

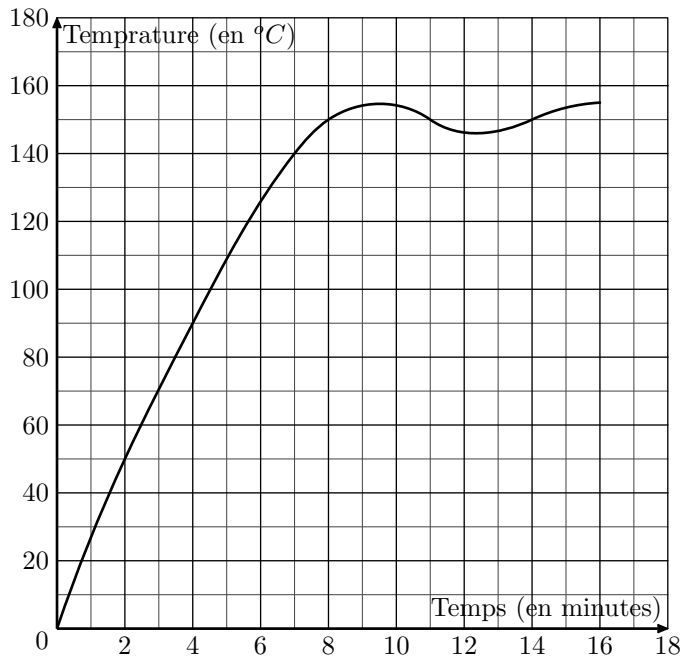
Troisième / Introduction aux fonctions

1. Introduction

E.1 Pour cuire des macarons, la température du four doit être impérativement de $150^{\circ}C$.

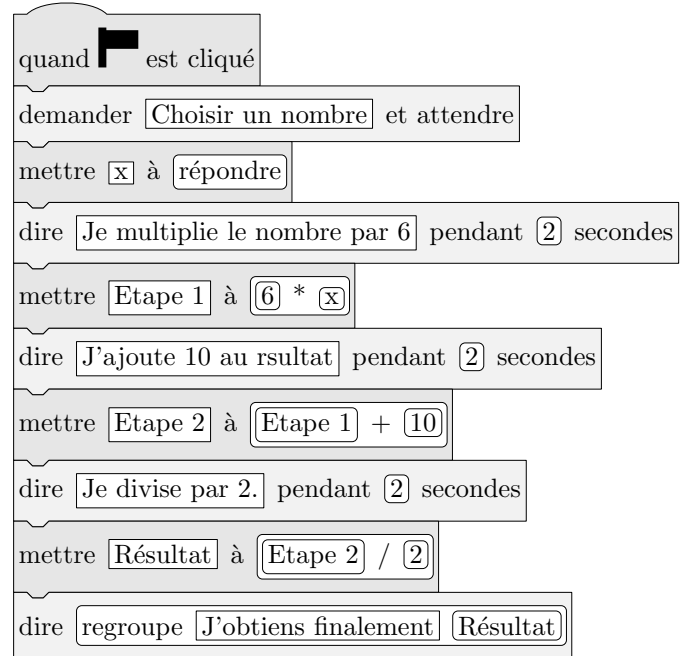
Depuis quelque temps, le responsable de la boutique n'est pas satisfait de la cuisson de ses pâtisseries. Il a donc décidé de vérifier la fiabilité de son four en réglant sur $150^{\circ}C$ et en prenant régulièrement la température à l'aide d'une sonde.

Voici la courbe représentant l'évolution de la température de son four en fonction du temps.



- Quelle est la température atteinte au bout de 3 minutes? Aucune justification n'est demandée.
- De combien de degrés Celsius, la température a-t-elle augmenté entre la deuxième et la septième minute?
- Au bout de combien de temps, la température de $150^{\circ}C$ nécessaire à la cuisson des macarons est-elle atteinte?

