Quatrième / Autres

1. Les triplets pythagoriciens

E.1 Le triplet $(a\,;b\,;c)$ de nombres entiers est dit pythagoricien si : $a^2+b^2=c^2$

Voici, l'étude de plusieurs manières d'obtenir des triplets de Pythagore :

1. **La formule de Pythagore :**
   a. Compléter le tableau ci-dessous :

n	$2n{+}1$	$2n^2{+}2n$	$2n^2{+}2n{+}1$
1			
2			
5			

   b. Montrer, à l'aide de la calculatrice, que pour :
   $n=1$; $n=2$; $n=5$
   Les triplets de nombres entiers :
   $\big(2n{+}1\,;n^2{+}2n\,;2n^2{+}2n{+}1\big)$
   sont des triplets pythagoriciens.

2. **La formule de Platon :**
   a. Compléter le tableau ci-dessous :

n	$2n$	$n^2{-}1$	$n^2{+}1$
1			
2			
6			

   b. Montrer, à l'aide de la calculatrice, que pour :
   $n=1$; $n=2$; $n=6$
   les triplets d'entiers $\big(2n\,;n^2{-}1\,;n^2{+}1\big)$ sont des triplets pythagoriciens.

3. **La formule d'Eculide :**
   a. Compléter le tableau ci-dessous :

m	n	$2mn$	$m^2{-}n^2$	$m^2{+}n^2$
2	1			
3	2			
5	2			

   b. Montrer, à l'aide de la calculatrice, que les trois triplets de nombres entiers $\big(2mn\,;m^2{-}n^2\,;m^2{+}n^2\big)$ sont des triplets pythagoriciens.

E.2

1. En utilisant la double distributivité, montrer l'égalité suivante :
   $(2n^2+2n)(2n^2+2n)=4n^4+8n^3+4n^2$
2. Donner la forme développée et réduite de l'expression suivante :
   $(2n+1)^2$
   (utiliser la double distributivité avec $(2n{+}1)(2n{+}1)$*)*
3. Établir l'égalité suivante :
   $(2n^2+2n+1)^2=4n^4+8n^3+8n^2+4n+1$
4. Montrer que le triplet $\big(2n{+}1\ ;\ 2n^2{+}2n\ ;\ 2n^2{+}2n{+}1\big)$ est un triplet pythagoricien pour tout n entier positif.

2. Les racines carrés

E.3

> ***Définition :*** *(provisoire)*
> *Soit a un nombre positif. On appelle racine carré du nombre a le nombre positif tel que son carré vaille a.*

Commençons par montrer qu'il n'existe qu'un seul nombre faisant commuter le diagramme ci-dessous :

1. Supposons l'existence de deux nombres a et b positif tel que $a^2=b^2$
   a. Développer et réduire l'expression : $(a{+}b)(a{-}b)$.
   b. Que peut-on dire des deux nombres x et(y vérifiant :
   $x{\times}y=0$
   c. En déduire que : $a{-}b{=}0$.

Nous venons de montrer l'unicité de la racine carré. La définition précédente se transforme en :

> ***Définition :***
> *Soit a un nombre positif. On appelle racine carré du nombre a l'***unique** *nombre positif tel que son carré vale a. On note ce nombre $\sqrt{a}$*

Etude de quelques propriétés algébriques :

2. a. Calculer le carré du nombre $\sqrt{5}{\times}\sqrt{3}$.
   b. Comparer $\sqrt{5}{\times}\sqrt{3}$ et $\sqrt{15}$
   c. De la même méthode, montrer l'égalité suivante pour tout nombre a et b positif :
   $\sqrt{a}{\times}\sqrt{b}=\sqrt{a{\times}b}$
3. a. Simplifier le calcul suivant : $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}{\times}\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$
   b. Compléter la phrase suivante :
   $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ est un nombre dont le carré vaut ......
   c. De même, montrer que pour tous nombres positifs a et b, avec $b{\neq}0$, on a :
   $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Quelques simplifications de fractions :

4. a. Quel nombre élevé au carré vaut 5^2 ?
   b. En déduire la valeur de $\sqrt{5^2}$.

