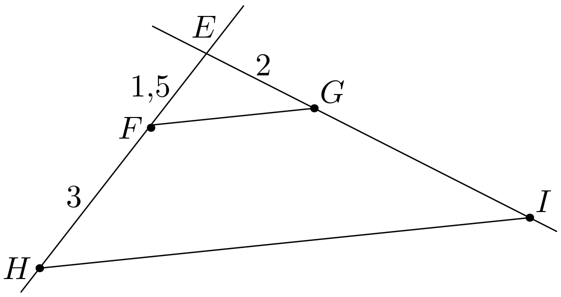
Troisième / Théorème de Thalès

1. Rappels : théorème de Thalès

E.1 Dans le plan, on considère la configuration ci-dessous :

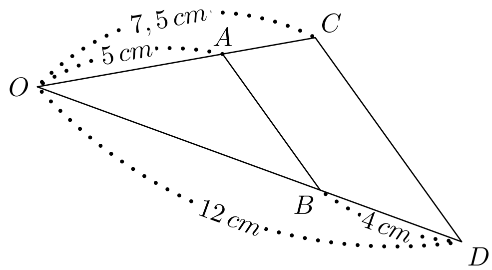


Les droites (FG) et (HI) sont respectivement parallèles entre elles.

1. Donner la longueur du segment $[EH]$.
2. À l'aide du théorème de Thalès, déterminer la longueur du segment $[EI]$.
3. En déduire que la longueur du segment $[GI]$.

2. Rappels : réciproque du théorème de Thalès

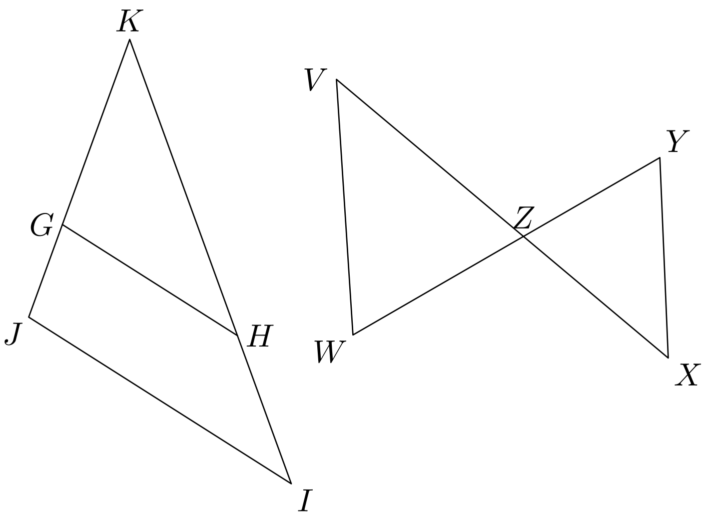
E.2 Dans la configuration ci-dessous, $A \in [OC]$ et $B \in [OD]$.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles :



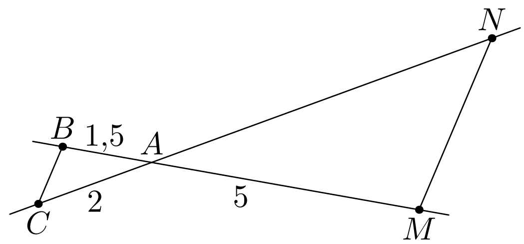
3. Configuration en papillon

E.3 Nous avons représenté deux configurations de Thalès où $(GH) /\!/ (IJ)$ et $(XY) /\!/ (VW)$.

Dans chaque cas, citer les égalités de quotient de longueurs données par le théorème de Thalès :



E.4 Dans le plan, on considère la configuration :

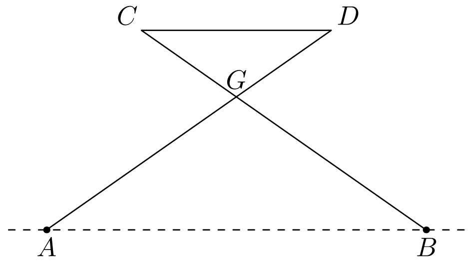


Les droites (BC) et (MN) sont respectivement parallèles entre elles.

À l'aide du théorème de Thalès, déterminer la longueur du segment $[AN]$.

