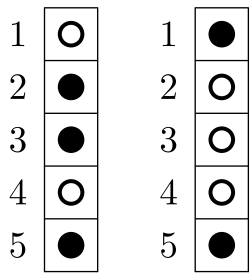
# *Seconde / Pré-olympiade*

*Dans ce chapitre, vous trouverez des extraits des olympiades accessibles par un élève de seconde. Plus de 30 exercices accessibles aux enseignants*

## 1. *Logique*

E.1

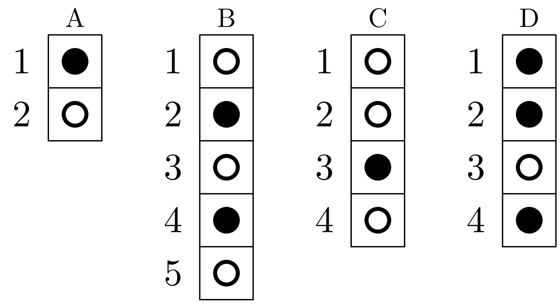
On dispose de $n$ pions verticalement. Ils sont noirs sur une face, blancs sur l'autre, et sont numérotés de 1 à $n$. Au début du jeu, chaque pion présente aléatoirement sa face noire ou sa face blanche. **À chaque coup - qu'on appelle une *opération* dans toute la suite - on retourne un des pions et tous ses voisins du dessus.**



Le dessin ci-contre donne l'exemple du changement qu'apporte à une configuration initiale une opération avec le troisième jeton.

L'objectif du jeu est de trouver une séquence d'opérations telle que tous les pions montrent leur face blanche.

1. L'ordre dans lequel se succèdent deux opérations a-t-il de l'importance?
2. Quel est l'effet combiné de deux opérations identiques?
3. Indiquer les numéros des pions à retourner pour ne voir que des faces blanches, dans les situations représentées ci-dessous.




E.2 Une calculatrice défectueuse permet seulement :

- de taper des nombres positifs ou nuls ;
- de faire l'opération suivante : à partir de trois nombres entrés successivement $(x\,;y\,;z)$, elle affiche 0 si $x=y$ et le résultat de $\dfrac{z}{x-y}$ sinon.
$$(x\,;y\,;z) \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{z}{x-y} & \text{si } x\neq y \\ 0 & \text{si } x=y \end{cases}$$
- l'utilisation des parenthèses qui permet de composer des calculs.

1. En détaillant les calculs, vérifier les résultats suivants donnés par la calculatrice :
$(0\,;1\,;2)\longmapsto -2 \quad ; \quad \big((2\,;0\,;1)\,;1\,;1\big)\longmapsto -2$
2. Que donne $(2\,;0\,;1)$, $(0\,;2\,;1)$ et $\big(2\,;1\,;\,(2\,;1\,;2)\big)$?
3. Donner un calcul permettant d'obtenir $-1$.
4. Vérifier que le calcul $(a\,;0\,;1)$ permet d'obtenir l'inverse de $a$ pour tout $a>0$.

## 2. *Algèbre*

E.3 Pour tous entiers naturels $m$ et $n$, on appelle triangle de $m$ par $n$, et on note $m\Delta n$, le nombre défini par les règles suivantes, dont on admet qu'elles sont possibles :

- $0\Delta n = n+1$
- $n\Delta 0 = (n-1)\Delta 1$ dès que $n\neq 0$ ;
- $(n+1)\Delta(m+1) = n\Delta\big((n+1)\Delta m\big)$

Attention, $m\Delta n$ n'est pas nécessairement égal à $n\Delta m$.

**Quelques résultats.**

1. a. Montrer que : $1\Delta 0=2$ et $1\Delta 1=3$.
   b. Calculer $1\Delta 2$.
   c. Plus généralement, déterminer, pour tout entier naturel $n$, la valeur de $1\Delta n$. On pourra poser $u_n=1\Delta n$ et vérifier que la suite $(u_n)$ est arithmétique.
2. a. Calculer $2\Delta 0$, $2\Delta 1$ et $2\Delta 2$.
   b. Justifier, que pour tout entier naturel $n$ :
   $2\Delta n=2n+3$.
3. a. Calculer $3\Delta 0$, $3\Delta 1$ et $3\Delta 2$.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $3\Delta n$ est égal à $2^{n+3}-3$. On pourra poser $v_n=3\Delta n$ et montrer que, pour tout $n$ supérieur ou égal à 1 :
   $v_n = 2\cdot v_{n-1}+3$.

**Illustration de $3\Delta n$.**

Un artiste a illustré ainsi les valeurs $3\Delta 0$ et $3\Delta 1$ :

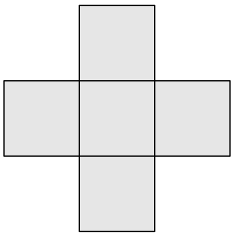


Figure 1

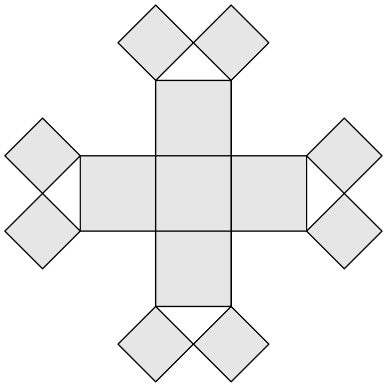


Figure 2

4 Tracer sur la copie une troisième figure qui viendrait logiquement compléter cette suite de dessins et illustrer la valeur de $3\Delta 2$.