E.2 On considère le programme de calcul ci-dessous dans lequel x , **Etape 1**, **Etape 2** et **Résultat** sont quatre variables :



- Julie a fait fonctionner ce programme en choisissant le nombre 5. Vérifier que ce qui est dit à la fin est : "J'obtiens finalement 20".
 - Que dit le programme si Julie le fait fonctionner en choisissant au départ le nombre 7?
- Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

Valeur du nombre choisi	5	7	1	4	8	10
Valeur retournée par l'algorithme						




- Si on appelle x le nombre choisi au départ, vérifier puis justifier que la valeur retournée par l'algorithme est $3x+5$.

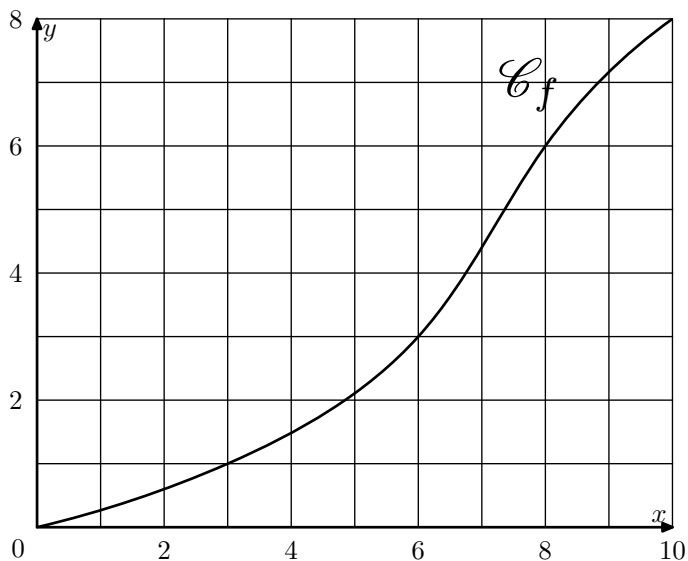
E.3 Pour l'ensemble de ses chantiers, l'entreprise se fournit auprès de deux grossistes. Les tarifs proposés pour des paquets de 10 dalles sont :

- Grossiste A : 48€ le paquet, livraison gratuite.
- Grossiste B : 42€ le paquet, livraison 45€ quel que soit le nombre de paquets.

- Quel est le prix pour une commande de 9 paquets :
 - avec le grossiste A?
 - avec le grossiste B?
- Exprimer en fonction du nombre n de paquets :
 - le prix p_A en euros d'une commande de n paquets avec le grossiste A ;
 - le prix p_B en euros d'une commande de n paquets avec le grossiste B.

2. Lecture graphique d'images

E.4    Dans le repère ci-dessous, est représentée la courbe représentative de la fonction f .






On note $f(x)$ l'image du nombre x par la fonction f .

① A l'aide du graphique, compléter le tableau suivant :

x	0	3	6	8	10
$f(x)$					

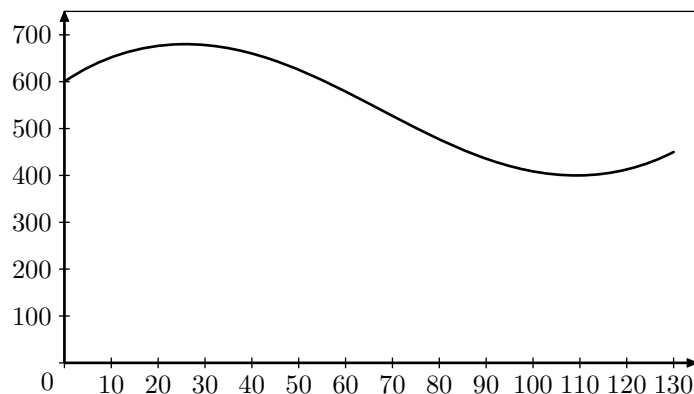
② Graphiquement, déterminer une valeur approchée de l'image de 9 par la fonction f ; c'est-à-dire la valeur ap-

prochée de $f(9)$.

E.5    Une usine de Moorea fabrique du jus de fruits.