4. *Problème et théorème de Thalès*

E.5



On a modélisé géométriquement un tabouret pliant par les segments $[CB]$ et $[AD]$ pour l'armature métallique et le segment $[CD]$ pour l'assise en toile.
On a : $CG = DG = 30\,cm$, $AG = BG = 45\,cm$ et $AB = 51\,cm$.
Pour des raisons de confort, l'assise $[CD]$ est parallèle au sol représenté par la droite (AB).

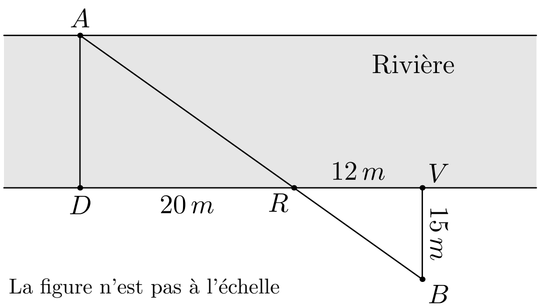
Déterminer la longueur CD de l'assise.

Indication : laisser apparentes toutes traces de recherches. Même si le travail n'est pas terminé, il en sera tenu compte dans la notation.

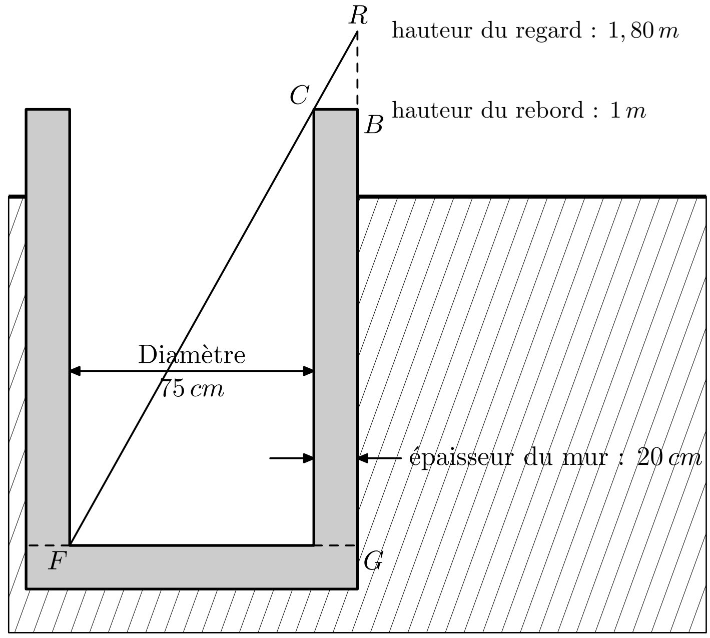
E.6

Indication : il sera tenu compte de toute trace de réponse même incomplète dans l'évaluation

Joachim doit traverser une rivière avec un groupe d'amis.
Il souhaite installer une corde afin que les personnes peu rassurées puissent se tenir.
Il veut connaître la largeur de la rivière à cet endroit *(nommé D)* pour déterminer si la corde dont il dispose est assez longue.
Pour cela, il a repéré un arbre *(nommé A)* sur l'autre rive.
Il parcourt 20 mètres sur la rive rectiligne où il se situe et trouve un nouveau repère : un rocher *(nommé R)*.
Ensuite, il poursuit sur 12 mètres et s'éloigne alors de la rivière, à angle droit, jusqu'à ce que le rocher soit aligné avec l'arbre depuis son point d'observation *(nommé B)*.
Il parcourt pour cela $15\,m$.
Il est alors satisfait : sa corde d'une longueur de 30 mètres est assez longue pour qu'il puisse l'installer entre les points D et A.
À l'aide de la figure, confirmer sa décision.



E.7 Un jeune berger se trouve au bord d'un puits de forme cylindrique dont le diamètre vaut $75\,cm$: il aligne son regard avec le bord inférieur du puits et le fond du puits pour en estimer la profondeur.



Le fond du puits et le rebord sont horizontaux. Le puits est vertical.

1. En s'aidant du schéma ci-dessous *(il n'est pas à l'échelle)*, donner les longueurs CB, FG, RB en mètres.
2. Calculer la profondeur BG du puits.
3. Le berger s'aperçoit que la hauteur d'eau dans le puits est $2{,}60\,m$.
   Le jeune berger a besoin de $1\,m^3$ d'eau pour abreuver tous ses moutons. En trouvera-t-il suffisamment dans ce puits?