5 Supposons que le côté d'un carré de la figure 1 mesure 1 *cm*.

a Déterminer l'aire respective des figures 1 et 2.

b Quelle serait l'aire de la figure illustrant $3\Delta n$? On ne tiendra pas compte des recouvrements éventuels.

E.4 On suppose qu'il existe une fonction $f$ définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ vérifiant la propriété :

$(E)$ : pour tous $x$ et $y$ de $\mathbb{N}$, $\quad f(x+y)=f(x)\cdot f(y)-x\cdot y$

**Préliminaire**

Démontrer que $f(0)=1$. On pourra admettre les résultats dans les parties suivantes.

**A. Étude d'un premier exemple** :
On suppose ici que : $\quad f(1)=3$.

1 Calculer $f(2)$ puis $f(3)$.

2 Montrer par deux calculs distincts que $f(4)=60$ et que $f(4)=63$. Conclure.

**B. Étude d'un second exemple** :
On suppose ici que : $\quad f(1)=0$.

1 Calculer $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$.

2 Conjecturer l'expression de $f(n)$ en fonction de $n$.

3 Démontrer cette conjecture.

4 Prouver que pour la fonction trouvée aux 2 et 3 la propriété $(E)$ est bien vérifiée.

**C. Cas général**

***Première partie*** : on note $f(1)=a$

1 Exprimer $f(2)$ et $f(3)$ en fonction de $a$.

2 Exprimer $f(4)$ en fonction de $a$ de deux manières différentes.

3 En déduire que : $\quad a=0 \quad$ ou $\quad a=2$.

***Seconde partie*** : on étudie le second cas :
On suppose ici que : $\quad f(1)=2$.
Exprimer $f(n)$ en fonction de $n$.

## 3. *Arithmétique*

E.5 Un entier naturel non nul est un nombre Harshad s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n=24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2+4=6$, et 24 est bien divisible par 6.

1 a Montrer que 364 est un nombre de Harshad.

b Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad?

2 a Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.

b Soit $n$ un entier non nul. Donner un nombre Harshad de $n$ chiffres.

E.6 Voici un algorithme applicable à des nombres entiers de trois chiffres dont le chiffre des centaines n'est pas égal à celui des unités :

> *Étape 1 :* Inverser l'ordre des chiffres *(par exemple* 275 *devient* 572*)*
> *Étape 2 :* Calculer la différence du plus grand et du plus petit de ces deux nombres.
> *Étape 3 :* Réitérer l'étape 1 sur le nombre obtenu.
> *Étape 4 :* Additionner ces deux derniers nombres

1 Appliquer l'algorithme aux nombres 123, 448 et 946.

2 Que peut-on conjecturer?

E.7 On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 24 est *digisible*, car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible*, car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible*, car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1 Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.

2 a Donner tous les diviseurs à un chiffre du nombre 1000.

b En déduire un nombre *digisible* à quatre chiffres.

3 Soit $n$ un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

a Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.

b Démontrer que tous les chiffres de $n$ sont impairs.

**E.8** On part d'un entier $n$ strictement positif :

- Si $n$ est pair, on le transforme en $\dfrac{n}{2}$.
- Si $n$ est impair *($n>1$)*, on le transforme en $3n+1$.
- Si $n=1$, on s'arrête.

Exemples :

- Si $n=6$, on obtient la suite :
  $6 \longmapsto 3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$
- Si $n=13$, on obtient la suite :
  $13 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto 5 \mapsto 16 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$

Il a été observé à l'aide d'un programme sur ordinateur, que pour chaque nombre entier testé, la suite aboutit toujours à 1. Mais ce résultat n'a pas été démontré à ce jour.

On peut par ailleurs, s'intéresser à la longueur de cette suite, qu'on notera $L(n)$.
Par exemple : $L(6)=9$ et $L(13)=10$.

1. Déterminer $L(n)$ pour les entiers allant de 1 à 12.
2. Soit $p$ un entier, on considère l'entier $n=2^p$.
   Exprimer $L(n)$ en fonction de $p$.
3. Trouver un nombre entier $n$ compris entre $2^{2008}$ et $2^{2009}$ tel que :
   $L(n)=2012$.
   *Indication : On pourra chercher un nombre de la forme $2^p \times q$.*

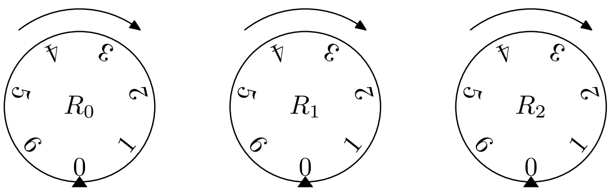
# 4. *Arithmétique et congruence*

**E.9**

1. (a) En partant de 12 589 et en comptant de 29 en 29, peut-on atteindre le nombre 12 705?
   (b) En partant de 1 485 et en comptant de 29 en 29, peut-on atteindre le nombre 310 190?
   Expliquer votre démarche.
2. Quel est le plus petit entier positif à partir duquel, en comptant de 29 en 29, on peut atteindre 2013?
3. Existe-t-il des entiers positifs inférieurs à 2 013 à partir desquels il est possible d'atteindre ce nombre aussi bien en comptant de 29 en 29 qu'en comptant de 31 en 31?
   Si oui, les trouver tous.

