Seconde / Racines carrées

Vous trouverez davantage d'exercices sur les racines carrées en suivant le lien

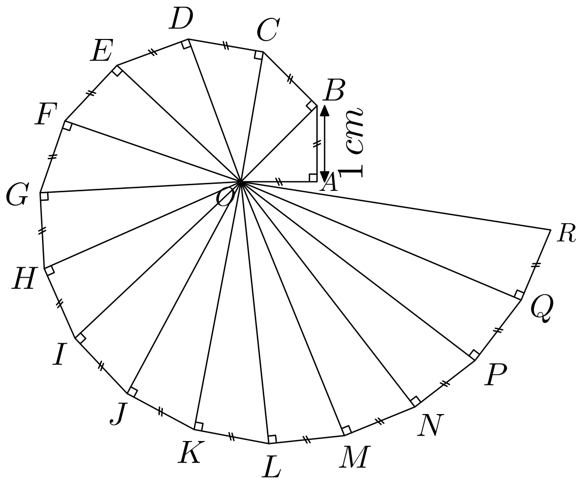
https://chingatome.fr/chapitre/hp-lycee/racines-carres

ChingEval : 6 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. *Introduction*

E.1 La figure ci-dessous est construite ainsi :

- Le triangle OAB est isocèle rectangle en A tel que $OA=1\,cm$;
- À l'extérieur du triangle OAB et sur l'hypoténuse $[OB]$, on construit un triangle rectangle en B tel que : $BC=1$;
- et ainsi de suite...



1. a. Justifier les deux égalités suivantes :
$OB^2=2 \quad ; \quad OC^2=3$

   b. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée des longueurs OB et OC à 10^{-3} près.

2. a. Justifier que : $OD=2\,cm$.

   b. Justifier brièvement que : $OI=3\,cm$.

E.2 Répondre à la question suivante à l'aide de la calculatrice :

1. Donner la troncature des nombres suivants au centième près :

   a. $\sqrt{2}$ b. $\sqrt{3}$ c. $\sqrt{10}$

2. Donner la valeur arrondie des nombres suivants à 10^{-2} près :

   a. $\sqrt{52}$ b. $\sqrt{4+0{,}03}$ c. $\dfrac{\sqrt{72}+2}{\sqrt{2}}$

3. Déterminer la valeur exacte des nombres suivants :

   a. $\sqrt{4}$ b. $\sqrt{25+75}$ c. $\sqrt{0{,}01}$

4. Résoudre les équations suivantes *(chacune de ces équations admettent deux solutions)* :

   a. $x^2=9$ b. $x^2=100$ c. $x^2=2$

E.3 Sans l'aide de la calculatrice, donner la valeur exacte de chacune des racines carrées ci-dessous :

a. $\sqrt{4}$ b. $\sqrt{400}$ c. $\sqrt{20+44}$

d. $\sqrt{0{,}49}$ e. $\sqrt{121}$ f. $\sqrt{0{,}25}$

E.4 Sans l'aide de la calculatrice, justifier qu'aucune des expressions ci-dessous n'a de sens :

$\sqrt{-4} \quad ; \quad \sqrt{-1} \quad ; \quad \sqrt{5-9}$

2. *Autour de la définition*

E.5 Soit a un nombre positif, la définition de la racine carrée me permet d'établir les deux relations suivantes :

$\sqrt{a^2}=a \quad ; \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$

Utiliser ces deux propriétés pour simplifier, si possible, les expressions suivantes :

a. $\left(\sqrt{4}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2$ b. $\sqrt{3^2+4^2}$ c. $\left(\sqrt{4+6}\right)^2$

d. $\sqrt{(4+6)^2}$ e. $\sqrt{4^2}\times\sqrt{6^2}$ f. $\sqrt{4^2\times6^2}$

E.6

1. a. Donner la valeur des expressions suivantes :
$\sqrt{9}+\sqrt{16} \quad ; \quad \sqrt{9+16}$

   b. Donner la valeur des expressions suivantes :
$\sqrt{169}-\sqrt{25} \quad ; \quad \sqrt{169-25}$

2. Que peut-on dire des relations ci-dessous :

   a. $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ b. $\sqrt{a-b}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

E.7 Justifier les deux égalités suivantes :

$\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^4=3 \quad ; \quad \sqrt{7^{10}}=7^5$

3. *Premières équations du second degré*

E.8

1. Déterminer deux valeurs de x vérifiant l'égalité :
   $x^2 = 4$.
2. Quel*(s)* nombre*(s)* vérifie*(nt)* l'égalité :
   $x^2 = 0$.
3. Existe-t-il un nombre x vérifiant l'égalité :
   $x^2 = -1$.