Soit C une fonction qui, à une quantité de jus fabriquée en litre(s) associe le coût de fabrication en F .




On a représenté ci-dessous la fonction C pour une quantité de jus comprise entre 0 et 130 litres.

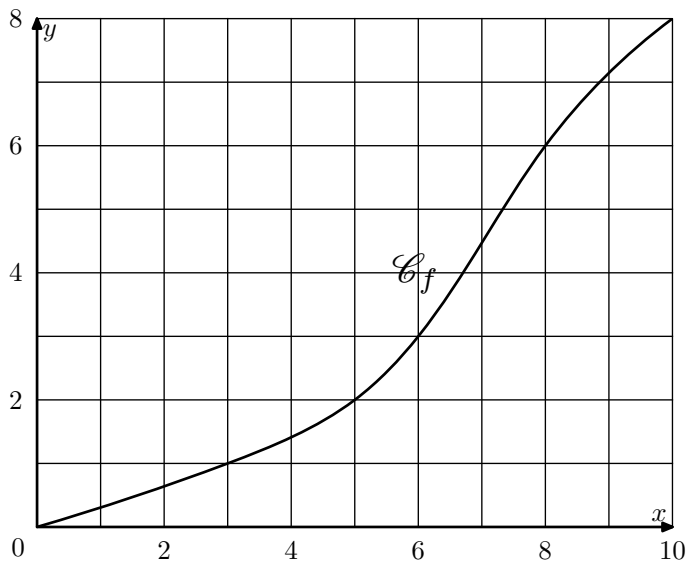


En faisant apparaître vos traits de construction sur la figure se trouvant ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

- ①
 - a) Donner le coût de fabrication de 100 litres de jus.
 - b) Pour quelle(s) quantité(s) de jus, le coût de fabrication est-il supérieur à 550 F ?
- ②
 - a) Donner l'image de 85 par la fonction C .
 - b) Lire $C(75)$

3. Lecture graphique d'antécédents

E.6    Dans le repère ci-dessous, est représentée la courbe représentative de la fonction f .



On note $f(x)$ l'image du nombre x par la fonction f .

①

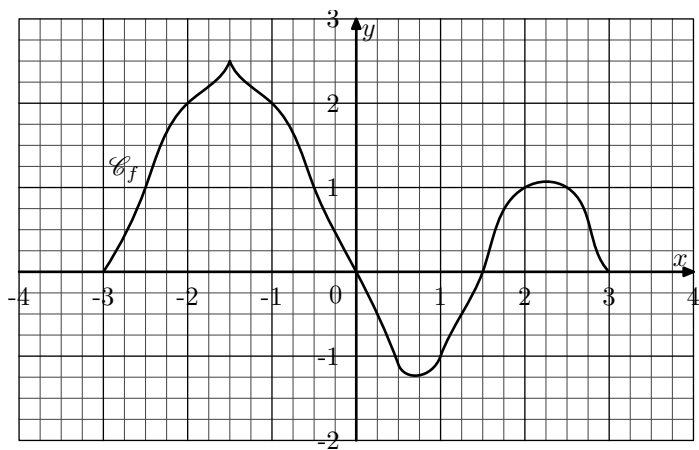
- a) Compléter le tableau suivant :

x	0	3	6	8	10
$f(x)$					

- b) Donner un antécédent du nombre 6 par la fonction f .

- ② Donner un antécédent du nombre 2 par la fonction f .
- ③ Déterminer une valeur approchée de l'antécédent de 4 ; c'est-à-dire la valeur approchée d'un nombre x vérifiant $f(x) = 4$.

