



## 1. Les triplets pythagoriciens

**E.1**   Le triplet  $(a; b; c)$  de nombres entiers est dit pythagoricien si :  $a^2 + b^2 = c^2$

Voici, l'étude de plusieurs manières d'obtenir des triplets de Pythagore :

### 1 La formule de Pythagore :

a Compléter le tableau ci-dessous :

$n$	$2n+1$	$2n^2+2n$	$2n^2+2n+1$
1			
2			
5			

b Montrer, à l'aide de la calculatrice, que pour :

$$n = 1 ; n = 2 ; n = 5$$

Les triplets de nombres entiers :

$$(2n+1; n^2+2n; 2n^2+2n+1)$$

sont des triplets pythagoriciens.

### 2 La formule de Platon :

a Compléter le tableau ci-dessous :

$n$	$2n$	$n^2-1$	$n^2+1$
1			
2			
6			

b Montrer, à l'aide de la calculatrice, que pour :

$$n = 1 ; n = 2 ; n = 6$$

les triplets d'entiers  $(2n; n^2-1; n^2+1)$  sont des triplets pythagoriciens.

### 3 La formule d'Euclide :

a Compléter le tableau ci-dessous :

$m$	$n$	$2mn$	$m^2-n^2$	$m^2+n^2$
2	1			
3	2			
5	2			

b Montrer, à l'aide de la calculatrice, que les trois triplets de nombres entiers  $(2mn; m^2-n^2; m^2+n^2)$  sont des triplets pythagoriciens.

**E.2**  

1 En utilisant la double distributivité, montrer l'égalité suivante :

$$(2n^2 + 2n)(2n^2 + 2n) = 4n^4 + 8n^3 + 4n^2$$

2 Donner la forme développée et réduite de l'expression suivante :

$$(2n + 1)^2$$

(utiliser la double distributivité avec  $(2n+1)(2n+1)$ )

3 Établir l'égalité suivante :

$$(2n^2 + 2n + 1)^2 = 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1$$

4 Montrer que le triplet  $(2n+1; 2n^2+2n; 2n^2+2n+1)$  est un triplet pythagoricien pour tout  $n$  entier positif.

## 2. Les racines carrées

**Définition :** (provisoire)

Soit  $a$  un nombre positif. On appelle racine carrée du nombre  $a$  le nombre positif tel que son carré vaille  $a$ .

**E.3**  

Commençons par montrer qu'il n'existe qu'un seul nombre faisant commuter le diagramme ci-dessous :

1 Supposons l'existence de deux nombres  $a$  et  $b$  positif tel que  $a^2 = b^2$ .

a Développer et réduire l'expression :  $(a+b)(a-b)$ .

b Que peut-on dire des deux nombres  $x$  et  $y$  vérifiant :  $x \times y = 0$

c En déduire que :  $a-b=0$ .

Nous venons de montrer l'unicité de la racine carrée. La définition précédente se transforme en :

**Définition :**

Soit  $a$  un nombre positif. On appelle racine carrée du nombre  $a$  l'unique nombre positif tel que son carré vaille  $a$ . On note ce nombre  $\sqrt{a}$

Étude de quelques propriétés algébriques :

2 a Calculer le carré du nombre  $\sqrt{5} \times \sqrt{3}$ .

b Comparer  $\sqrt{5} \times \sqrt{3}$  et  $\sqrt{15}$ .

c De la même méthode, montrer l'égalité suivante pour tout nombre  $a$  et  $b$  positif :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

3 a Simplifier le calcul suivant :  $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

b Compléter la phrase suivante :  $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$  est un nombre dont le carré vaut .....

c De même, montrer que pour tous nombres positifs  $a$  et  $b$ , avec  $b \neq 0$ , on a :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Quelques simplifications de fractions :

4 a Quel nombre élevé au carré vaut  $5^2$ ?

b En déduire la valeur de  $\sqrt{5^2}$ .

c De la même manière, pour tout nombre réel positif  $a$ ,

déterminer la valeur de  $\sqrt{a^2}$ .