**E.10** Un compteur est composé de trois roues crantées, nommées $R_0$, $R_1$ et $R_2$ comportant toutes les trois 7 crans, numérotés de 0 à 6. Ce compteur est conçu de sorte que :

- Les roues tournent toujours d'un cran vers le cran suivant, dans cet ordre :
  $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 0$
- Lorsque la roue $R_0$ effectue un tour complet, c'est-à-dire lorsqu'elle tourne de 7 crans alors la roue $R_1$ tourne d'un cran.
- Lorsque la roue $R_1$ effectue un tour complet, c'est-à-dire lorsqu'elle tourne de 7 crans, alors la roue $R_2$ tourne d'un cran.
- Initialement, les roues $R_0$, $R_1$ et $R_2$ affichent toutes 0.



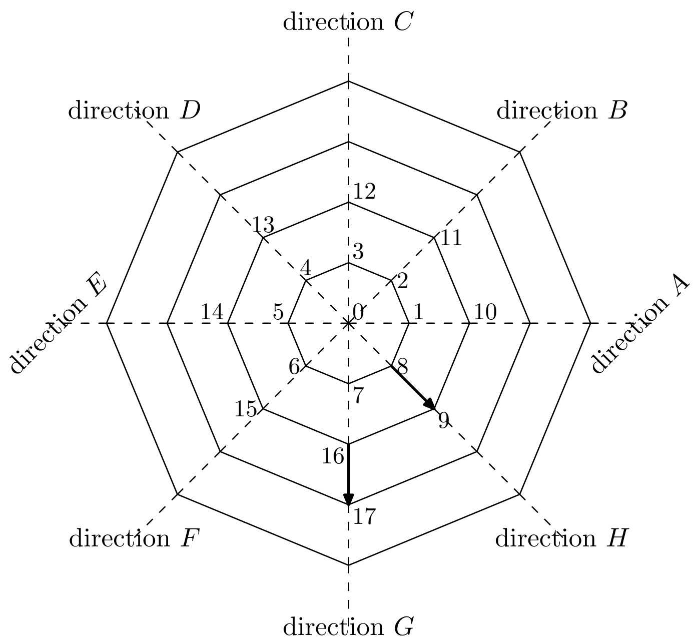

*Entre chaque question, le compteur est remis à zéro, c'est-à-dire que chaque roue affiche de nouveau* 0.

1. On tourne la roue $R_0$ de 15 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues?
2. On tourne la roue $R_0$ de 100 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues?
3. On tourne la roue $R_0$ jusqu'à ce que la roue $R_2$ affiche 5 pour la première fois. De combien de crans a-t-on tourné $R_0$?
4. De combien de crans faut-il tourner $R_0$ pour que les roues reviennent pour la première fois en même temps à 0?
5. On tourne la roue $R_0$ de 3 580 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues?

**E.11** On considère des octogones réguliers, de même centre $O$.
Aux sommets de l'octogone central, on note les huit premiers entiers non nuls.
Sur les sommets du deuxième octogone, on inscrit les 8 premiers nombres entiers suivants, avec une rotation de 45 degrés autour du point $O$.
Et ainsi de suite...

On dit que chaque nombre entier a une direction *($A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ ou $H$ par rapport à l'origine $O$).*
Par exemple, 1 a pour direction $A$, 2 a pour direction $B$...

Voici une figure représentant les quatre premiers octogones :




1. Quel sera le premier entier inscrit sur le quatrième octogone? Préciser sa direction.
2. Déterminer le premier entier inscrit sur le huitième octogone. Préciser sa direction.

## 5. Aritmétique et fonction

**E.12** Pour tous entiers naturels $m$ et $n$, on appelle triangle de $m$ par $n$, et on note $m\Delta n$, le nombre défini par les règles suivantes, dont on admet qu'elles sont possibles :

- $0\Delta n = n+1$
- $n\Delta 0 = (n-1)\Delta 1$ dès que $n \neq 0$ ;
- $(n+1)\Delta(m+1) = n\Delta\big((n+1)\Delta m\big)$

Attention, $m\Delta n$ n'est pas nécessairement égal à $n\Delta m$.

**Quelques résultats**

1. a. Montrer que : $1\Delta 0=2$ et $1\Delta 1=3$.
   b. Calculer $1\Delta 2$.
   c. On admet que $1\Delta n=n+2$. Montrer que :
   $1\Delta(n+1)=n+3$
2. a. Calculer $2\Delta 0$, $2\Delta 1$ et $2\Delta 2$.
   b. On admet que $2\Delta n=2n+3$. Montrer que :
   $2\Delta(n+1)=2n+5$
3. a. Calculer $3\Delta 0$, $3\Delta 1$ et $3\Delta 2$.

**E.13** On suppose qu'il existe une fonction $f$ définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ vérifiant la propriété :

$(E)$ : pour tous $x$ et $y$ de $\mathbb{N}$, $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)-x\cdot y$

**Préliminaire**

Démontrer que $f(0)=1$. On pourra admettre les résultats dans les parties suivantes.

**A. Étude d'un premier exemple** :
On suppose ici que : $f(1)=3$.

1. Calculer $f(2)$ puis $f(3)$.
2. Montrer par deux calculs distincts que $f(4)=60$ et que $f(4)=63$. Conclure.

**B. Étude d'un second exemple** :
On suppose ici que : $f(1)=0$.

1. Calculer $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$.
2. Conjecturer l'expression de $f(n)$ en fonction de $n$.
3. Démontrer cette conjecture.
4. Prouver que pour la fonction trouvée aux 2 et 3 la propriété $(E)$ est bien vérifiée.