E.7 📏 📐 🎒 On considère la fonction f dont la courbe représentative \mathcal{C}_f est donnée dans le repère ci-dessous :



- 1
 - a) Donner les coordonnées des deux points de la courbe ayant la valeur 2 pour ordonnées.
 - b) Quels sont les antécédents du nombre 2 par la fonction f ?
- 2
 - a) Combien d'antécédents par la fonction admet le nombre 1? Justifier votre réponse.
 - b) Donner l'ensemble des antécédents du nombre 1 par la

4. Images et antécédents à partir d'un tableau de valeurs

E.9 📏 📐 🎒 On considère une fonction f dont on a, pour seule connaissance, le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-2	0	1	3	6	7
$f(x)$	6	1	2	3	0	-2

Recopier et compléter correctement chacune des phrases ci-dessous :

- 1 L'image du nombre -2 par la fonction f est
- 2 Le nombre 0 est de 6 par la fonction f .
- 3 Un antécédent du nombre ... par la fonction f est 0.

5. Images à partir de l'expression algébrique

E.11 📏 📐 🎒 On considère la fonction qui, à tout nombre x , associe le triple de son carré :

- 1 Donner l'expression de l'image $f(x)$ du nombre x par la fonction f .
- 2 Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

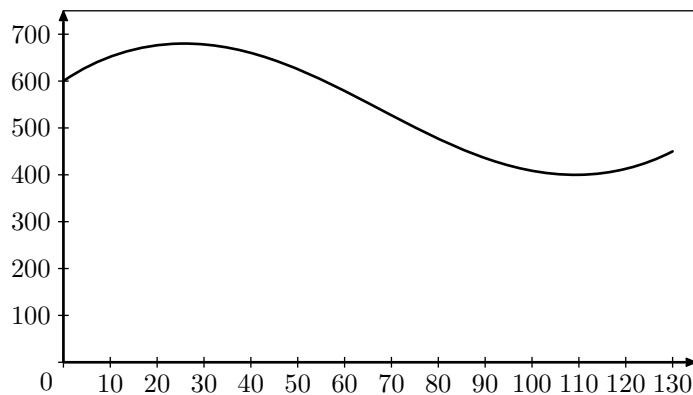
fonction f .

- 3 Donner l'ensemble des antécédents du nombre -1.

E.8 📏 📐 🎒 ⚠️ Une usine de Moorea fabrique du jus de fruits.

Soit C une fonction qui, à une quantité de jus fabriqué en litre(s) associe le coût de fabrication en F.

On a représenté ci-dessous la fonction C pour une quantité de jus comprise entre 0 et 130 litres.



En faisant apparaître vos traits de construction sur la figure ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

Donner le(s) antécédent(s) de 600 par la fonction C .

- 4 Le nombre ... est un antécédent de -2 par f .

E.10 📏 📐 🎒 ⚠️ On a utilisé une feuille de calcul pour obtenir les images de différentes valeurs de x par une fonction f .

Voici une copie de l'écran obtenu :

B2		$f_x \sum = =3 \times B1 - 4$						
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-2	-1	0	1	2	3	4
2	$f(x)$	-10	-7	-4	-1	2	5	8

- 1 Quelle est l'image de -1 par la fonction f ?
- 2 Donner un antécédent du nombre 5 par la fonction f ?

E.12 📏 📐 🎒 ⚠️ On donne le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Ajouter 1
- Elever le résultat au carré
- Soustraire au résultat le carré du nombre de départ




On note f la fonction qui, à tout nombre x choisi à l'entrée du programme, associe le résultat obtenu à la fin de ce programme de calcul.

- 1 Donner l'expression de l'image $f(x)$ du nombre x .

- Montrer que : $f(x) = 2x + 1$
- Compléter le tableau de valeurs de la fonction f :




x	-1	0	1	2
$f(x)$				

6. Antécédents et équations

E.13    On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = 3x - 4$$

- Calculer les images par f des nombres :
-3 ; -1 ; 2,5 ; 10
- À l'aide d'une équation, déterminer les antécédents des nombres 5 et de -10 par la fonction f .





E.14    On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Ajouter 5
- Multiplier par 3
- Soustraire 2

On appelle f la fonction qui, au nombre choisi, associe le résultat du programme de calcul.

