Quatrième / Expressions littérales : nombres relatifs, double-distributivité

ChingEval : 9 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. *Rappels sur la simplification*

E.1 Réduire, si possible, les expressions littérales suivantes :

(a) $12+5x$ (b) $4\times5x$

(c) $3x-(-3)\times x$ (d) $-7x+9x^2$

(e) $2x^2+7x^2$ (f) $9x^2+5x-4-2x+5x^2$

E.2 Développer, puis réduire les expressions suivantes :

(a) $3\times(2x+1)-3x\times5$ (b) $2(x-1)+x(2-x)$

(c) $-5\times3x+3\times(5-x)$ (d) $x(2-x)+3(3+x)$

E.3 Factoriser les expressions suivantes :

(a) $3x+3$ (b) $6x+9$ (c) $3x^2+2x$ (d) x^2+x

2. *L'opposé d'un nombre*

E.4

Proposition : l'opposée d'une somme est égale à la somme des opposés.

Exemples : • $-(5+4)=-5-4$ • $-(7-3)=-7+3$

Pour chacune des questions, citer le nombre "*intrus*" :

	a	b	c
1	$-(5+1)$	$-5+1$	$-5-1$
2	$7-3$	$-(7-3)$	$-7+3$
3	$-(-2{,}5+3)$	$2{,}5-3$	$2{,}5+3$
4	$-(x-2)$	$-x-2$	$-x+2$

E.5 Pour chaque question, donner la valeur intruse :

	a	b	c	d
1	$-(2\times3)$	$(-2)\times3$	$2\times(-3)$	$(-2)\times(-3)$
2	$-[(-4)\times5]$	$4\times(-5)$	$-4\times(-5)$	4×5
3	$-(2\times3\times4)$	$(-2)\times3\times4$	$2\times3\times(-4)$	$-2\times(-3)\times4$

Remarque : pour prendre l'opposé d'un produit, on modifie un seul des facteurs en son opposé

E.6 Compléter les pointillés suivants afin de vérifier l'égalité :

(a) $-(3+4)=\ldots3\ldots4$ (b) $-(-2+1)=\ldots2\ldots1$

(c) $-(-4-7)=\ldots4\ldots7$ (d) $-(7-9)=\ldots7\ldots9$

E.7 Pour chacune des questions, chercher l'intrus :

	a	b	c
1	$-(2\times5+3)$	$-2\times5+3$	$-2\times5-3$
2	$-(3-5\times2)$	$-3+5\times2$	$-3-5\times2$
3	$-(2\times3+4\times5)$	$(-2)\times3+4\times5$	$-2\times3-4\times5$

E.8 Parmi les 4 expressions ci-dessous, laquelle est l'intrus?

(a) $-[3\times(2x-3)]$ (b) $(-3)\times(2x-3)$

(c) $3\times(-2x+3)$ (d) $(-3)\times(-2x+3)$

3. *Suppression des parenthèses dans une somme ou dans une différence*

E.9 Donner la forme réduite de chacune des expressions suivantes :

(a) $-(2x+1)$ (b) $3-(5-x)$

(c) $2-(2x-1)$ (d) $3x-(-2x-1)$

E.10 Donner la forme réduite de chacune des expressions suivantes :

(a) $3-(2x+1-x^2)$ (b) $(x+1)-(2-x)$

E.11 Donner la forme réduite de chacune des expressions suivantes :

(a) $(3x+4)-(x^2-4x+2)$ (b) $-(x+3)+x^2-x+2$

(c) $-(x^2-2)+(3x^2+4x)$

E.12 Donner la forme réduite de chacune des expressions suivantes :

(a) $(x^2+3x+4)-(5x^2+6x+7)$

(b) $-(2x-5x+1-4+7x)$

(c) $(3x+2)-5x+6-(-6x+2)$

E.13 Donner la forme réduite de chacune des expressions suivantes :

(a) $3x-(x^2+4)-5x+5$ (b) $-(x-2)+(3-x)+5x$

E.14 Donner la forme réduite de chacune des expressions suivantes :