 CC BY-NC

c. De la même manière, pour tout nombre réel positif a, déterminer la valeur de $\sqrt{a^2}$

5. a. Etablir l'égalité $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ en élevant chaque membre au carré.
(Établir l'égalité par utilisation de l'égalité)

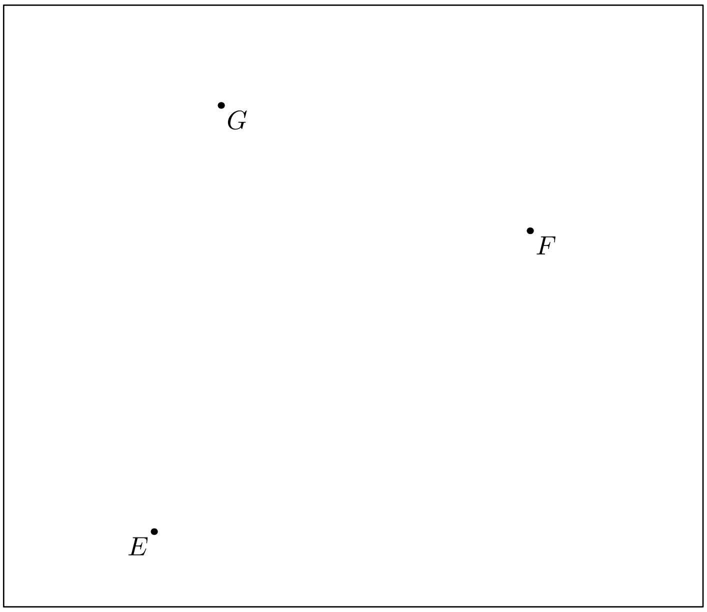
b. Déterminer deux entiers a et b tel que :
$50 = a^2 \times b$

c. En utilisant les questions 2 et 4, établir d'une autre manière l'égalité :
$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

3. *Le système GPS et la triangulation*

E.4 Les seuls instruments autorisés sont la règle et le compas :

1. Dans la figure ci-dessous, placer le point R vérifiant les conditions suivantes :
$ER = 5\,cm \quad ; \quad FR = 4\,cm \quad ; \quad GR = 7\,cm$



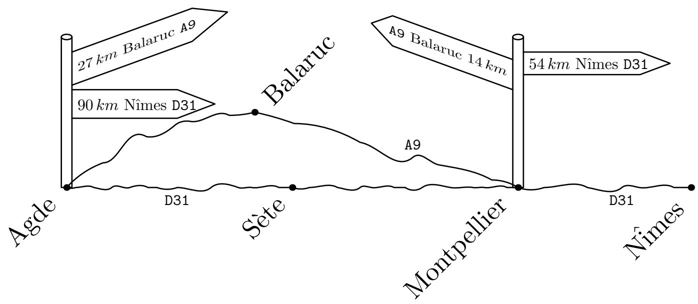
2. Est-ce que deux points suffisent pour repérer parfaitement la position d'un troisième point dans le plan? Justifier votre réponse.

La **triangularisation par relevé des distances** *(ou trilatération)* permet de connaître la position exacte d'un point par connaissance de sa distance par rapport à d'autres points.

Dans le plan, à la surface de la terre, il faut au minimum trois points de repère pour repérer exactement un point.

4. *Exercices non-classés*

E.5 Paul souhaite aller d'Agde à Montpellier. Deux choix s'offrent à lui : soit il prend l'autoroute `A9`, soit il emprunte la route départementale `D31`. Voici, schématisées, les informations qu'il récupère sur une carte :



1. Il estime qu'il roule en moyenne à $110\,{}^{km}\!/\!_{h}$ sur l'autoroute et à $75\,{}^{km}\!/\!_{h}$ sur les routes départementales.