- Donner l'expression de l'image $f(x)$ en fonction de x .
- Déterminer l'image de 4 par la fonction f .
 - Déterminer l'antécédent du nombre 4 par la fonction

7. Antécédents et équations-produits

E.16     On considère le programme de calcul :




- Choisir un nombre
- Prendre le carré de ce nombre
- Ajouter le triple du nombre de départ.
- Ajouter 2

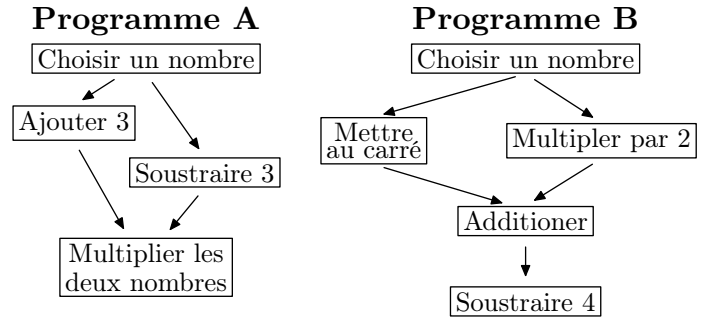
- On appelle x le nombre de départ, exprimer le résultat du programme en fonction de x .
- Montrer que ce résultat peut aussi s'écrire sous la forme $(x+2)(x+1)$ pour toutes valeurs de x .
- On note f la fonction qui a tout nombre x associe la valeur de retour du programme de calcul. On a le tableau de valeur ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	-4	-3	-2	-1	9	1	2	3	4
2	$(x+2)(x+1)$	6	2	0	0	2	6	12	20	30

- D'après le tableau de valeurs, donner deux antécédents du nombre 0 par la fonction f .
- Justifier que la fonction f n'admet que deux antécédents du nombre 0.





f .

E.15    On considère les deux programmes de calculs ci-dessous :



On note f (resp. g) la fonction qui associe au nombre choisi x le résultat du programme A (resp. programme B).

- Donner les expressions des images $f(x)$ et $g(x)$ en fonction de x .
- Déterminer le nombre choisi pour que ces deux programmes de calculs donnent le même nombre.




E.17     La copie d'écran ci-dessous montre le travail qu'a effectué Camille à l'aide d'un tableur à propos des fonctions g et h définies par :

$$g(x) = 5x^2 + x - 7 ; h(x) = 2x - 7$$

Elle a recopié vers la droite les formules qu'elle avait saisies dans les cellules B2 et B3.

	B2	$f_x \sum =$	$=5 * B1 * B1 + B1 - 7$				
		A	B	C	D	E	F
1		x	-2	-1	0	1	2
2		$g(x) = 5x^2 + x - 7$	11	-3	-7	-1	15
3		$h(x) = 2x - 7$	-11	-9	-7	-5	-3

- Donner un nombre qui a pour image -1 par la fonction g .
- Écrire les calculs montrant que : $g(-2) = 11$
- Quelle formule Camille a-t-elle saisie dans la cellule B3?
- Déduire du tableau une solution de l'équation :
 $5x^2 + x - 7 = 2x - 7$
 - Cette équation a-t-elle une autre solution que celle trouvée grâce au tableur?




E.18    Soit g la fonction définie par : $g : x \mapsto x^2 + 1$

- ① Calculer les nombres suivants : $g(2)$; $g(-5)$; $g(-1)$.
- ② Déterminer par la fonction g les deux antécédents du

nombre 5.

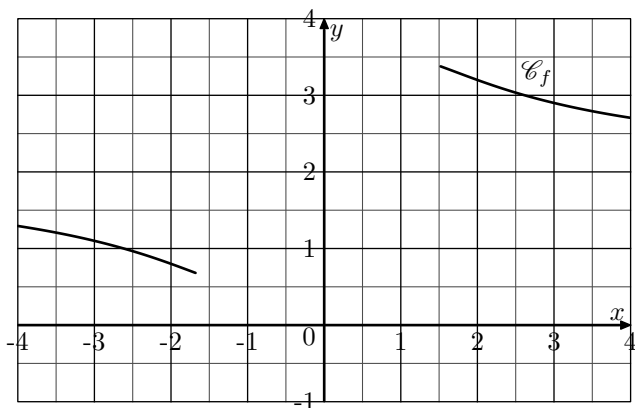
- ③ Déterminer par la fonction g l'unique antécédent du nombre 1.
- ④ Justifier que le nombre 0 n'admet aucun antécédent par la fonction g .