(a) $2x^2+5-(2x-5)$ (b) $5-(2x-4)-2x^2+x$

E.15 Réduire les expressions suivantes :

(a) $-\big(3x^2+5x-9\big)-\big(-5x+1\big)$

(b) $-\big(x-2\big)+2x+2-\big(3-x^2\big)$

E.16 Donner la forme réduite de chacune des expressions suivantes :

(a) $+(x+1)-(3x^2+2)+\big[3-(2+x)\big]$

(b) $2-\big[3-(x-2)\big]$

(c) $-\big[2-(1-x)+1\big]-(3-2x)$

4. *Parenthèse et simple distributivité*

E.17 Développer, puis réduire les expressions suivantes :

(a) $-2\big(x+5\big)$ (b) $-x\big(x+2\big)$

E.18 Développer, puis réduire les expressions suivantes :

(a) $3-2\times(2x-1)+x$ (b) $7\times(x+2)-3\times(1+x)$

(c) $2\times(x-1)-4(x-3)$ (d) $-2\times(x-1)+4(2x-3)$

E.19 Développer, puis réduire les expressions suivantes :

~~(a) $3-4\times(3-x)$ (b) $3\times(4x-2)-2\times(3-x)$~~

E.20 Développer, puis réduire les expressions suivantes :

(a) $5-2(2x+4)$ (b) $2(x+1)-3(3-x)$

E.21 Développer, puis réduire les expressions suivantes :

(a) $3x(x+2)-(-3x^2-4x)$ (b) $2(3-x+2)-2x(3-2x)$

E.22 Développer et réduire les expressions suivantes :

(a) $3x(2x-4)-5(4-x)$ (b) $-(x+2)+3(2x^2+1)$

E.23 Développer, puis réduire les expressions suivantes :

(a) $4x(3x-4)+2(x^2+2)$ (b) $(x^2+4x+3)-(3-x^2)$

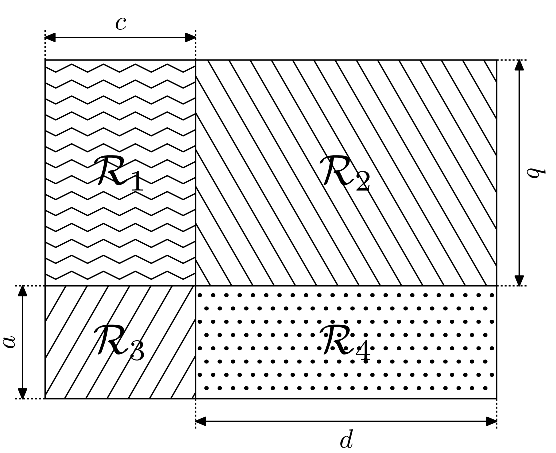
E.24 Développer, puis réduire les expressions suivantes :

(a) $x\times(2-x)-3\times(x^2-1)$ (b) $2-(x+1)\times x$

(c) $-(2+x)\times3+x\times(-x+1)$ (d) $-x\times(2x-4)-(3-2x^2)$

5. *Introduction à la double distributivité*

E.25 On considère un rectangle $\mathcal{R}$ découpé en quatre rectangles $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_4$:



Les dimensions sont portées directement sur la figure.

1. (a) Donner la longueur et la largeur du rectangle $\mathcal{R}$.

   (b) Donner une expression de l'aire $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ du rectangle $\mathcal{R}$.

2. (a) Exprimer les aires $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$ respectives des rectangles $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$, $\mathcal{R}_4$.

   (b) Donner une expression de l'aire $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ du rectangle $\mathcal{R}$.