- 5 a Établir l'égalité  $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$  en élevant chaque membre au carré.  
(Établir l'égalité par utilisation de l'égalité)



- b Déterminer deux entiers  $a$  et  $b$  tel que :

$$50 = a^2 \times b$$

- c En utilisant les questions 2 et 4, établir d'une autre manière l'égalité :

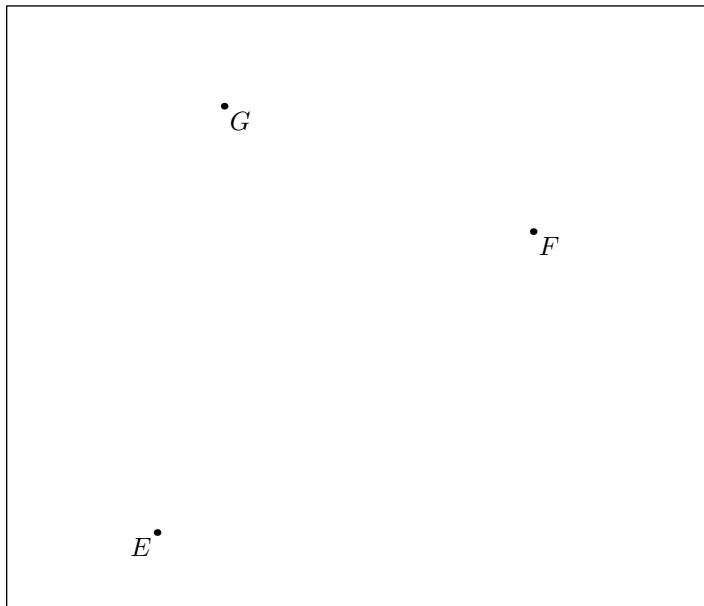
$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

### 3. Le système GPS et la triangulation

E.4   Les seuls instruments autorisés sont la règle et le compas :

- 1 Dans la figure ci-dessous, placer le point  $R$  vérifiant les conditions suivantes :

$$ER = 5 \text{ cm} \quad ; \quad FR = 4 \text{ cm} \quad ; \quad GR = 7 \text{ cm}$$





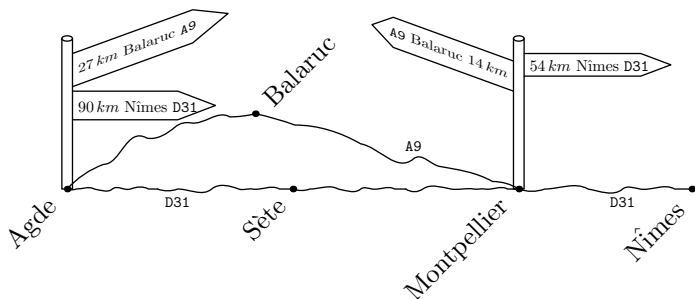
- 2 Est-ce que deux points suffisent pour repérer parfaitement la position d'un troisième point dans le plan? Justifier votre réponse.

La **triangularisation par relevé des distances** (ou *tri-latération*) permet de connaître la position exacte d'un point par connaissance de sa distance par rapport à d'autres points.

Dans le plan, à la surface de la terre, il faut au minimum trois points pour repérer exactement un point.

### 4. Exercices non-classés

E.5   Paul souhaite aller d'Agde à Montpellier. Deux choix s'offrent à lui : soit il prend l'autoroute A9, soit il emprunte la route départementale D31. Voici, schématisées, les informations qu'il récupère sur une carte :




- 1 Il estime qu'il roule en moyenne à  $110 \text{ km/h}$  sur l'autoroute et à  $75 \text{ km/h}$  sur les routes départementales.

Quel trajet doit-il emprunter pour relier le plus rapidement la ville de Montpellier?