   Justifier votre réponse.

E.9

1. Donner les deux nombres solutions de l'équation $x^2=4$.
2. Résoudre les équations suivantes :

   a. $x^2 = 0$ b. $x^2 = -1$

   c. $(x+1)^2 = 0$ d. $(x-1)^2 = 4$

4. *Relations multiplicatives et simplifications*

E.10

Proposition : pour tout nombre a et b positifs ou nuls, on a l'égalité : $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$

1. Écrire chacun des nombres ci-dessous sous la forme de produit, où le maximun de facteurs sont des nombres élevés au carré *(exemple* $50=5^2\times2$*)*

   a. 75 b. 32 c. 18

   d. 72 e. 1 000 f. 242
2. Donner une écriture simplifiée des racines carrées suivantes :

   a. $\sqrt{75}$ b. $\sqrt{32}$ c. $\sqrt{18}$

   d. $\sqrt{72}$ e. $\sqrt{1\,000}$ f. $\sqrt{242}$

E.11 Écrire les radicaux suivant sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux entiers où b est le plus petit possible :

a. $\sqrt{3^2\times2}$ b. $\sqrt{13\times4^2}$ c. $\sqrt{12}$

d. $\sqrt{48}$ e. $\sqrt{1\,600}$ f. $\sqrt{360}$

E.12 Simplifier l'expression de chacun des produits suivants :

a. $\sqrt{6}\times\sqrt{40}$ b. $\sqrt{3}\times\sqrt{15}$ c. $\sqrt{8}\times\sqrt{18}$

E.13 Écrire les calculs suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers avec b le plus petit possible :

a. $\sqrt{5}\times\sqrt{30}$ b. $\sqrt{24}\times\sqrt{6}$ c. $5\sqrt{2}\times2\sqrt{2}$

d. $3\sqrt{6}\times4\sqrt{3}$ e. $\sqrt{39}\times2\sqrt{13}$ f. $2\left(\sqrt{15}\right)^2$

5. *Relations multiplicatives et quotient*

E.14

1. Simplifier le calcul suivant : $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$
2. a. Compléter la phrase suivante :
   $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ est un nombre dont le carré vaut ......

   b. Compléter l'égalité : $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{\dots}{\dots}}$
3. Pour tous nombres positifs a et b, avec $b\neq0$, justifier l'égalité :
   $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

E.15 Justifier que chacune des expressions présentées ci-dessous représentent l'inverse du nombre $\dfrac{\sqrt{8}}{3}$:

a. $\dfrac{3}{\sqrt{8}}$ b. $\dfrac{3\sqrt{8}}{8}$ c. $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{16}}$

6. *Simplifications de quotients avec des radicaux au dénominateur*

E.16 Écrire les fractions suivantes sans radical au dénominateur :

a. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ c. $\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$

E.17 Simplifier les expressions ci-dessous sans radical au dénominateur :

a. $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ b. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ c. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}}$ d. $\sqrt{\dfrac{2}{18}}$ e. $\sqrt{\dfrac{27}{3}}$

7. *Relations multiplicatives et problèmes*

E.18

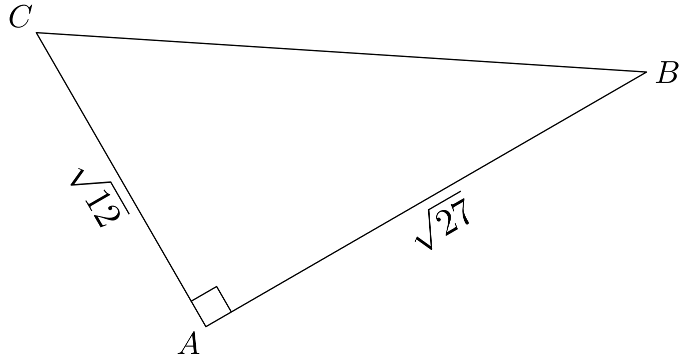
(1) Développer : $A(x)=(2x+1)(2x-1)$.