On vient d'établir la propriété suivante :

Proposition : ***(double distributivité de la multiplication sur l'addition)***

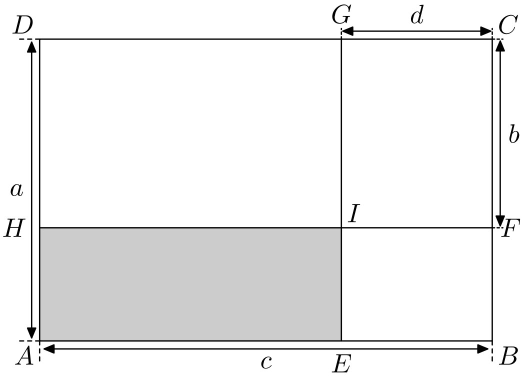
Pour tous nombres a, b, c, d, on a l'identité suivante :

$$\big(a+b\big)\big(c+d\big)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$$

Exemple / Remarque :
On représente souvent ce **développement** à l'aide des flèches suivantes :

$$\begin{aligned}(x+2)(2x+4) &= x\times 2x + x\times 4 + 2\times 2x + 2\times 4\\ &= 2x^2+4x+4x+8\\ &= 2x^2+8x+8\end{aligned}$$

E.26 On considère le rectangle $ABCD$ ci-dessous. Les droites (EG) et (FH) partagent ce rectangle en quatre rectangles.



1. En exprimant la longueur et de la largeur du rectangle $AEIH$. en fonction des mesures a, b, c, d, donner une expression de l'aire du rectangle
2. En déterminant les aires des quatre rectangles $ABCD$, $ABCG$, $CDHF$, $GIFC$, en déduire une autre expression de l'aire du rectangle $AEIH$.

Remarque : on vient d'établir une autre identité de la double distributivité :

$$(a-b)(c-d) = a\times c - a\times d - b\times c + b\times c$$

E.27 On considère les deux expressions suivantes :

$A=(3x+2)(x+3)$; $B=3x^2+11x+6$

1. a. Pour chaque ligne du tableau suivant, évaluer les deux expressions littérales.

x	$(3x+2)(x+3)$	$3x^2+11x+6$
0		
2		
-1		

   b. Faire une conjecture quant à ces deux expressions.
2. Grâce à la simple distributivité, on peut distribuer le facteur $\boxed{3x{+}2}$ sur chacun des termes de la somme $x{+}3$. On obtient l'identité suivante :

$$\boxed{3x{+}2}\times(x+3) = \boxed{3x{+}2}\times x + \boxed{3x{+}2}\times 3$$

On note C l'expression : $C=(3x+2)\times x+(3x+2)\times 3$
   a. Développer, puis réduire l'expression C.
   b. Justifier l'égalité des expressions A et B sont égales.

On vient d'établir l'égalité :

$$\begin{aligned}(3x+2)(x+3) &= 3x\times x + 3x\times 3 + 2\times x + 2\times 3\\ &= 3x^2+9x+2x+6\\ &= 3x^2+11x+6\end{aligned}$$

6. *Double distributivité*

E.28 Développer, puis réduire les expressions suivantes :

a. $(3x+1)(2x+4)$ b. $(2x+1)(3x+1)$
c. $(2+x)(x+2)$ d. $(2x+1)(7+4x)$

E.29 Développer, puis réduire les expressions suivantes :

a. $(2x+1)(x+3)$ b. $(x+4)(x+5)$
c. $(x+1)(2x+4)$ d. $(1+3x)(2x+1)$

E.30 Développer, puis réduire les expressions suivantes :

a. $(x+5)(2x-1)$ b. $(2-x)(x-5)$
c. $(3x-1)(-5x-1)$ d. $(2-3x)(2x+1)$

E.31 Développer, puis réduire les expressions suivantes :

a. $(5-2x)(-1+x)$ b. $(2x-5)(x+1)$

E.32 Développer, puis réduire les expressions suivantes :

a. $(2x+1)^2$ b. $(4x-3)^2$

E.33 Développer, puis réduire les expressions suivantes :

a. $2(5x-2)(x+1)$ b. $-(x+1)(x+1)$

7. *Double-distributivité et priorité des opérations*

E.34 Développer et simplifier les expressions suivantes :

(a) $(5-2x)(2x+4)+3(5-3x)$

(b) $3(5x+1)(2-x)-(5-2x)(5-2x)$

E.35 Déterminer la forme développée et réduite de chacune des expressions suivantes :

(a) $(2x+4)(3-2x)-2(x-3)$

(b) $2(2-x)(3x-1)-2x(4-2x)$

8. *Double distributivité et problème*

E.36 ⚠ On donne le programme de calcul suivant :

Étape 1	Choisir un nombre de départ
Étape 2	Ajouter 6 au nombre départ
Étape 3	Retrancher 5 au nombre de départ
Étape 4	Multiplier les résultats des étapes 2 et 3
Étape 5	Ajouter 30 à ce produit
Étape 6	Donner le résultat

(1) (a) Montrer que si le nombre choisi est 4, le résultat est 20.