8. Représentation graphique

E.19    On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1} + 2$$

Dans le repère ci-dessous, on a donné une partie de la courbe \mathcal{C}_f .







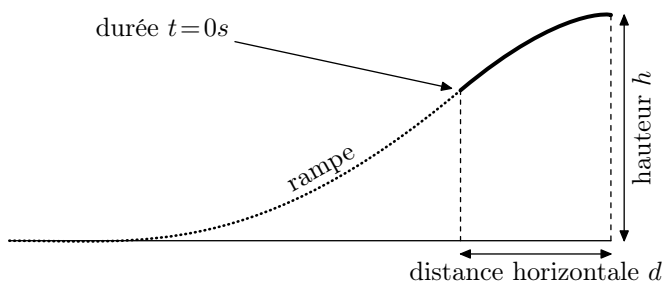
- ① On souhaite compléter le tableau de valeurs ci-dessous afin de construire la partie manquante de la courbe \mathcal{C}_f .

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
$f(x)$						

- ② Placer les points manquants dans le graphique, puis compléter la courbe.

9. Problèmes et tableau de valeurs

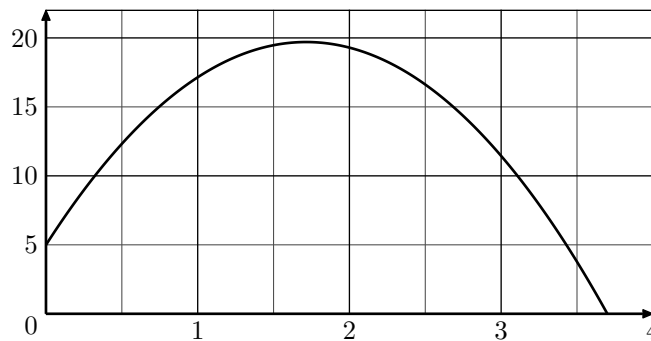
E.20     Lors d'une course en moto-cross, après avoir franchi une rampe, Gaëtan a effectué un saut record en moto.



Le saut commence dès que Gaëtan quitte la rampe. On note t la durée (en secondes) de ce saut. La hauteur (en mètres) est déterminée en fonction de la durée t par la fonction h suivante :

$$h : t \mapsto (-5t - 1,35)(t - 3,7)$$

Voici la courbe représentative de cette fonction h .



Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier en utilisant soit le graphique soit le calcul.

- ① En développant et en réduisant l'expression de h on obtient : $h(t) = -5t^2 + 17,15t + 4,995$
- ② Lorsqu'il quitte la rampe, Gaëtan est à 3,8 m de hauteur.
- ③ Le saut de Gaëtan dure moins de 4 secondes.
- ④ Le nombre 3,5 est un antécédent du nombre 3,77 par la fonction h .
- ⑤ Gaëtan a obtenu la hauteur maximale avant 1,5 seconde.

E.21 Pour ses 32 ans, Denis a acheté un vélo d'appartement afin de pouvoir s'entraîner pendant l'hiver. La fréquence cardiaque (FC) est le nombre de pulsations (ou battements) du coeur par minute

Denis souhaite connaître sa fréquence cardiaque maximale conseillée ($FCMC$) afin de ne pas la dépasser et ainsi de ménager son coeur. La $FCMC$ d'un individu dépend de son âge a , exprimé en années, elle peut s'obtenir grâce à la formule suivante établie par Astrand et Ryhming :

$$\text{Fréquence cardiaque maximale conseillée} = 220 - \text{âge}$$

On note $f(a)$ la $FCMC$ en fonction de l'âge a , on a donc :
 $f(a) = 220 - a$.