## 6. Géométrie

**E.14** Un artiste a réalisé les deux figures ci-dessous :

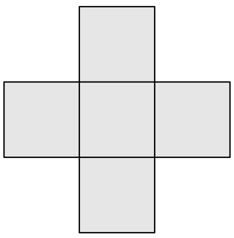


Figure 1

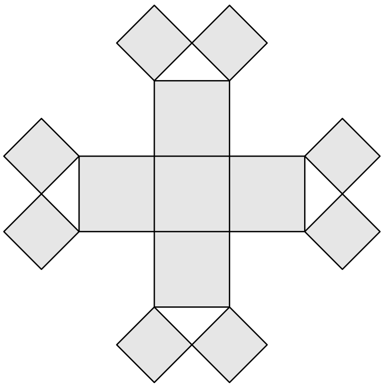


Figure 2

1. Le côté d'un carré de la figure 1 mesure 1 $cm$. Déterminer l'aire de la figure 1.
2. La figure 2 a été construite à partir de la figure 1 à laquelle on a rajouté huit carrés identiques. Déterminer l'aire de la figure 2.

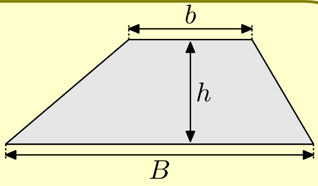
**E.15** **Mesures d'angles à peu près**

On dit qu'un triangle $ABC$ est à peu près rectangle en un sommet $A$ si la mesure de l'angle en $A$ est dans l'intervalle $[75^o ; 105^o]$. On dit qu'un triangle $ABC$ est à peu près isocèle en un sommet $A$ si les mesures des angles en $B$ et en $C$ diffèrent de $15^o$ au maximum.

1. a. Un triangle rectangle est-il à peu près rectangle? Un triangle isocèle est-il à peu près isocèle.
   b. Un triangle peut-il être rectangle en deux sommets? À peu près rectangle en deux sommets? Le cas échéant, quand il est en plus acutangle *(c'est-à-dire que tous ses angles sont aigus)*, est-il à peu près isocèle?
2. Existe-t-il un triangle acutangle qui ne soit ni à peu près rectangle, ni à peu près isocèle?
3. Écrire un programme *(en langage naturel ou calculatrice)*, à recopier sur votre copie, testant si un triangle $ABC$ dont on connaît les trois angles $A$, $B$ et $C$ est à peu près isocèle.

E.16

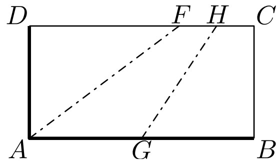
**Rappel :** Aire d'un trapèze
$A = \dfrac{(B+b)\times h}{2}$




Une pizza rectangulaire $ABCD$ comporte de la croûte sur deux côtés consécutifs, $[DA]$ et $[AB]$. **On cherche comment partager la pizza en trois morceaux équitables** : chaque part doit avoir la même longueur de croûte et la même aire.

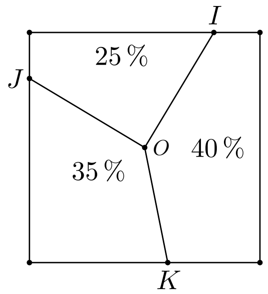
Dans chaque situation, on fixe la longueur du petit côté $AD$=1.

Dans le cas particulier ci-contre, on suppose que le partage réalisé est équitable.
Quelle est la longueur $AB$?
Déterminer les longueurs :
$DF$, $FH$ et $HC$.




E.17

Dans un carré de $10\,cm$ de côté, on veut réaliser un graphique statistique dans lequel les aires des 3 parties doivent être proportionnelles aux fréquences qu'elles représentent *(O est le centre du carré)*.
Le point $I$ est à $2\,cm$ du sommet le plus proche.




Calculer les distances de $J$ et $K$ aux sommets du carré les plus proches.

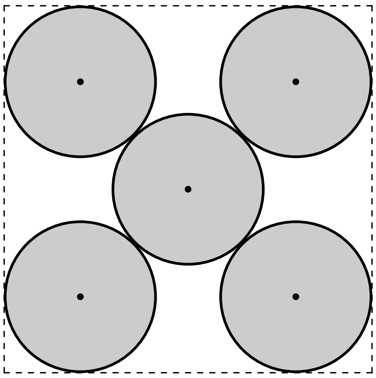
# 7. *Géométrie et théorème de Pythagore*

E.18

Cinq cercles de rayon $1\,cm$ ont été placés dans un carré comme l'indique le dessin.

Les cercles sont tangents entre eux et tangents aux côtés du carré.

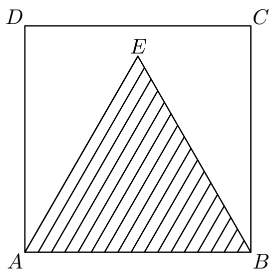
Déterminer la longueur d'un côté du carré.