(b) Quel est le résultat quand on applique ce programme de calcul au nombre -3?

(2) Zoé pense qu'un nombre de départ étant choisi, le résultat est égal à la somme de ce nombre et de son carré.

(a) Vérifier qu'elle a raison quand le nombre choisi au départ vaut 4, et aussi quand on choisit -3.

(b) Ismaël décide d'utiliser un tableur pour vérifier l'affirmation de Zoé sur quelques exemples.

B6 f_x $\sum$ = $=B1+B1\hat{}2$

	A	B	C	D	E	F
1	Étape 1	2	5	7	10	
2	Étape 2	8	11	13	16	26
3	Étape 3	-3	0	2	5	15
4	Étape 4	-24	0	26	80	390
5	Étape 5 *(résultat)*	6	30	56	110	450
6	Somme du nombre et de son carré	6	30	56	110	420

Il a écrit des formules en `B2` et `B3` pour exécuter automatiquement les étapes 2 et 3 du programme de calcul.
Quelle formule à recopier vers la droite a-t-il écrite dans la cellule `B4` pour exécuter l'étape 4?

(c) Zoé observe les résultats, puis confirme que pour tout nombre x choisi, le résultat du programme de calcul est bien x^2+x.
Démontrer sa réponse.

E.37

(1) Développer et réduire l'expression suivante :

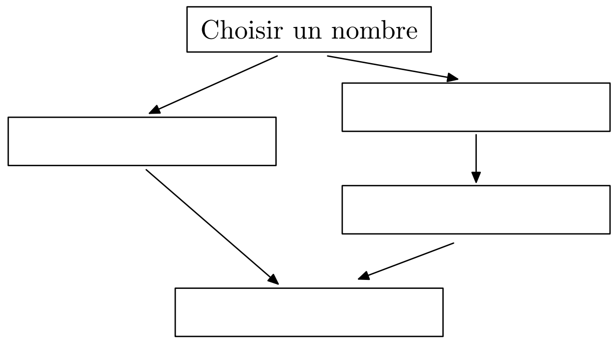
$A=(x+1)(2x-1)-x$

(2) En déduire la valeur du calcul suivant :

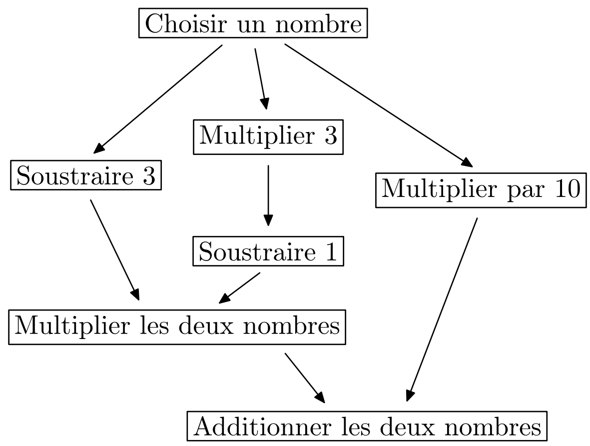
$B=1\,001\times1\,999-1\,000$

E.38 On considère l'expression E définie par : $E=(x-5)(2x+1)$

Compléter le diagramme ci-dessous, à l'aide d'instruction en français, afin que le programme de calcul construit corresponde à l'expression E :

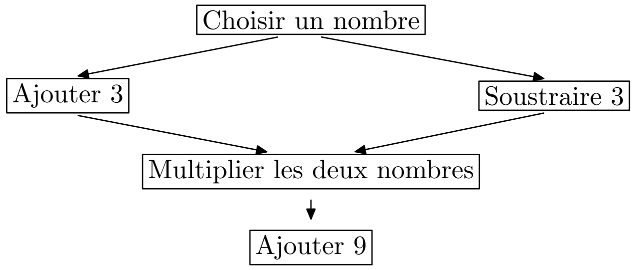


E.39 On considère le programme de calcul représenté par le diagramme ci-dessous :



Démontrer que, quel que soit le nombre x choisit en entrée, le nombre en sortie renvoyé par le programme de calcul est toujours un nombre strictement positif.