- 1 a) Vérifier que la $FCMC$ de Denis est égale à 188 pulsations/minute.
- b) Comparer la $FCMC$ de Denis avec la $FCMC$ d'une personne de 15 ans.
- 2) Après quelques recherches, Denis trouve une autre formule permettant d'obtenir sa $FCMC$ de façon plus précise. Si a désigne l'âge d'un individu, sa $FCMC$ peut être calculée à l'aide de la formule de Gellish :

$$\text{Fréquence cardiaque maximale conseillée} = 191,5 - 0,007 \times \text{âge}^2$$

On note $g(a)$ la $FCMC$ en fonction de l'âge a , on a donc :
 $g(a) = 191,5 - 0,007 \times a^2$

Denis utilise un tableur pour comparer les résultats obtenus à l'aide des deux formules :

B2 $f_x \sum = =220-A2$			
	A	B	C
	Âge a	$FCMC f(a)$ (Astrand et Ryhming)	$FCMC g(a)$ (Gellish)
1			
2	30	190	185,2
3	31	189	184,773
4	32	188	184,332
5	33	187	183,877

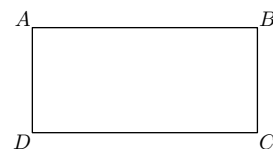
Quelle formule faut-il insérer dans la cellule C2 puis copier vers le bas, pour pouvoir compléter la colonne " $FCMC g(a)$ (Gellish)"?

E.22

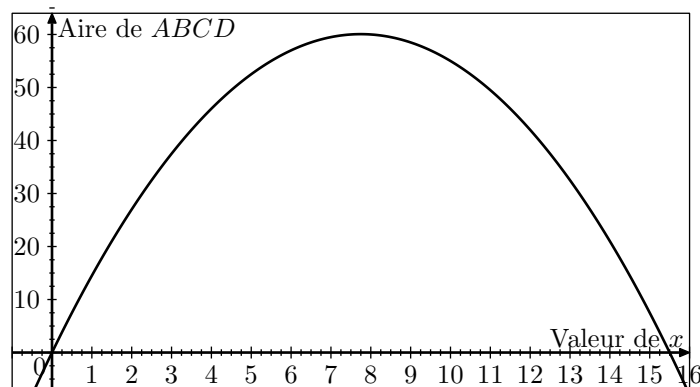
10. Partage

E.23 Dans le repère ci-dessous, on donne les représentations graphiques des fonctions f , g et h :

Dans cet exercice, on considère le rectangle $ABCD$ ci-contre tel que son périmètre soit égal à 31 cm.

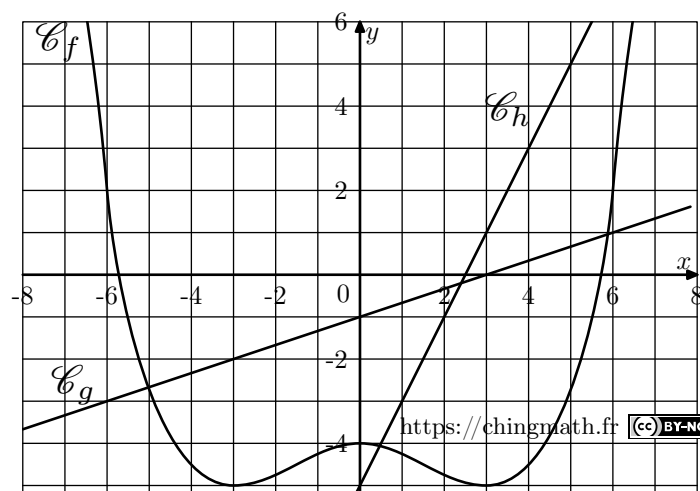


- 1 a) Si un tel rectangle a pour longueur 10 cm, quelle est sa largeur?
 - b) Proposer une autre longueur et trouver la largeur correspondante.
 - c) On appelle x la longueur AB . En utilisant le fait que le périmètre de $ABCD$ est de 31 cm, exprimer la largeur BC en fonction de x .
 - d) En déduire l'aire du rectangle $ABCD$ en fonction de x .
- 2) On considère la fonction f définie par :
 $f(x) = x(15,5 - x)$
 - a) Calculer $f(4)$.
 - b) Vérifier qu'un antécédent de 52,5 est 5.
- 3) Sur le graphique ci-dessous, on a représenté l'aire du rectangle $ABCD$ en fonction de la valeur de x .





