ci-dessous :

$(a+b)^2$	a	b	a^2	b^2	$2ab$	$a^2+2ab+b^2$
$(3x+2)^2$						
$(4x+1)^2$						
$(5x+1)^2$						

E.7 Compléter le tableau ci-dessous :

$(a-b)^2$	a	b	a^2	$2ab$	b^2	$a^2-2ab+b^2$
$(x-5)^2$						
$(2x-4)^2$						
$(4x-3)^2$						

E.8 Compléter le tableau ci-dessous :

$(a+b)(a-b)$	a	b	a^2	b^2	a^2-b^2
$(2x+5)(2x-5)$					
$(x+4)(x-4)$					
$(4x+3)(4x-3)$					

E.9 Développer les expressions suivantes :

a) $(x+1)^2$ b) $(2x+3)^2$ c) $(x+6)^2$

d) $(5x+1)^2$ e) $(3x+3)^2$ f) $(a+b)^2$

E.10 Développer les expressions suivantes :

a) $(x-2)^2$ b) $(x-3)^2$ c) $(3x-1)^2$

d) $(5x-1)^2$ e) $(3x-2)^2$ f) $(a-b)^2$

E.11

Compléter les pointillés ci-dessous afin d'obtenir ..

a) $(\ 2x\ +\ 4\ )^2 = 4x^2\ +\ 16x\ +\ \dots$

b) $(\ 3x\ +\ 1\ )^2 = \dots\ +\ 6x\ +\ 1$

c) $(\ x\ -\ 2\ )^2 = \dots\ -\ 4x\ +\ 4$

d) $(\ 4\ +\ 5x\ )^2 = 16\ +\ 40x\ +\ \dots$

e) $(\ x\ -\ 3\ )^2 = x^2\ -\ 6x\ +\ \dots$

5. *Développer*

E.12 Développer les expressions suivantes :

a) $2(3x-1)(2-x)$ b) $(2x+3)^2$

c) $(3x-2)(3x+2)$ d) $(5x-6)^2$

E.13 Ci-dessous est rappelé le développement des identités remarquables :

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

Utiliser ces identités remarquables pour déterminer par un calcul mental la valeur des calculs ci-dessous :

a) 21^2 b) 29^2 c) 21×19 d) 34×26

6. *Factoriser une identité remarquable*

E.14 On considère les expressions littérales suivantes :

a) $81x^2+80x+25$ b) $4x^2-12x+9$

c) $16x^2-32x-16$ d) $36-4x^2$

1) Les identités remarquables permettent d'écrire les factorisations suivantes :
- $a^2+2\cdot ab+b^2 = (a+b)^2$
- $a^2-2\cdot ab+b^2 = (a-b)^2$
- $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

En identifiant, si possible, chacune des expressions proposées à l'une des identités remarquables, compléter le tableau ci-dessous :

	a	b	$2\cdot ab$
a			
b			
c			
d			

2) Parmi les expressions proposées, lesquelles peuvent être factorisées ? On donnera alors leur forme factorisée.

E.15 On considère les expressions littérales suivantes :

ⓐ $25x^2+20x+4$ ⓑ $9x^2+18x+9$

ⓒ $4x^2-12x+9$ ⓓ $25x^2-16$

1. Les identités remarquables permettent d'effectuer les factorisations suivantes :
   - $a^2+2{\cdot}ab+b^2=(a+b)^2$
   - $a^2-2{\cdot}ab+b^2=(a-b)^2$
   - $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

   En identifiant, si possible, chacune des expressions proposées à l'une des identités remarquables, compléter le tableau ci-dessous :

	a	b	$2{\cdot}ab$
a			
b			
c			
d			

2. Parmi les expressions proposées, lesquelles sont factorisées ? On donnera alors leur forme factorisée.

E.16

1. Parmi les trois expressions ci-dessous une seule a été obtenu par le développement d'une identité remarquable ? Laquelle ? Préciser l'expression de départ :

ⓐ $4x^2+6x+9$ ⓑ $4x^2+24x+9$ ⓒ $4x^2+12x+9$

2. Même question avec les expressions :

ⓐ $x^2-64x+64$ ⓑ $x^2-16x+64$ ⓒ $x^2-8x+64$

3. Même question avec les expressions :

ⓐ $9x^2+15x+25$ ⓑ $9x^2+30x+25$ ⓒ $9x^2+6x+25$

E.17 Factoriser chacune des expressions littérales suivantes :

ⓐ x^2-16 ⓑ $x^2-10x+25$

ⓒ x^2-2x+1 ⓓ $x^2+14x+49$

E.18 Factoriser chacune des expressions suivantes :

ⓐ $9x^2-12x+4$ ⓑ x^2+2x+1

E.19 Factoriser, **si possible**, les expressions littérales suivantes :