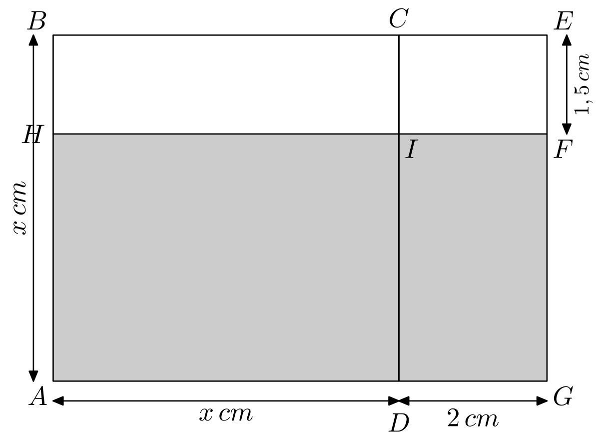
E.40 On considère le programme de calcul ci-dessous :



1. Donner l'expression développée, puis réduire associée à ce programme de calcul.
2. Proposer un programme de calcul équivalent, mais simplifié.

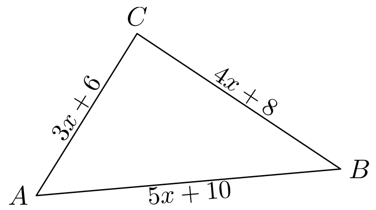
9. *Double distributivité, figures géométriques et problèmes*

E.41 Dans la figure ci-dessous $ABEG$ est un rectangle et $ABCD$ est un carré. On s'intéresse au rectangle $AHFG$.



1. a. Déterminer l'aire du rectangle $AHFG$ lorsque $x = 4$.
   b. On considère l'expression littérale P définie par :
      $P = x^2 + 0{,}5x - 3$
      Évaluer l'expression P pour $x = 4$.
2. Établir que l'aire du rectangle $AHFG$ s'exprime en fonction de x à l'aide de l'expression littérale P.

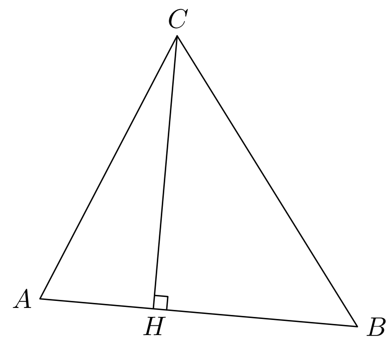
E.42 Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C quelle que soit la valeur de "x" :



E.43 Le triangle ABC ci-contre est tel que :

$AC = 13$; $AB = 14$; $BC = 15$

On note H le pied de la hauteur issue du sommet C.



Déterminer la mesure du segment $[CH]$.

10. *Egalité d'expressions littérales*

E.44

Pour montrer que deux expressions sont ***différentes***, on montre que pour une valeur de x leur évaluiation donne des valeurs distinctes.

Ce nombre s'appelle alors un ***contre-exemple de l'égalité***.

Établir que les égalités ci-dessous sont fausses :

a. $(x+1)(2x-1) = x^2 + x$

b. $3 - (x^2 + x) = (3x+1)(3-x)$

c. $x^2 + x + 4 = (5x+1)(4-5x)$

E.45

Deux expressions sont ***égales*** si elles ont la même valeur quelque soit la valeur de x *(on parle alors d'identité)*.
Pour établir une identité, on développe et on réduit chacune des expressions afin de montrer qu'elles admettent la ***même expression développée réduite***.