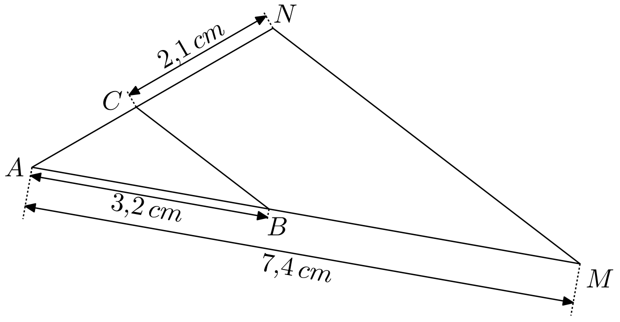
5. *Théorème de Thalès et équation*

E.8 Résoudre les équations suivantes :

a) $\dfrac{7}{x} = \dfrac{21}{4}$ b) $\dfrac{15}{8} = \dfrac{x}{9}$ c) $\dfrac{x}{32} = \dfrac{5}{8}$

d) $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{3}$ e) $\dfrac{x+2}{3x-4} = \dfrac{2}{3}$ f) $\dfrac{2x}{x-3} = 4$

E.9 Dans la figure ci-dessous, les droites (BC) et (MN) sont parallèles.



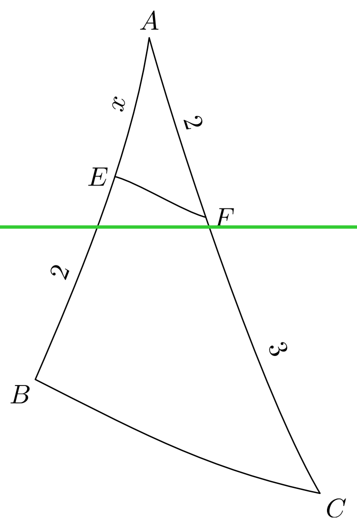
Déterminer la mesure du segment $[AC]$.

E.10

La figure ci-contre a été réalisée à main levée ; on a les propriétés suivantes :

- le point E appartient à la droite (AB) ;
- le point F appartient à la droite (AC) ;
- les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Déterminer la valeur de "x".

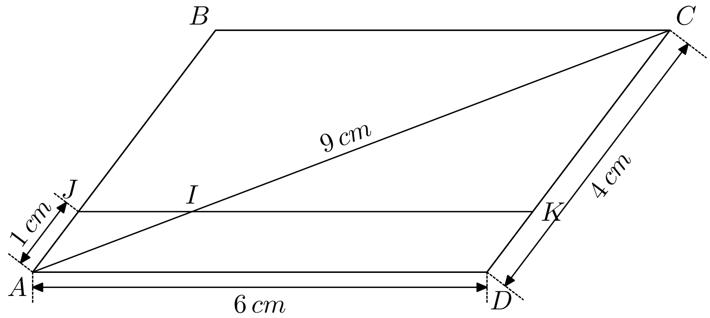


E.11 On considère un parallélogramme $ABCD$ tel que :

$AD = 6\,cm$; $CD = 4\,cm$; $AC = 9\,cm$

Soit J le point du segment $[AB]$ vérifiant : $AJ = 1\,cm$.
La droite parallèle à la droite (AD) passant par le point J intercepte la droite (AC) et la droite (CD) respectivement en I et en K.

La figure ci-dessous représente cette situation :



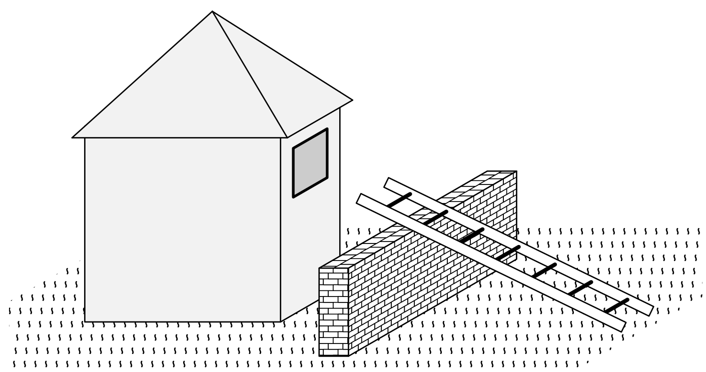
1. a. Justifier que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.
   b. Déterminer la mesure du segment $[AI]$.
2. a. Déterminer la mesure du segment $[KC]$.
   b. En déduire la mesure du segment $[IJ]$. On notera x la longueur du segment $[IJ]$.