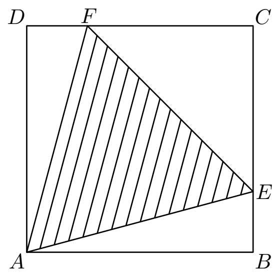


E.19 L'atelier de métallerie d'un chantier naval découpe des pièces de formes diverses dans des plaques d'acier carrées qu'il commande au laminoir.
Pour limiter les pertes de matière et donc les coûts de production, le chef d'atelier doit déterminer au préalable la taille des plaques carrées qu'il doit commander en fonction des pièces à découper.
Il arrive pour certaines commandes, que seuls la forme et la surface des pièces à découper leur soient transmises.
Dans chacune des trois parties suivantes, on étudie la découpe de certains types de pièces.
Ces parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.
*On arrondira au besoin les longueurs au mm près, et les surfaces au $cm^2$ près.*

**Partie 1 : Découpe de pièces triangulaires**

L'atelier doit produire une pièce qui a la forme d'un triangle équilatéral d'une surface de $20\,m^2$.
Le chef d'atelier envisage deux solutions de découpe comme illustré sur les schémas suivants :




On note $a$ le côté du triangle et $c$ le côté du carré.

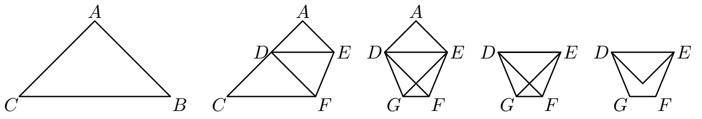
1. **Schéma n$^o$1 :**
   a. Exprimer la hauteur $h$ en fonction de $a$.
   b. En déduire le côté $a$ du carré à construire pour respecter les contraintes.
   c. Calculer la surface d'acier perdue avec cette méthode.
2. **Schéma n$^o$2 :**

(a) Justifier que l'angle $\widehat{BAE}$ mesure $15^o$.

**E.20** On ne considère dans cet exercice que des feuilles de papier de format A4, c'est-à-dire de dimensions $21\,cm$ et $29{,}7\,cm$.

**Partie A - Création d'un cornet par pliages**

À partir d'une feuille A4, il s'agit de réaliser, par découpage et pliages successifs, un cornet.
Voici le protocole de construction de ce cornet, illustré sur la figure ci-dessous :




**Étape 1 :** découper dans la feuille de format A4 un carré $ABA'C$ de $21\,cm$ de côté.

**Étape 2 :** plier ce carré suivant $(BC)$ pour obtenir un triangle rectangle isocèle vérifiant : $AB=AC=21\,cm$

**Étape 3 :** placer le sommet $B$ sur un point $D$ du segment $[AB]$ tel que, après pliage, la droite $(DE)$ soit parallèle à la droite $(BC)$.

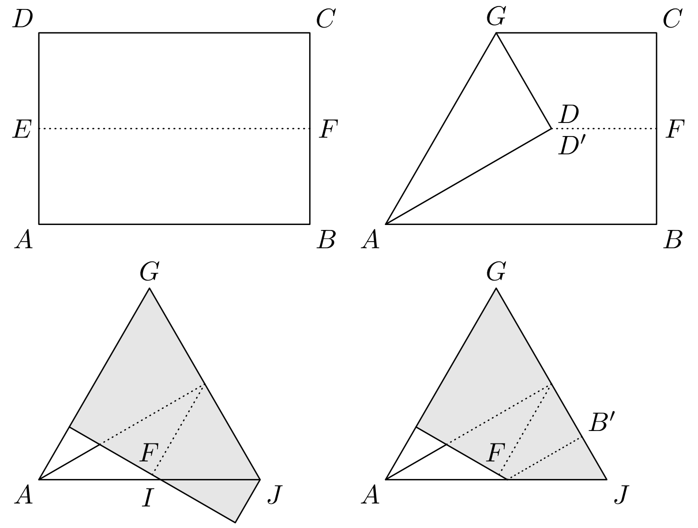
**Étape 4 :** effectuer une démarche similaire à partir du sommet $B$.

**Étape 5 :** plier les deux triangles supérieurs, l'un devant, l'autre derrière.

Lorsque l'on mesure $AD$, on obtient $8{,}7\,cm$ *(arrondie au mm)*.
Quelle est la valeur exacte de la distance $AD$?

**Partie B - Réalisation d'un triangle particulier**

À partir d'une feuille A4, il s'agit maintenant de réaliser, par pliages successifs, un triangle particulier. Cette feuille est modélisée par un rectangle $ABCD$. $E$ et $F$ désignent respectivement les milieux des segments $[AD]$ et $[BC]$.
Voici le protocole de construction de ce triangle illustrée par la figure ci-dessous.




Le rectangle de la figure suivante correspond à la feuille A4 dépliée après avoir réalisé le triangle. On souhaite déterminer la nature du triangle ainsi construit.

1. Montrer que la mesure de l'angle $\widehat{GAJ}$ est égale à $60^o$.
2. Montrer que l'on rabat le point $C$ sur le segment $[AG]$.
3. Montrer que l'on rabat le point $B$ sur le segment $[JG]$. Conclure.

## 8. *Géométrie, théorème de Pythagore et de Thalès*

**E.21** $A$ et $B$ sont deux points d'un cercle de centre $O$ et de rayon 5 tels que $AB=6$.

Le carré $PQRS$ est inscrit dans le secteur angulaire $OAB$ de sorte que :

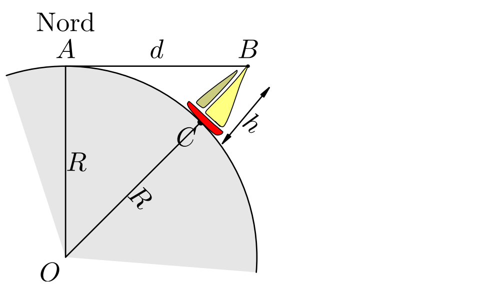
- $P$ est sur le rayon $[OA]$ ;
- $S$ est sur le rayon $[OB]$ ;
- $Q$ et $R$ sont deux points de l'arc de cercle reliant $A$ et $B$.