Établir que les identités suivantes sont vraies :

a. $(2x-1)(1-x) = -2x^2 + 3x - 1$

b. $(3x+1)(2x-2) = 6x^2 - 2(2x+1)$

E.46 On considère les deux expressions ci-dessous :

$A = 2x^2 + x - 7 \quad ; \quad B = 3(x-2)+3$

1. (a) Évaluer les expressions A et B pour $x=2$.
   (b) Évaluer les expressions A et B pour $x=-1$.
2. Les deux expressions A et B sont-elles égales pour toutes valeurs de x? Justifier votre affirmation.

E.47 On considère les deux expressions suivantes :

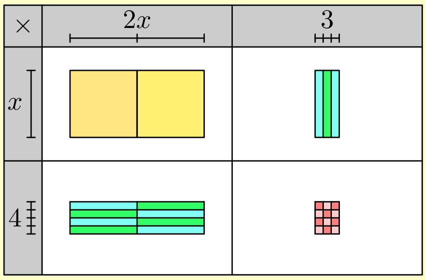
$C = (3x-2)(1+2x) \quad ; \quad D = x\times(6x-1)-2$

À l'aide de développements et de simplifications, montrer que les expressions C et D sont égales.

11. *Usmath*

E.48

Avec les notations américaines : pour effectuer la double distributivité, on peut utiliser un tableau pour représenter chacun des produits du F.O.I.L. Par exemple, pour développer l'expression $(2x+3)(x+6)$, on utilise le tableau :



On obtient le développement suivant :

$$\left(2x+3\right)\left(x+4\right) = \overbrace{2x^2}^{\texttt{F.}} + \overbrace{8x}^{\texttt{O.}} + \overbrace{3x}^{\texttt{I.}} + \overbrace{12}^{\texttt{L.}}$$
$$= 2x^2 + 11x + 12$$

1. (a) Compléter le tableau 1
   (b) En déduire la forme développer réduite de l'expression : $A = \left(2x+1\right)\left(x+4\right)$
2. (a) Compléter le tableau 2
   (b) En déduire la forme développer réduite de l'expression : $B = \left(x-3\right)\left(3x-1\right)$

×	$2x$	1
x		
4		

Tableau 1

×	x	-3
$3x$		
-1		

Tableau 2

E.49

Avec la notation américaine : la double distributivité est associée au sigle `F.O.I.L.` dont les quatre lettres représentent les quatre produits :

$$\left(a+b\right)\left(c+d\right) = a\times c \quad \text{product of the First termes}$$
$$+\,a\times d \quad \text{product of the Outer termes}$$
$$+\,b\times c \quad \text{product of the Inner termes}$$
$$+\,b\times d \quad \text{product of the Last termes}$$

Compléter le tableau ci-dessous pour obtenir les quatre termes obtenus par la double distributivité :

	Product of the			
	`F.` terms	`O.` terms	`I.` terms	`L.` terms
$\left(3x+2\right)\left(x+4\right)$				
$\left(x-2\right)\left(2x+1\right)$				
$\left(3-x\right)\left(5x-2\right)$				

E.50

Avec les notations américaines : les multiplications d'expressions algébriques sont parfois posées en colonne comme présenté ci-dessous :

$$\begin{array}{rrrr}
 & & 2x & +\ 3 \\
\times) & & x & +\ 5 \\
\hline
 & & 10x & +\ 15 \\
+) & 2x^2 & +3x & \\
\hline
 & 2x^2 & +13x & +\ 15
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr}
 & & & 2x & -\ 3 \\
\times) & & 2x^2 & -\ 4x & +\ 3 \\
\hline
 & & & 6x & -\ 9 \\
 & & -8x^2 & +12x & \\
+) & 4x^3 & -6x^2 & & \\
\hline
 & 4x^3 & -14x^2 & +18x & -\ 9
\end{array}$$

En posant vos opérations en ligne, effectuer les multiplications suivantes :

(a) $\left(2x+1\right)\left(3x-2\right)$ (b) $\left(3x^2-5x-1\right)\left(3x-2\right)$
(c) $\left(5-2x\right)\left(x^2+1\right)$ (d) $\left(x+1\right)\left(-3x^2+2x-1\right)$