À l'aide de ce graphique, répondre aux questions suivantes en donnant les valeurs approchées :

- a) Quelle est l'aire du rectangle $ABCD$ lorsque x vaut 3 cm?
- b) Pour quelles valeurs de x obtient-on une aire égale à 40 cm²?
- c) Quelle est l'aire maximale de ce rectangle? Pour quelle valeur de x est-elle obtenue?
- 4) Que peut-on dire du rectangle $ABCD$ lorsque AB vaut 7,75 cm?



Dire si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses.

- ① L'image de 0 par g est -1 ;
- ② 0 est l'image de 3 par h ;
- ③ Le point $(6; 2) \in \mathcal{C}_f$;
- ④ -5 est un antécédent du nombre -3 par g ;
- ⑤ -3 a pour image -5 par f ;
- ⑥ Les points d'abscisses 3 des courbes \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_h ont la même ordonnée;
- ⑦ Par la fonction h , 1 est le seul antécédent du nombre -3 ;
- ⑧ Par la fonction f , -6 est le seul antécédent de 2.

E.24   On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 4x - 5$$

Léa souhaite étudier les fonctions f et g à l'aide d'un tableur. Elle a donc rempli les formules qu'elle a ensuite étirées pour obtenir le calcul de toutes les valeurs.



Voici une capture d'écran de son travail :

B3		$f_x \sum = =B1 * B1 + 4 * B1 - 5$						
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	$f(x)$	-5	-3	-1	1	3	5	7
3	$g(x)$	-8		-8	-5	0	7	16

- ① Quelle est l'image de 3 par la fonction f ?
- ② Calculer le nombre qui doit apparaître dans la cellule C3.
- ③ Quelle formule Léa a-t-elle saisie dans la cellule B2?
- ④ A l'aide de la copie d'écran et sans justifier, donner une solution de l'inéquation :

$$2x + 1 < x^2 - 4x - 5$$

- ⑤ Déterminer un antécédent de 1 par la fonction f .

E.25   Soient les fonctions f , g et h définies par :
 $f(x) = 6x$; $g(x) = 3x^2 - 9x - 7$; $h(x) = 5x - 7$

À l'aide d'un tableur, Pauline a construit un tableau de valeurs de ces fonctions.

Elle a étiré vers la droite les formules qu'elle avait saisies dans les cellules B2, B3 et B4.

B3		$f_x \sum = =3 \times B1 \times B1 - 9 \times B1 - 7$						
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	$f(x) = 6x$	-18	-12	-6	0	6	12	18
3	$g(x) = 3x^2 - 9x - 7$	47	23	5	-7	-13	-13	-7
4	$h(x) = 5x - 7$	-22	-17	-12	-7	-2	3	8

- ① Utiliser le tableur pour déterminer la valeur de $h(-2)$.
- ② Écrire les calculs montrant que : $g(-3) = 47$
- ③ Faire une phrase avec le mot "antécédent" ou le mot "image" pour traduire l'égalité : $g(-3) = 47$
- ④ Quelle formule Pauline a-t-elle saisie dans la cellule B4?
- ⑤ **a** Déduire du tableau ci-dessus une solution de l'équation ci-dessous :
 $3x^2 - 9x - 7 = 5x - 7$
- b** Cette équation a-t-elle une autre solution que celle trouvée grâce au tableur?
Justifier la réponse.

Indication : dans cette question, toute trace de recherche, même inaboutie sera prise en compte et valorisée