1. Faire une figure correspondant à la situation proposée.
2. Calculer l'aire du carré $PQRS$.

## 9. *Géométrie et trigonométrie*

**E.22** **Calcul du rayon $R$ de la terre**

1. Un observateur se trouve sur le rivage en $A$ et voit s'éloigner vers le sud un bateau dont on connait la hauteur $h$ émergée *(comme sur la figure ci-dessous, qui n'est pas à l'échelle)*. Du fait de la rotondité de la terre, le bâtiment disparait totalement de l'horizon, une fois éloigné de la côte de la distance $d=AB$ à vol d'oiseau.




On néglige la taille de l'observateur de telle sorte que $OA=R$.

On suppose connue la distance $d$. On rappelle que la ligne d'horizon $(AB)$ est tangente à la Terre en $A$.

Trouver une relation entre $R$, $d$ et $h$.

(2) Justifier que $\dfrac{h}{R}$ est très petit.

(3) En déduire que : $R \approx \dfrac{d^2}{2 \cdot h}$

(4) Application numérique : pour $h = 20\,m$ et $d = 16\,km$, donner une valeur du rayon $R$ de la Terre, arrondie au kilomètre près.

**Ligne d'horizon**

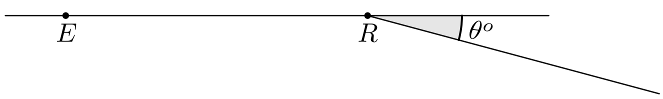
Dans toute cette partie, on convient que $R = 6400\,km$.

(5) On cherche quelle doit être la hauteur $h$ du bateau dans la figure ci-dessus pour que la vigie, située en haut du mat, aperçoive le rivage d'une île située à une distance *(en ligne droite)* $d$ donnée.

Montrer que cela revient à résoudre, pour $d$ donnée, l'équation d'inconnue $h$ : $(h+R)^2 = d^2 + R^2$

(6) Dans le cas où $d = 50\,km$, calculer la hauteur $h$ et la longueur de l'arc $\widehat{AH}$.

E.23 Pierre et sa fille Éloïse se promènent sur une route horizontale. En un point $R$, cette route descend faisant un angle $\theta$ de $5^o$ avec l'horizontal *(voir figure)*



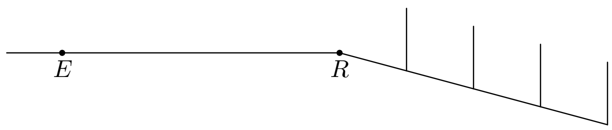

Éloïse, dont les yeux sont à 1,6 mètre du sol, s'arrête en un point $E$, à 24 mètres du point $R$.

Son père continuant à marcher, passe devant le point $R$ puis s'engage dans la partie en pente de la route.

**Indication :** on arrondira les longueurs au centimètres près et les angles au centième près.

(1) Quand il se trouve à 86 mètres de $R$, il disparaît des yeux de sa fille.
Déterminer la hauteur de Pierre.

(2) Dans la partie en pente de la route, des poteaux d'une hauteur de 6,5 mètres sont plantés verticalement tous les 28 mètres, comme sur le schéma ci-dessous :




Le pied du premier poteau se situe à 28 mètres du point $R$.
On admet l'hypothèse que les poteaux ne peuvent se masquer les uns des autres.

Combien Éloïse peut-elle voir de poteaux de l'endroit où elle se trouve?

(3) Quelle est, en réalité, la mesure de l'angle $\theta$, sachant qu'Éloïse ne voit que 5 poteaux?

On pourra utiliser la formule : $1 + (\tan\theta)^2 = \dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$

On donnera une valeur arrondie de $\theta$ à $10^{-3}$ près.

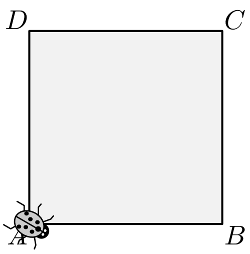
## 10. *Probabilité*

E.24

Une coccinelle se déplace sur les côtés d'un carré $ABCD$ en partant du point $A$. Elle peut marcher à rebours si elle le souhaite.
On appelle déplacement tout trajet de la coccinelle le long d'un côté du carré. Une marche est constituée de déplacements, ainsi :

$A \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow D \longrightarrow C$

est une marche de quatre déplacements dont l'arrivée est le point $C$.




Dans cette partie, la coccinelle se déplace de manière aléatoire sur les côtés d'un carré $ABCD$ et l'on considère que tous ses déplacements sont équiprobables.

(1) (a) La coccinelle peut-elle atteindre le point $B$ en trois déplacements?

(b) Quelles sont les arrivées possibles pour une marche de trois déplacements?

(c) Quelles sont les arrivées possibles si la marche compte un nombre pair de déplacements?

(d) Quelles sont les arrivées possibles si la marche compte un nombre impair de déplacements?

(2) Dans cette question, la coccinelle effectue deux déplacements.

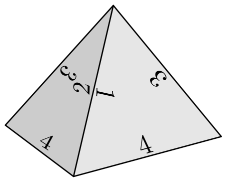
Éventuellement à l'aide d'un arbre, calculer la probabilité de l'événement $A_2$ : "*la coccinelle arrive en $A$ en effectuant deux déplacements*".

