Quatrième / Arithmétique

1. Nombres de diviseurs

E.1

Soit a et b deux entiers positifs. On dit que b est un **diviseur** du nombre a s'il existe un entier k tel que : $a = k \times b$

1. Si possible, compléter les pointillés ci-dessous à l'aide d'entiers :

a) $18 = 1 \times \ldots$ b) $18 = 2 \times \ldots$ c) $18 = 3 \times \ldots$

d) $18 = 4 \times \ldots$ e) $18 = 5 \times \ldots$ f) $18 = 6 \times \ldots$

g) $18 = 7 \times \ldots$ h) $18 = 8 \times \ldots$ i) $18 = 9 \times \ldots$

2. Donner l'ensemble des diviseurs du nombre 18.

E.2

a) Donner les 2 diviseurs du nombre 13.

b) Donner les 6 diviseurs de l'entier 12.

c) Donner les 4 diviseurs de l'entier 22.

E.3

1. a) Donner tous les diviseurs de l'entier 8.

   b) Donner tous les diviseurs de l'entier 9.

2. Donner les 12 diviseurs de l'entier 8×9.

E.4 Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

Affirmation : pour tous les entiers entiers n compris entre 2 et 9, $2^n - 1$ est un entier premier.

E.5 Déterminer le plus petit nombre entier positif impair qui admet trois diviseurs premiers différents. Expliquer votre raisonnement.

2. Entiers premiers

E.6 Le tableau ci-dessous présente les entiers de 2 à 99 :

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

1. a) Entourer l'entier 2.

   b) Hachurer les cases dont l'entier admet 2 pour diviseur.

2. a) Entourer l'entier 3.

   b) Hachurer les cases dont l'entier admet 3 pour diviseur.

3. a) Répéter les instructions précédentes avec les entiers 5 et 7.

   b) Entourer tous les nombres non hachurés de la grille.

4. a) Combien de diviseurs admettent les entiers 2, 3, 5, 7, 11?

   b) Parmi les entiers 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47, lesquels appartiennent à une table de multiplication? Si oui, laquelle?

   c) Pour quelle raison peut-on dire que le nombre 97 n'admet que deux diviseurs 1 et 97?

Définition : on dit qu'un entier a est **premier** s'il admet exactement 2 diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple : les entiers 2, 3, 5, 7, 11, 13 sont des entiers premiers.

Remarque : cet exercice présente la méthode dite du "*crible d'Ératosthène*" permettant de déterminer rapidement les entiers premiers parmi 2 à 99.
Ératosthène est un scientifique grec du 2e siècle avant JC. Il est connu pour avoir été nommé directeur de la bibliothèque d'Alexandrie et pour avoir été le premier à avoir mesuré la circonférence de la Terre.
Vous trouverez un diaporama présentant le crible d'Ératosthène dans le lien ci-contre.

E.7

1. Parmi les entiers suivants, lequel n'est pas un entier premier : 31 ; 33 ; 37 ; 41.

2. Parmi les entiers suivants, lequel n'est pas un entier premier : 43 ; 47 ; 49 ; 53.

Vous trouverez dans le lien ci-contre la liste des entiers premiers inférieurs ou égal à 1 000.

E.8 Chacune des affirmations ci-dessous est fausse. Pour chacune de ces affirmations, trouver un contre-exemple pour infirmer celle-ci :

1. La somme de deux entiers premiers est un entier premier.

2. La multiplication de deux entiers premiers est un entier premier.

3. Tous les entiers impairs sont des entiers premiers.

3. *Décomposition d'un entier en produit de nombres premiers*

E.9

Définition : on dit qu'un entier est **décomposé en produit d'entiers premiers** s'il est écrit comme un produit dont tous les facteurs sont des entiers premiers.

Exemple : l'entier 72 admet la décomposition : $2\times2\times2\times3\times3$

Algorithme : ci-contre une méthode d'obtention de la décomposition d'un entier en produit d'entiers premiers :

$72 = 2\times36$

$72 = 2\times\underbrace{2\times18}$

$72 = 2\times\underbrace{2\times2\times9}$

$72 = 2\times\underbrace{2\times2\times3\times3}$

1. Utiliser l'égalité $28=2\times14$ pour obtenir la décomposition en produit d'entiers premiers de l'entier 28.
2. Utiliser l'égalité $40=2\times20$ pour obtenir la décomposition en produit d'entiers premiers de l'entier 40.
3. Utiliser l'égalité $96=2\times48$ pour obtenir la décomposition en produit d'entiers premiers de l'entier 96.

E.10 Pour chacun des entiers 198, 297, 462, déterminer leur décomposition en produit d'entiers premiers.

Indications : pour cela, on utilisera les égalités :
- $198 = 6\times33$
- $297 = 9\times33$
- $462 = 14\times33$

E.11

1. Justifier que le nombre 102 est divisible par 3.
2. Décomposer 102 en produits de facteurs premiers.
3. Donner 3 diviseurs non premiers du nombre 102.

E.12 Quel est le plus grand entier premier qui divise 41 895?

E.13

1. a. Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 2744.
   b. Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 2744^2.
   c. À l'aide de cette décomposition, trouver x tel que : $x^3=2744^2$
2. Soient a et b deux nombres entiers supérieurs à 2 tels que : $a^3=b^2$
   a. Calculer b lorsque $a=100$.
   b. Déterminer deux nombres entiers a et b supérieurs à 2 et inférieurs à 10 qui vérifient l'égalité $a^3=b^2$.

4. *Simplification de fractions*

E.14

1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers ci-dessous : 42 ; 90
2. En déduire l'écriture réduite de la fraction $\frac{42}{90}$.

E.15

1. Décomposer 140 et 870 en produit de facteurs premiers.
2. En déduire la forme irréductible de la fraction $\frac{140}{870}$

E.16

1. Décomposer, sans justifier, en produit de facteurs premiers les nombres 1 386 et 1 716.
2. En déduire la forme irréductible de la fraction : $\frac{1\,386}{1\,716}$