- 2 Sur le même trajet, Adeline part à  $9h$  en empruntant la route départementale alors que Juliette part à  $9h15$ . Qu'elle est la conductrice qui arrivera à Montpellier le

plus tôt.

**E.6**  Une association propose diverses activités pour occuper les enfants pendant les vacances scolaires. Plusieurs tarifs sont proposés :

- Tarif A : 8€ par demi-journée ;
- Tarif B : une adhésion de 30€ donnant droit à un tarif préférentiel de 5€ par demi-journée.

Un fichier sur tableur a été préparé pour calculer le coût à payer en fonction du nombre de demi-journées d'activités pour chacun des tarifs proposés :


	A	B	C	D	E	F
1	Nombre de demi-journées	1	2	3	4	5
2	Tarif A	8	16			
3	Tarif B	35	40			

Les questions 1, 2, 4 et 5 ne nécessitent pas de justification.

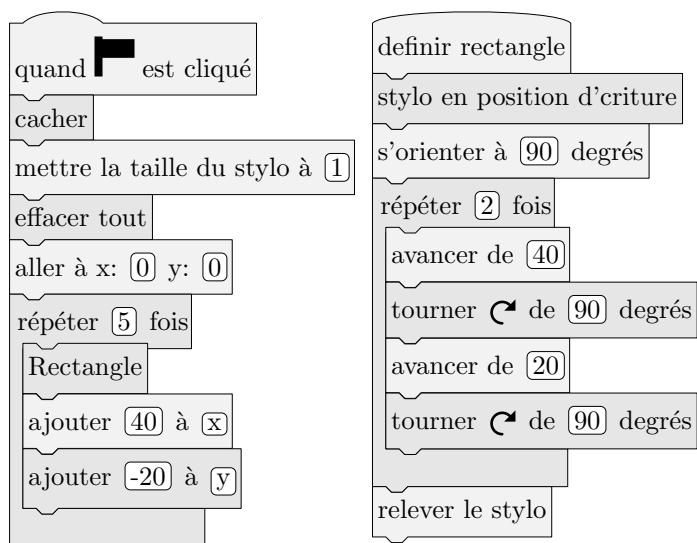
- 1 Compléter ce tableau.
- 2 Retrouver parmi les réponses suivantes la formule qui a été saisie dans la cellule B3 avant de l'étirer vers la droite :

**a**  $=8 \times B1$       **b**  $=30 \times B1 + 5$       **c**  $=5 \times B1 + 30 \times BA$

**d**  $=30 + 5 \times B1$       **e**  $=35$

**E.7**  On souhaite réaliser une frise composée de rectangles.

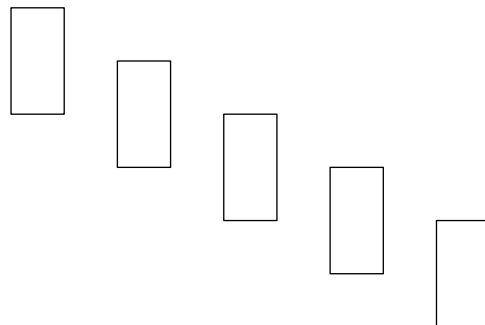
Pour cela, on a écrit le programme ci-dessous :



On rappelle que l'instruction "s'orienter à 90" consiste à s'orienter horizontalement vers la droite.

**Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée.**

- 1 Quelles sont les coordonnées du point de départ du tracé?
- 2 Combien de rectangles sont dessinés par le script principal?
- 3 Dessiner à main levée la figure obtenue avec le script principal.
- 4 **a** Sans modifier le script principal, on a obtenu la figure ci-dessous composée de rectangles de longueur 40 pixels et de largeur 20 pixels. Proposer une modification du bloc "rectangle" permettant d'obtenir cette figure.



- b** Où peut-on alors ajouter l'instruction :

ajouter 1 à la taille du stylo

dans le script principal pour obtenir la figure ci-dessous?