6. *Théorème de Thalès, équations et théorème de Pythagore*

E.12

1. a. Tracer un rectangle $ABCD$ tel que :
   $AB = 1{,}5\,cm$; $AD = 6\,cm$
   b. Placer le point I appartenant à $[BC]$ tel que :
   $BI = \dfrac{1}{3}\,BC$.
   c. Nommer M le point d'intersection des droites (AI) et (CD).
2. Déterminer la longueur du segment $[MC]$.
3. Déterminer la longueur du segment $[AM]$.

E.13 Un soir de pleine lune, Roméo souhaite rendre visite à Juliette. Il possède une échelle de $10\,m$ de longueur.



Le rebord de la fenêtre est à une hauteur $4{,}8\,m$, mais un mur se trouve entre lui et la maison : ce mur a une épaisseur de $50\,cm$, une hauteur de $4\,m$. L'allée, séparant le mur de la maison, a une largeur de $1\,m$

Roméo arrivera-t-il à poser le bout de l'échelle sur le rebord de la fenêtre de Juliette?

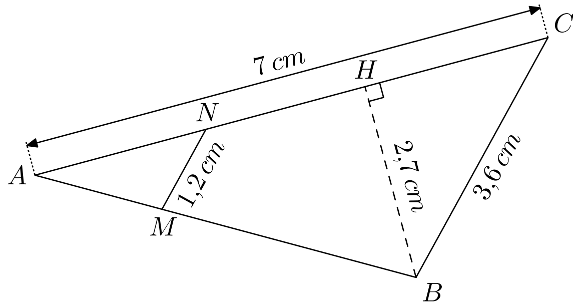
7. *Agrandissement et réduction*

E.14 On considère la configuration suivante :

(1) On suppose que le triangle AMN est une réduction du triangle ABC dont le facteur de réduction vaut $\frac{2}{3}$. Le triangle ABC ayant une aire de $6{,}75\,cm^2$. Donner l'aire du triangle AMN.

(2) On suppose que le triangle AMN est une réduction du triangle ABC dont le facteur de réduction vaut $\frac{3}{5}$. Le triangle AMN ayant une aire de $3{,}51\,cm^2$. Donner l'aire du triangle ABC.

E.15 On considère le triangle ABC où les points M et N appartiennent respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$, et les droites (MN) et (BC) sont parallèles entre elles :



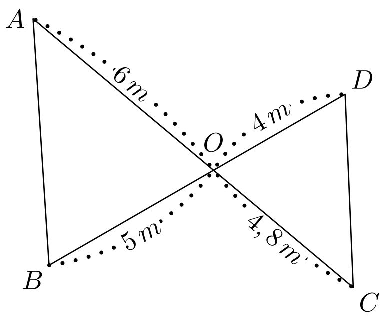
(1) Déterminer le facteur de réduction du triangle AMN par rapport au triangle ABC.

(2) (a) Déterminer l'aire du triangle ABC.

(b) En déduire l'aire du triangle AMN.

8. *Réciproque du théorème de Thalès en configuration papillon*

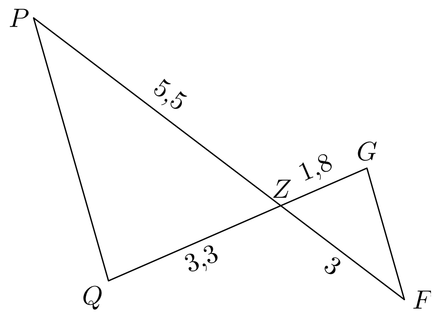
E.16 Pour la configuration ci-dessous, montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles :



E.17

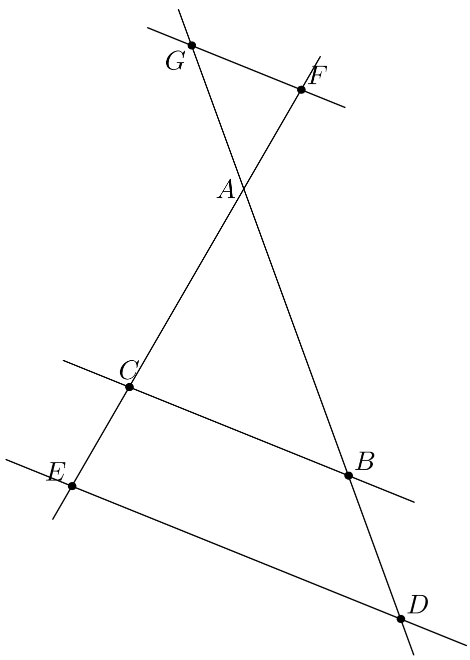
On considère la configuration ci-dessous représentant des configurations de Thalès.

Montrer que les droites (FG) et (PQ) sont parallèles.



9. *Théorème et réciproque de Thalès dans deux configurations papillons*

E.18 ⚠ *L'unité de longueur est le centimètre*



Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, les droites (BC) et (GF) sont parallèles. On sait que :

$AB = 3$; $CE = 2{,}4$; $AC = 4$; $BD = 1{,}8$

$BC = 4{,}5$; $AF = 3{,}6$

(1) Calculer la longueur GF.

(2) Les droites (BC) et (ED) sont-elles parallèles ? Justifier.

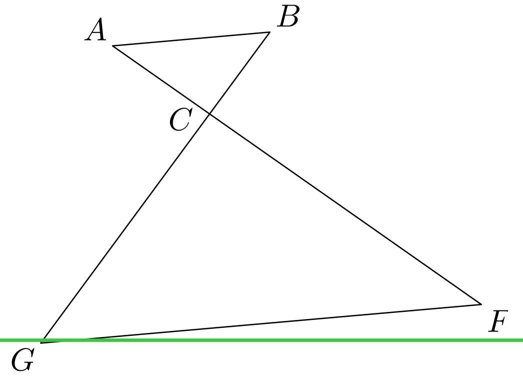
10. *Théorème et réciproque de Thalès dans une configuration emboîtée et papillon*

E.19

Indication : la figure ci-dessous n'est pas réalisée en vraie grandeur, elle n'est pas à reproduire.

Les points A, C et F sont alignés, ainsi que les points B, C et G. Les droites (AB) et (GF) sont parallèles.
On donne les mesures suivantes :

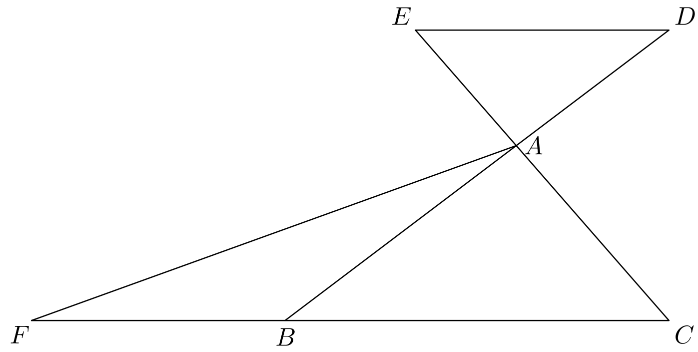
$AB = 3\,cm$; $FC = 8{,}4\,cm$; $FG = 11{,}2\,cm$



1. Calculer la longueur CA.
2. Soient D le point du segment $[CF]$ et E le point du segment $[GF]$ tels que : $FD = 6{,}3\,cm$; $FE = 8{,}4\,cm$

   Montrer que les droites (GC) et (ED) sont parallèles.

E.20 ⚠ La figure suivante n'est pas réalisée en vraie grandeur.