(3) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

| Nombre de déplacements de la marche | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité que la coccinelle arrive en $A$ | | | | | |

E.25

Un dé tétraédrique comporte quatre faces comme le dé représenté ci-contre. Lorsqu'on jette un tel dé, le résultat est le nombre inscrit au plus près de la base tétraèdre. Dans notre exemple, le dé tétraédrique est tombé sur la face 4.




Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jouent avec quatre dés tétraédriques réguliers et équilibrés, mais qui ne sont pas numérotés de façon habituelle. Ainsi, le dé d'Antoine compte quatre faces numérotées 1, 6, 6 et 6. Avec ce dé, le nombre 1 est obtenu avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$ et le nombre 6 avec la probabilité $\dfrac{3}{4}$.

- Le dé de Baptiste est numéroté 4, 4, 5 et 5 ;
- celui de Cyril 3, 3, 3 et 8 ;
- et enfin, celui de Dianne 2, 2, 7 et 7.

1. Chaque joueur jette ce dé tétraédrique une fois. Qui a le plus de chances d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 6?
2. Les joueurs commencent une série de duels : Antoine joue contre Baptiste, Baptiste joue contre Cyril, Cyril joue contre Diane, Diane joue contre Antoine. Le gagnant de chaque duel est le joueur qui a obtenu le résultat le plus élevé.
   a. Montrer que dans le premier duel Antoine gagne contre Baptiste avec une probabilité de $\dfrac{3}{4}$.
   b. Donner les probabilités de gain des joueurs dans les trois autres duels.
3. Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jettent simultanément leur dé. Celui des quatre joueurs qui obtient le plus grand nombre gagne.
   a. Montrer que la probabilité que Baptiste gagne est égale à $\dfrac{3}{32}$.
   b. Qui a le plus de chances de gagner ce jeu?

## 11. *Hors programme*

E.26 Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $n$ boules pouvant être de différentes couleurs.
Le jeu consiste à extraire au hasard une boule de l'urne, puis sans remettre celle-ci dans l'urne à extraire une seconde boule de l'urne. Le joueur a gagné lorsque les deux boules tirées sont de la même couleur.
On admet qu'à chaque tirage, toutes les boules de l'urne ont la même probabilité d'être tirées.
On dit que le jeu est équitable lorsque la probabilité $P(G)$ que le joueur gagne est égale à $\dfrac{1}{2}$.

1. a. Démontrer que si l'urne contient 10 boules dont 4 blanches et 6 rouges alors $\mathcal{P}(G) = \dfrac{7}{15}$.
   b. Calculer $\mathcal{P}(G)$ lorsque l'urne contient 12 boules dont 4 blanches, 6 rouges et 2 noires.
2. Dans cette question, l'urne contient 6 boules rouges et d'autres boules qui sont toutes blanches.
   a. Soit $x$ le nombre de boules blanches contenues dans l'urne.
   Démontrer que : $\mathcal{P}(G) = \dfrac{x(x-1)+30}{(x+6)(x+5)}$

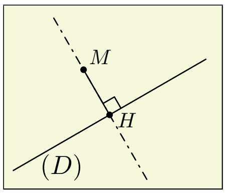
## 12. *Exercices non-classés*

E.27 À partir de deux nombres entiers positifs, on construit une liste de nombres où chaque nombre est la somme des deux précédents.

1. Choisir deux nombres entiers positifs inférieurs à 10 et déterminer les dix premiers nombres de la liste définie précédemment.
2. Un mathé-magicien prétend être capable de déterminer rapidement et exactement la somme des dix premiers nombres d'une liste quelconque ainsi construite. Montrer que, quels que soient les nombres de départ, cette somme est multiple d'un des nombres de la liste dont on déterminera la position.

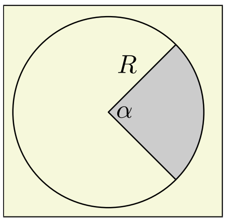
E.28

On appelle ***distance entre un point*** $M$ ***et une droite*** $(D)$ la distance $MH$, où $H$ est le point d'intersection de $(D)$ avec la droite perpendiculaire à $(D)$ passant par $M$.



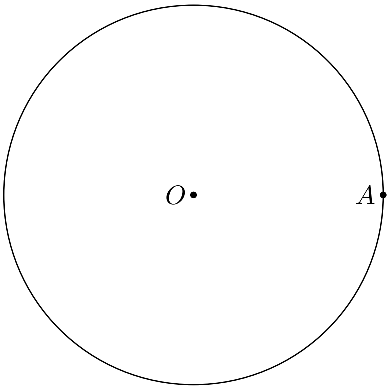

Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est $R$, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure $\alpha$ *(en degrés)*, alors l'aire de la portion de disque grisée vaut : $\dfrac{\pi \cdot \alpha \cdot R^2}{360}$.

Dans la partie **2** de l'exercice, on considérera la distance d'un point $M$ à un segment $[BC]$ comme étant la distance du point $M$ à la droite $(BC)$.