ⓐ $25x^2-50x+25$ ⓑ $4x^2+1$

ⓒ $100x^2+140x+49$ ⓓ $4x^2+24x+9$

E.20 Factoriser les expressions littérales suivantes :

ⓐ $x^2+\dfrac{2}{3}{\cdot}x+\dfrac{1}{9}$ ⓑ $\dfrac{1}{4}{\cdot}x^2-\dfrac{1}{9}$

ⓒ $\dfrac{1}{9}x^2-\dfrac{2}{15}x+\dfrac{1}{25}$ ⓓ $\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}$

E.21 Factoriser les expressions suivantes :

ⓐ $-x^2-4x-4$ ⓑ $-x^2+6x-9$

ⓒ $-9x^2+12x-4$ ⓓ $-25x^2+20x-4$

7. *Factorisation : un peu plus loin*

E.22 Factoriser les expressions suivantes. Aucune justification particulière n'est demandée :

ⓑ $(x+2)^2-9$ ⓑ $25x^2-9-(5x+3)(5-x)$

E.23 Factoriser les expressions suivantes :

ⓐ $(2x-8)(7x+1)-16+x^2$

ⓑ $18x^2-24x+8+(3x-2)(2-x)$

E.24 Établir la factorisation suivante :
$3(2x+1)+(x-1)^2=(x+2)^2$

8. *Equation (facteur commun et identité remarquable)*

E.25 On considère l'expression algébrique : $B=(5x-7)^2-3^2$

1. Déterminer la forme factorisée de l'expression B.
2. Trouver une valeur de x pour laquelle $B=0$.

E.26 Résoudre les équations ci-dessous. Pour cela, utiliser une factorisation pour obtenir une équation produit nulle.

ⓐ $4x^2+12x+9=0$ ⓑ $x^2-10x+25=0$

ⓒ $4x^2-9=0$ ⓓ $5x^2+3x=0$

E.27 Résoudre les équations suivantes :

ⓐ $9x^2-12x+4=0$ ⓑ $x^2+5x-5=3x-6$

E.28 Résoudre les équations :

ⓐ $(x+1)(2x-3)=4x^2-9$

ⓑ $(2x-3)(5x+4)=(2x-3)(3-2x)$

E.29 Résoudre les équations suivantes :

ⓐ $(x+1)^2-(2x-3)^2=0$ ⓑ $(x+1)(2x-3)=x^2-1$

9. *Expression rationnelle*

E.30 Établir l'identité suivante : $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+2}{2x+3}=\dfrac{(x+2)^2}{(x+1)(2x+3)}$

E.31

① Déterminer les valeurs des réels a et b réalisant l'identité :
$$\frac{2x+3}{x}-\frac{2x+3}{3x+3}=\frac{(ax+b)^2}{x(3x+3)}$$

② Déterminer les valeurs des réels c et d réalisant l'identité :
$$\frac{5x+2}{2x+1}-\frac{3x-2}{3x+1}=\frac{(cx+d)^2}{(2x+1)(3x+1)}$$

10. *Problèmes*

E.32 *Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Anatole affirme :

> *"Pour tout nombre entier naturel n, l'expression $n^2-24n+144$ est toujours différente de zéro."*

A-t-il raison?

E.33 *Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Aissa affirme :

> "Pour tout nombre entier naturel n, l'expression $2n^2-6n+4$ est toujours le carré d'un entier."

A-t-il raison?

E.34 *Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

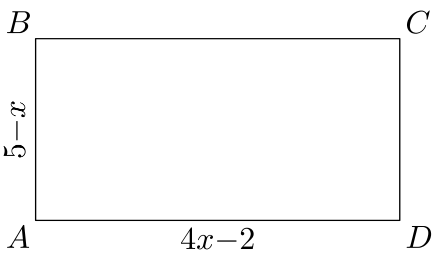
Thomas affirme :

> "Pour tout nombre entier naturel n, l'expression $6n^2-18n+16$ est toujours le carré d'un entier."

A-t-il raison?

E.35

On considère le rectangle $ABCD$ représenté ci-contre dont les dimensions, dépendant d'une valeur indéterminée x, sont $5-x$ et $4x-2$ exprimées en centimètre.



Déterminer les valeurs possibles de x afin que l'aire de $ABCD$, exprimé en cm^2, soit égale au périmètre de $ABDC$, exprimé en cm.

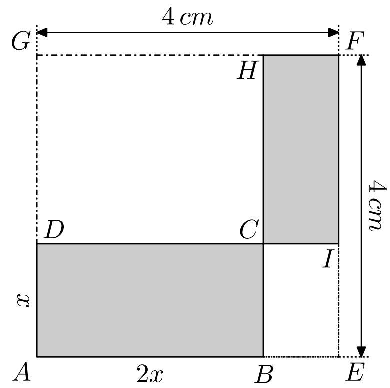
E.36 On considère les deux fonctions f et g définies par :
$$f(x)=x^2 \quad ; \quad g(x)=2x-1$$

① À l'aide de votre calculatrice, donner les abscisses des points d'intersections des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.