   Quel trajet doit-il emprunter pour relier le plus rapidement la ville de Montpellier?

2. Sur le même trajet, Adeline part à $9h$ en empruntant la route départementale alors que Juliette par à $9h15$. Qu'elle est la conductrice qui arrivera à Montpellier le plus tôt.

 CC BY-NC

E.6 Une association propose diverses activités pour occuper les enfants pendant les vacances scolaires. Plusieurs tarifs sont proposés :

- Tarif A : 8 € par demi-journée ;
- Tarif B : une adhésion de 30 € donnant droit à un tarif préférentiel de 5 € par demi-journée.

Un fichier sur tableur a été préparé pour calculer le coût à payer en fonction du nombre de demi-journées d'activités pour chacun des tarifs proposés :

	A	B	C	D	E	F
1	Nombre de demi-journées	1	2	3	4	5
2	Tarif A	8	16			
3	Tarif B	35	40			

Les questions 1, 2, 4 et 5 ne nécessitent pas de justification.

1. Compléter ce tableau.
2. Retrouver parmi les réponses suivantes la formule qui a été saisie dans la cellule B3 avant de l'étirer vers la droite :

   a. `=8×B1` b. `=30×B1+5` c. `=5×B1+30×BA`

   d. `=30+5×B1` e. `=35`

E.7 On souhaite réaliser une frise composée de rectangles.
Pour cela, on a écrit le programme ci-dessous :

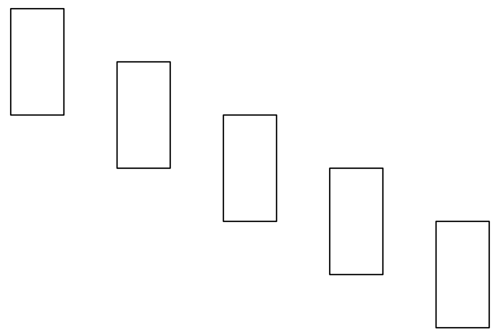
```
quand [drapeau] est cliqué
cacher
mettre la taille du stylo à (1)
effacer tout
aller à x: (0) y: (0)
répéter (5) fois
    Rectangle
    ajouter (40) à [x]
    ajouter (-20) à [y]
```

```
definir rectangle
stylo en position d'criture
s'orienter à (90) degrés
répéter (2) fois
    avancer de (40)
    tourner ↻ de (90) degrés
    avancer de (20)
    tourner ↻ de (90) degrés
relever le stylo
```

On rappelle que l'instruction "*s'orienter à 90*" consiste à s'orienter horizontalement vers la droite.

Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée.

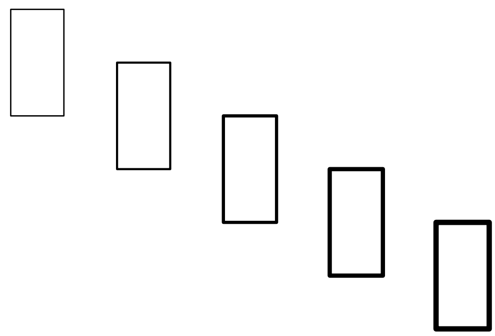
1. Quelles sont les coordonnées du point de départ du tracé?
2. Combien de rectangles sont dessinés par le script principal?
3. Dessiner à main levée la figure obtenue avec le script principal.
4. a. Sans modifier le script principal, on a obtenu la figure ci-dessous composée de rectangles de longueur 40 pixels et de largeur 20 pixels. Proposer une modification du bloc "*rectangle*" permettant d'obtenir cette figure.



   b. Où peut-on alors ajouter l'instruction :

   `ajouter (1) à la taille du stylo`

   dans le script principal pour obtenir la figure ci-dessous?



BY-NC