(2) Calculer $A(x)$ pour $x=\sqrt{5}$

(3) Expliquer comment on peut utiliser la première question pour calculer :

$20\,001\times 19\,999$

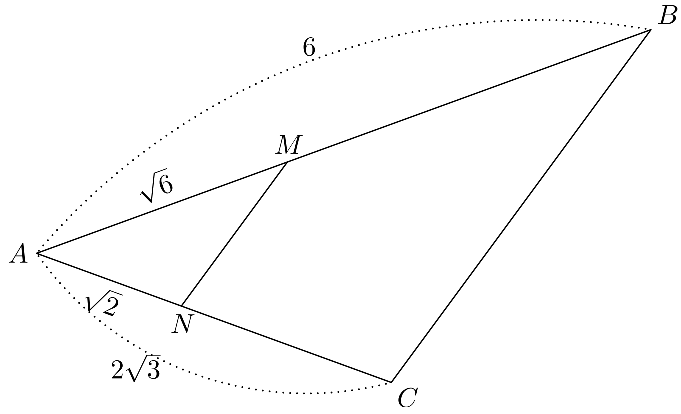
E.19 On considère le triangle ABC représenté ci-dessous dont certaines mesures de ses côtés sont portées sur la figure :



Déterminer l'aire de ce triangle.

E.20 On considère le triangle ABC où M est un point de $[AB]$ et N est un point de $[AC]$. On a les mesures suivantes :

$AB=6$; $AC=2\sqrt{3}$; $AM=\sqrt{6}$; $AN=\sqrt{2}$



Montrer que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

8. *Simplifications additives*

E.21

(1) Simplifier l'écriture de la somme ci-dessous :
$A=\sqrt{2}+2\sqrt{2}$

(2) (a) Simplifier l'expression des racines carrées suivantes :
$\sqrt{50}$; $\sqrt{32}$

(b) Déduire de la question précédente une simplification de la somme :
$B=\sqrt{50}+\sqrt{32}+\sqrt{2}$

(3) On considère le nombre : $C=2\sqrt{27}+5\sqrt{75}$
Justifier la simplification suivante : $C=31\sqrt{3}$

E.22 Simplifier au maximum l'écriture des calculs suivants :

(a) $\sqrt{3}+2\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{12}+\sqrt{3}$

(c) $\sqrt{3}\times\sqrt{6}+\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{8}+\sqrt{2}$

E.23 Donner les expressions ci-dessous sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux entiers où b est le plus petit possible :

(a) $\sqrt{3}+\sqrt{3}$ (b) $2\sqrt{5}+3\sqrt{5}$ (c) $\sqrt{2}-4\sqrt{2}$

(d) $\sqrt{8}+\sqrt{2}$ (e) $\sqrt{27}-8\sqrt{3}$ (f) $\sqrt{50}-\sqrt{72}$

E.24

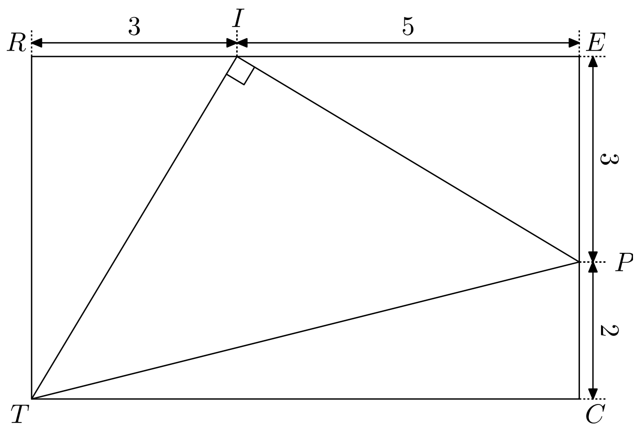
(1) Écrire le calcul suivant sous la forme $a\sqrt{3}$ où a est un entier :