L'unité de longueur est le centimètre ; on donne :

$AB = 8$; $BC = 9$; $AC = 6$; $AE = 4$

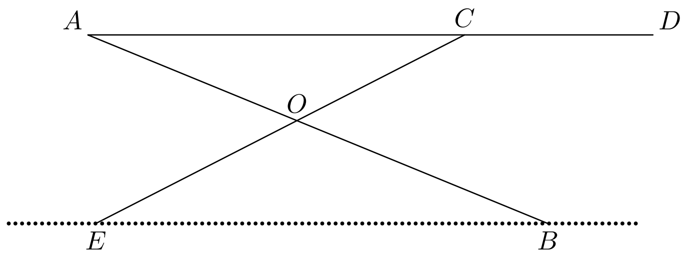
1. Les droites (DE) et (BC) sont parallèles. Calculer AD.

   On donnera sa valeur exacte, puis sa valeur arrondie au dixième de centimètre.
2. Soit F le point tel que C, B et F sont alignés dans cet ordre, avec $BF = 6$.

   Démontrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

11. *Théorème et réciproque de Thalès dans la même configuration*

E.21 ⚠ La figure ci-dessous donne le schéma d'une table à repasser.



Le segment $[AB]$ et $[EC]$ représentent les pieds. Les droites (AB) et (EC) se coupent en O. On donne :

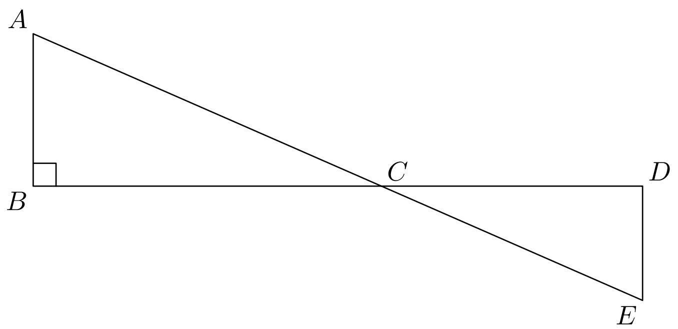
$AD = 125cm$; $AC = 100cm$; $OA = 60cm$

$OB = 72cm$; $OE = 60cm$; $OC = 50cm$

1. Montrer que la droite (AC) est parallèle à la droite (EB).
2. Calculer l'écartement EB en cm.

12. *Théorème, réciproque de Thalès et de Pythagore*

E.22 ⚠ *La figure ci-dessous n'est pas en vraie grandeur. On ne demande pas de la reproduire.*



Les points A, C et E sont alignés, ainsi que les points B, C et D.

Le triangle ABC est rectangle en B.
Les longueurs suivantes sont exprimées en centimètres :

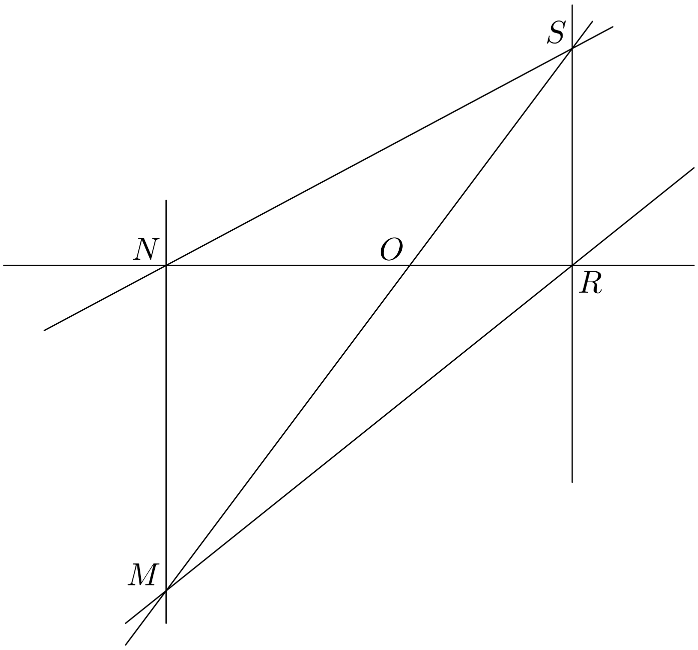
$BC = 12$; $CD = 9{,}6$; $DE = 4$; $CE = 10{,}4$

1. Montrer que le triangle CDE est rectangulaire en D.
2. En déduire que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
3. Calculer la longueur AB.

E.23 ⚠ *la figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur ; on ne demande pas de la reproduire.*

Les points N, O, R d'une part et les points M, O, S d'autre part sont alignés dans cet ordre.