② ⓐ Retrouver le résultat de la question précédente en résolvant l'équation :
$$x^2=2x-1$$

ⓑ Déterminer les coordonnées du point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

E.37 On considère la figure ci-dessous grisée et on note son aire $\mathcal{A}$:



(les mesures sont exprimées en centimètre)

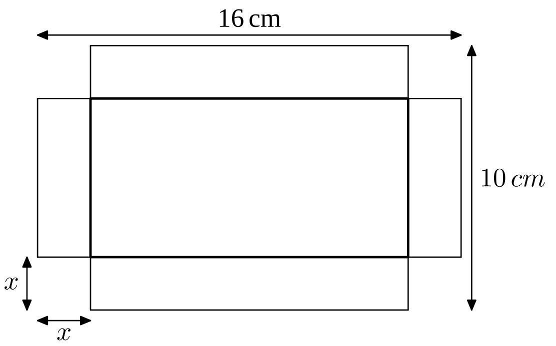
Elle est composée :

- du carré $AEFG$,
- de deux rectangles $ABCD$ et $CIFH$.

Déterminer la ou les valeurs de x afin que l'aire $\mathcal{A}$ ait pour valeur $7\,cm^2$

Toute trace de recherche ou de prise d'initiative sera prise en compte dans l'évaluation.

E.38 On veut réaliser, dans le patron ci-dessous une boîte rectangulaire sans couvercle. Les longueurs sont exprimées en cm.



1 a Lorsque la boîte sera construire, le nombre x représentera quelle dimension? La longueur, la largeur ou la hauteur?

b Quelles valeurs peuvent prendre la variable x dans ce problème?

c Donner l'expression du volume $\mathscr{V}$ en fonction de la valeur de x.

2 Dans cette question, nous cherchons pour quelles valeurs de "x", cette boîte possède un volume égal à $144\,cm^3$:

a Déterminer la valeur des réels de a et de b vérifiant la factorisation suivante :

$$4x^3-52x^2+160x-144=(a{\cdot}x+b)(2x-4)^2$$

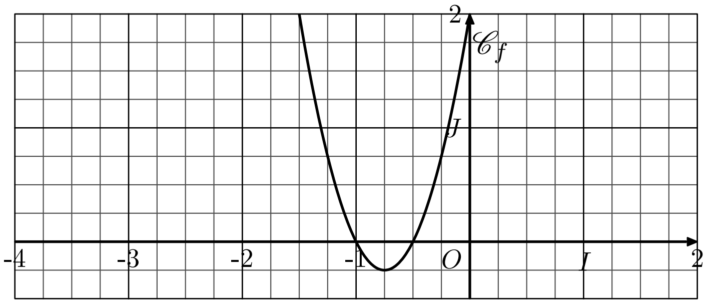
b En déduire les valeurs de x pour lesquelles $\mathscr{V}(x)$ a pour valeur 144.

11. *Etude de fonctions et identités remarquables*

E.39 On considère les deux fonctions f et g définies par :

$$f(x)=-2x-2 \quad ; \quad g(x)=4x^2+6x+2$$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormal, on note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.
La courbe $\mathscr{C}_g$ est donnée ci-dessous :



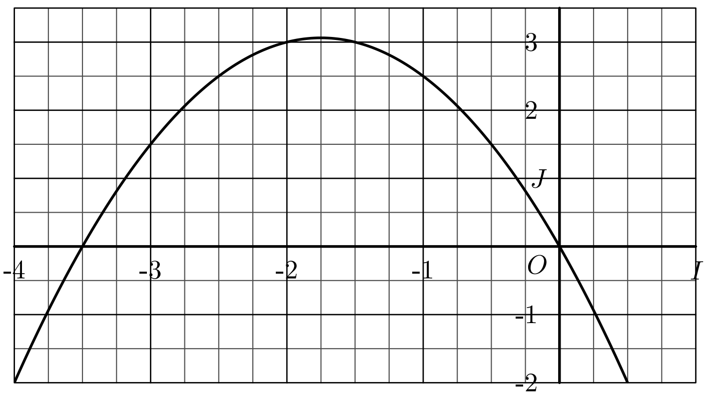
1 Résoudre l'équation : $f(x)=g(x)$

2 Donner, s'ils existent, les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

E.40 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x)=-\frac{1}{2}(4x+7)(x+2)+x^2+4x+7$$

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthogonal ci-dessous sont représentés la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f :



1 Répondre graphiquement aux questions suivantes :

a Déterminer l'image du nombre -3 par la fonction f. Justifier votre réponse.

b Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre 0 par la fonction f. Justifier votre réponse.