$2\sqrt{48}+7\sqrt{3}-\sqrt{75}$

(2) Montrer que A est un nombre entier :

$\sqrt{63}-4\sqrt{2}+\sqrt{18}\times\sqrt{2}+2\sqrt{8}-3\sqrt{7}$

E.25 L'unité de longueur est le centimètre. $RECT$ est un rectangle.



(1) Calculer le périmètre du triangle TIP.

(2) Deux élèves ont calculé le périmètre du triangle TIP.

- Marcel a trouvé : $2\sqrt{17}\left(\sqrt{2}+1\right)$.
- Paul a trouvé : $2\sqrt{34}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(a) La réponse de Marcel est-elle exacte?

(b) La réponse de Paul est-elle exacte?

9. *Simple distributivité et racine carrée*

E.26 Développer puis simplifier les expressions suivantes :

(a) $\sqrt{2}(\sqrt{18}+2)$ (b) $\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{45})$

E.27 Calculer et simplifier l'écriture des racines suivantes

(a) $(3+\sqrt{2})\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{5}\times(2\sqrt{15}-3\sqrt{5})$

10. *Double distributivité et racines carrées*

E.28 Calculer et simplifier au maximum l'écriture des racines suivantes :

(a) $(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})$ (b) $(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})+1$

E.29 Calculer et donner l'écriture simplifiée des calculs suivants :

$(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})+1$

E.30 Donner le résultat des calculs suivants sous la forme $a+b\sqrt{c}$, où a et b sont des nombres relatifs et où c est un nombre entier positif le plus petit possible.

(a) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ (b) $(4\sqrt{5}-3\sqrt{3})(\sqrt{3}+2\sqrt{5})$

E.31 Calculer et simplifier au maximum l'écriture des racines suivantes :

(a) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ (b) $(3\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$

E.32 Développer et simplifier les expressions suivantes :

(a) $(2\sqrt{3}+1)^2$ (b) $(3\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$

E.33

(1) Montrer que les deux nombres suivants sont inverses l'un de l'autre : $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$; $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

(2) Montrer que : $\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2=1+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

11. *Racine carrée et valeur absolue*

E.34

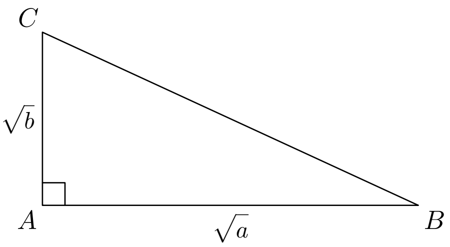
(1) Compléter le tableau ci-dessous :

x	-5	-3	0	1	2	$\sqrt{5}$
$\sqrt{x^2}$						
$d(0\,;x)$						

(2) Pour tout nombre réel x ($x\in\mathbb{R}$), que peut-on dire de $\sqrt{x^2}$ et $d(0\,;x)$?

12. *Inégalité triangulaire*

E.35 Soit a et b deux nombres réels strictement positifs. On considère le triangle ABC rectangle en A dont les côtés $[AB]$ et $[AC]$ ont pour mesures respectives $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$:



(1) Exprimer la longueur de l'hypoténuse $[BC]$ en fonction des nombres a et b.

(2) Quelle propriété permet d'affirmer l'inégalité :
$$\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$$
pour tout nombre réel positif ou nul a et b?