$OS = 6\,cm$; $OM = 9\,cm$; $ON = 5{,}4\,cm$; $OR = 3{,}6\,cm$



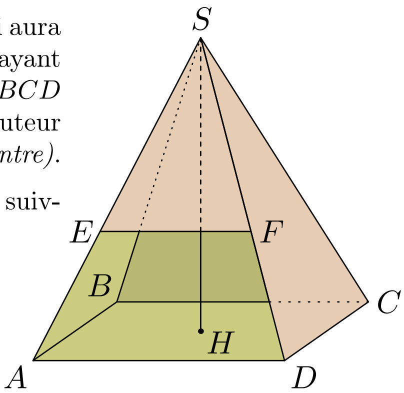
1. Les droites (MN) et (RS) sont-elles parallèles ? Justifier.
2. On suppose que $SR = 4{,}8\,cm$. Le triangle ORS est-il rectangle ? Justifier.
3. En utilisant **le théorème de Thalès**, calculer MN.
4. On admettra que les droites (MN) et (NR) sont perpendiculaires.
   Quelle est l'aire du quadrilatère $MNSR$? Justifier.

13. *Exercices non-classés*

E.24 ⚠

On veut réaliser un tipi qui aura la forme d'une pyramide ayant pour base un rectangle $ABCD$ de centre H et pour hauteur $[SH]$ *(voir le schéma ci-contre)*.

Le tipi aura les dimensions suivantes :
$AD = 1{,}60\,m$
$CD = 1{,}20\,m$
$SH = 2{,}40\,m$



1. Calculer le volume V de cette pyramide, en m^3.
   On rappelle que $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$ où h désigne la hauteur et B l'aire de la base.
2. Calculer la longueur BD.
3. L'armature du tipi, constituée du cadre rectangulaire $ABCD$ et des quatre arêtes latérales issues de S, est faite de baguettes de bambou.

   Dans cette question, on n'attend pas de démonstration rédigée. Citer une propriété et présenter clairement un calcul suffit.

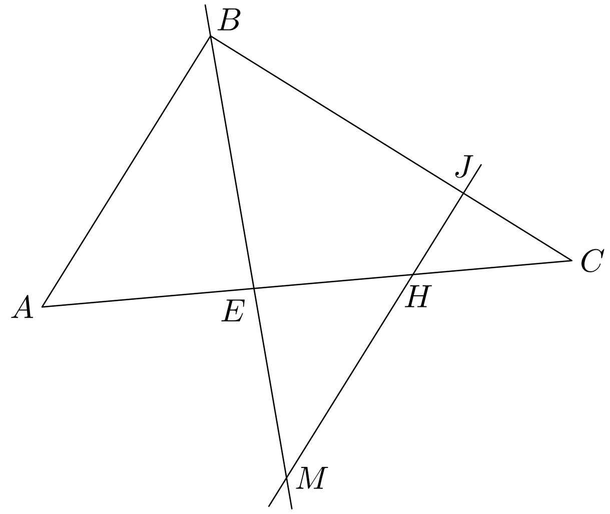
   a. Montrer que : $SD = 2{,}60\,m$
   b. On ajoute à l'armature une baguette $[EF]$ comme indiqué sur le dessin de sorte que $(EF) /\!/ (AD)$ et $SF = 1{,}95\,m$.
      Calculer EF.
4. On a trouvé dans un magasin des tiges de bambou de $3\,m$. Une tige peut être coupée pour obtenir deux baguettes, mais une baguette ne peut être fabriquée par collage de deux morceaux de bambou.

   Combien faut-il acheter de tiges de bambou, au minimum, pour réaliser les neuf baguettes de l'armature du tipi ?

E.25 On considère le triangle ABC ci-dessous, tel que :

$AB = 6\,cm \quad ; \quad AC = 10\,cm \quad ; \quad BC = 8\,cm$

Soit E le point de $[AC]$ tel que $AE = 4\,cm$ et J le point de $[BC]$ tel que $CJ = 2{,}4\,cm$. Soit H le milieu de $[EC]$ et M le point d'intersection des droites (BE) et (JH).



(sur la figure les dimensions ne sont pas respectées)

1. Prouver que les droites (JH) et (AB) sont parallèles.
2. En déduire le calcul de la longueur HM.