2 a Développer l'expression :

$$-\frac{1}{2}(4x+7)(x+2)+x^2+4x+7$$

b En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $f(x)=0$.

3 a Factoriser l'expression x^2+4x+4.

b En déduire la factorisation de l'expression :

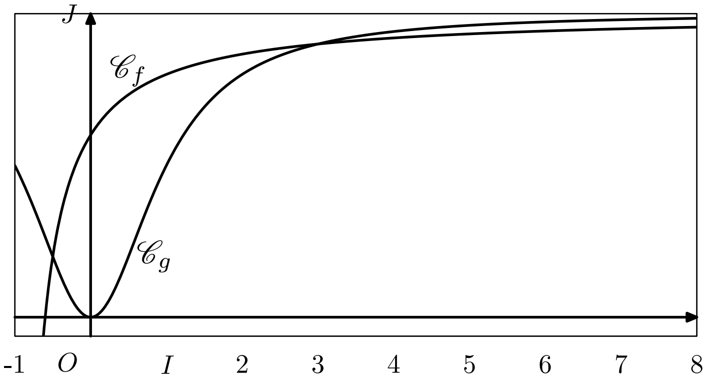
$$\Big(-2x-\frac{7}{2}\Big)(x+2)+x^2+4x+4$$

c En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $f(x)=3$

E.41 On considère les deux fonctions f et g définies sur $]-1\,;+\infty[$ dont les images d'un nombre x sont définies par les relations :

$$f(x)=\frac{5x+3}{5x+5} \quad ; \quad g(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$$

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$, sont tracés les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g :



1. Établir l'égalité suivante :
$$g(x)-f(x)=\frac{2x^2-5x-3}{(x^2+1)(5x+5)}$$

2. a. Justifier que 3 est une solution de l'équation : $f(x)=g(x)$.
   b. Déterminer les valeurs des réels a et b vérifiant l'égalité suivante :
   $2x^2-5x-3=(x-3)(a{\cdot}x+b)$

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $f(x)=g(x)$

12. *Indentités remarquable et racine carrées*

E.42 Développer les calculs ci-dessous et donner leurs résultats sous la forme $a+b\sqrt{c}$, où a, b, c sont des entiers avec c le plus petit possible :

a. $(3-\sqrt{2})^2$ b. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$

E.43 On considère l'expression : $E=(\sqrt{7}+1)^2+(\sqrt{7}-1)^2$

1. Après avoir développé les carrés, montrer que E est un nombre entier.
2. En déduire la nature d'un triangle dont les côtés mesurent respectivement, en centimètres, $\sqrt{7}+1$, $\sqrt{7}-1$ et 4 ; justifier votre réponse.

E.44 Soit a et b deux nombres tels que $a\geqslant 0$ et $b\geqslant 0$:

1. Développer : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$
2. Quel est le signe de : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$
3. En déduire : $a+b\geqslant 2\sqrt{a\times b}$

E.45

1. a. Établir l'égalité suivante : $(1-2\sqrt{2})^2=9-4\sqrt{2}$
   b. En déduire une expression simplifiée de $\sqrt{9-4\sqrt{2}}$
2. Démontrer l'égalité suivante : $\sqrt{37+12\sqrt{7}}=3+2\sqrt{7}$

13. *Systèmes d'équations non-linéaires et identités remarquables*

E.46

1. Résoudre le système : $\begin{cases} x+y=2 \\ x\times y=1 \end{cases}$
2. Résoudre le système : $\begin{cases} x+2y=4 \\ x\times y=2 \end{cases}$
3. Résoudre le système : $\begin{cases} x+3y=-6 \\ x\times y=3 \end{cases}$

14. *Partage*

E.47 Factoriser chacune des expressions suivantes :

a. $49x^2-42x+9$ b. $16x^2-1$

c. $(5x+2)(3-2x)-(5x+2)(x+1)$

d. $(9x-4)^2-(9x-4)$

15. *Exercices non-classés*

E.48

Dans cette exercice, nous établissons l'identité de Brahmagupta

Pour tous nombres réels a, b, c, d, établir l'identité ci-dessous :

$$\big(a^2+b^2\big)\big(c^2+d^2\big) = \big(ac+bd\big)^2 + \big(ad-bc\big)^2$$

E.49

Développer et réduire les expressions suivantes :

a) $(x+1)^2$ b) $\big(2-\sqrt{2}x\big)\big(2+\sqrt{2}x\big)$

Factoriser les expressions suivantes :

c) $9x^2-12x+4$ d) $2x^2-1$

Résoudre l'équation suivante :

e) $(x-1)(2x+5)=0$