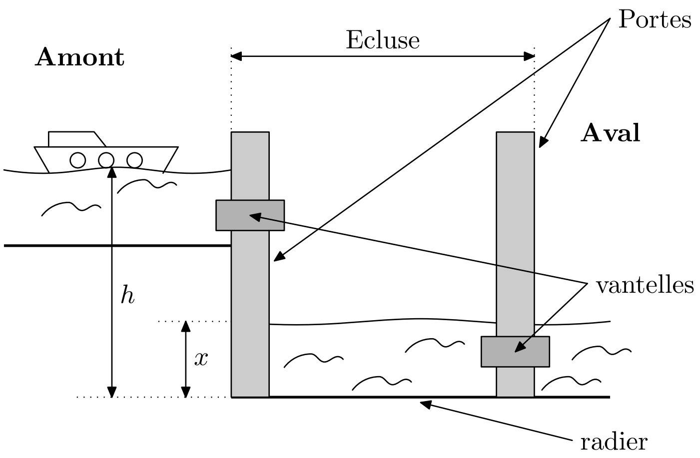
13. *Exercices non-classés*

E.36 À l'aide de la décomposition des nombres entiers en produits de facteurs premiers, donner l'écriture de chacun des nombres suivants sous la forme $p\sqrt{q}$ où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ et où q est le plus petit possible.

(a) $\sqrt{432}$ (b) $\sqrt{126}$ (c) $\sqrt{42}$

E.37 On étudie plus précisément le remplissage d'une écluse pour faire passer une péniche de l'amont vers l'aval.

Principe : Il s'agit de faire monter le niveau de l'eau dans l'écluse jusqu'au niveau du canal en amont afin que l'on puisse ensuite faire passer la péniche dans l'écluse.
Ensuite, l'écluse se vide et le niveau descend à celui du canal en aval. La péniche peut sortir de l'écluse et poursuivre dans le canal en aval.



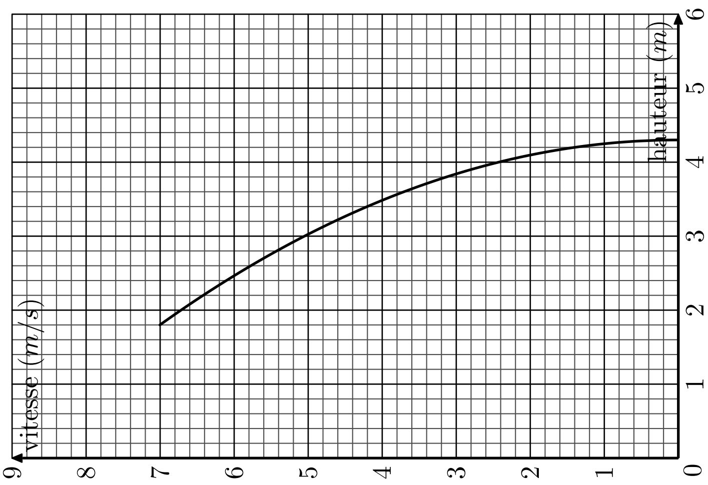
Toutes les mesures de longueur sont exprimés en mètres.
On notera h la hauteur du niveau de l'eau en amont et x la hauteur du niveau de l'eau dans l'écluse.
Ces hauteurs sont mesurées à partir du radier *(fond)* de l'écluse. *(voir schéma ci-dessus)*. Lorsque la péniche se présente à l'écluse, on a :
$h = 4{,}3\,m \quad ; \quad x = 1{,}8\,m$

La vitesse de l'eau s'écoulant par la vantelle *(vanne)* est donnée par la formule suivante :
$v = \sqrt{2g(h-x)}$
où $g = 9{,}81$ *(accélération en mètre par seconde au carré noté $m \cdot s^{-2}$)*

1. Calculer l'arrondi à l'unité de la vitesse de l'eau s'écoulant par la vantelle à l'instant de son ouverture. *(On considère l'ouverture comme étant instantanée).*

2. Pour quelle valeur de x, la vitesse d'écoulement de l'eau sera-t-elle nulle ? Qu'en déduit-on pour le niveau de l'eau dans l'écluse dans ce cas ?

3. Le graphique donné en ci-dessous représente la vitesse d'écoulement de l'eau par la vantelle en fonction du niveau x de l'eau dans l'écluse.



Déterminer, par lecture graphique, la vitesse d'écoulement lorsque la hauteur de l'eau dans l'écluse est de $3{,}4\,m$.