**Partie 1**

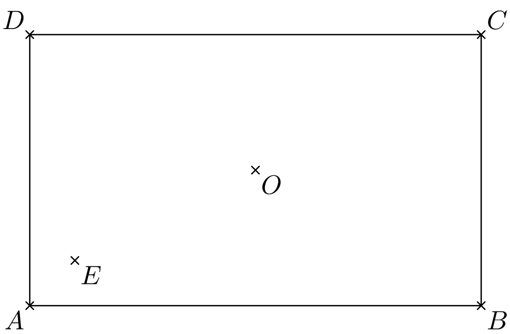
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $O$, $A$ un point de ce cercle et $\mathcal{D}$ le disque délimité par ce cercle.




1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de $O$ et de $A$.
2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de $O$ que de $A$.
3. Soit $M$ un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque $\mathcal{D}$.
Quelle est la probabilité que $M$ soit plus proche de $O$ que de $A$?

**Partie 2**

Soit $ABCD$ un rectangle de longueur $AB = 20\,cm$ et de largeur $BC = 12\,cm$, de centre $O$.
Soit $E$ un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de $A$, à $2\,cm$ de chaque bord *(comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle)*.
Soit $M$ un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle $ABCD$.




1. Quelle est la probabilité que $M$ soit plus proche du côté $[BC]$ que du côté $[AD]$?
2. a. Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés $[AB]$ et $[BC]$.
   b. Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté $[BC]$ que du côté $[AB]$.
   c. Quelle est la probabilité que $M$ soit plus proche du côté $[BC]$ que du côté $[AB]$?
3. Quelle est la probabilité que $M$ soit plus proche du côté $[AB]$ que des trois côtés $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$?
4. Quelle est la probabilité que $M$ soit plus proche de $O$ que de $E$?
5. Quelle est la probabilité que $M$ soit plus proche de $O$ que des quatre sommets $A$, $B$, $C$ et $D$?

E.29 Trois entiers naturels distincts $a$, $b$, $c$ **rangés par ordre strictement croissant**, $a<b<c$, sont en progression arithmétique si : $c-b=b-a$

On dit alors que $(a\,;b\,;c)$ est un triplet arithmétique.

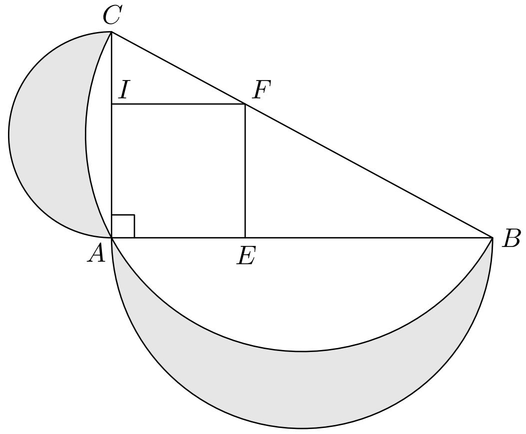
1. Compléter les triplets arithmétiques suivants :
   a. $(57\,;101\,;\ldots)$  b. $(57\,;\ldots\,;101)$
   c. $(\ldots\,;57\,;101)$
2. a. Peut-on trouver un triplet arithmétique $(a\,;b\,;c)$ dont la somme vaut 2012?
   b. Combien y a-t-il de triplets arithmétiques $(a\,;b\,;c)$ de somme 2013?
3. On prend au hasard trois nombres entiers $a$, $b$, $c$ dans 1, 2, 3, …, 10 avec $a<b<c$. Quelle est la probabilité que $(a\,;b\,;c)$ soit un triplet arithmétique?

E.30 Une association souhaite créer un logo.

Ce logo a été conçu à partir de la construction suivante :

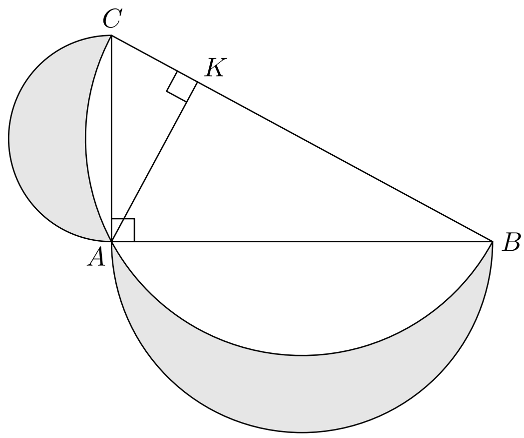
- $ABC$ est un triangle rectangle en $A$,
- on pose : $AC=x$ ; $AB=y$ ; $BC=z$,
- on a tracé les demi-cercles de diamètres $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$ et le carré $AEFI$ tel que $E\in[AB]$, $F\in[BC]$ et $I\in[AC]$.

1. Pour cette question, on considère la figure suivante :




  a. Calculer la longueur du côté du carré $AEFI$ en fonction de $x$ et $y$.
  b. Que peut-on dire du point $I$ si le triangle $ABC$ est isocèle? *(justifier)*
  c. On suppose $y=4$. L'aire du carré $AEFI$ peut-elle être égale à 9? *(justifier)*

2. Soit $K$ le pied de la hauteur issue de $A$ du triangle $ABC$. On pose $AK=h$. On a donc la figure suivante :




  a. Justifier que : $(x+y)^2=z^2+2\cdot z\cdot h$.
  b. Exprimer de même $(x-y)^2$ en fonction de $z$ et de $h$. Montrer que $h$ est inférieur à la moitié de $z$.
  c. Est-il possible que : $z=10$ et $h=4{,}8$? Si oui, déterminer les valeurs de $x$ et de $y$.

3. Comparer l'aire du triangle $ABC$ à l'aire de la surface grisée.