Quatrième / Olympiade

1. Autour des quotients

E.1 Les Égyptiens n'utilisaient que des fractions de numérateur 1, à l'exception de la fraction $\dfrac{2}{3}$.

Pour trouver le double de leurs fractions de numérateur 1, on disposait de tables dont l'utilisation est décrite ci-dessous :

Par exemple, par lecture de la première ligne, on a :

Le double de $\dfrac{1}{5}$ est $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}$

5	3	15	
7	4	28	
9	6	18	
11	6	66	
13	8	52	104
15	10	$\cdots$	
17	$\cdots$	51	68

1. Interpréter la troisième ligne de la table.
2. Il manque un nombre dans la ligne du 15 et un dans la ligne du 17.
   Retrouver ces deux nombres.
3. Pourquoi n'y a-t-il que des nombres impairs dans la première colonne?

2. Algèbre et équation

E.2 On s'intéresse aux carrés magiques 3×3 : ce sont des tableaux à trois lignes et trois colonnes *(désignées respectivement par L_1, L_2, L_3 et C_1, C_2, C_3)* dans lesquels sont inscrits 9 nombres, de sorte que les sommes des nombres écrits dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chaque diagonale *(les diagonales sont désignées par D_1 et D_2)* soient égales. Cette somme commune est notée S, c'est la *constante* du carré magique.

1. Dans le carré ci-contre, on inscrit les entiers compris entre 1 et 9.
   Le compléter pour en faire un carré magique.

		8
		1
		6

2. Des deux tableaux ci-dessous, un seul est magique. Lequel?

23	-2	33
28	18	8
3	38	13

23	-2	33
28	18	8
3	38	13

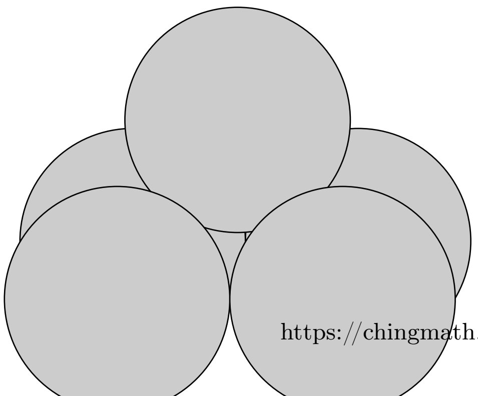
2. On désigne par x un nombre quelconque. On se demande s'il est possible de créer un carré magique 3×3 dans lequel figureraient les neufs nombres :

   $16x-10$; $2x-3$; -2 ; $4x-4$; $12x-8$
   $10x-7$; $6x-5$; $8x-6$; $14x-9$

   a. Quelle serait la constante de ce carré magique?
   b. Proposer un carré magique 3×3 utilisant ces neuf nombres.
3. Proposer finalement deux carrés magiques 3×3 :
   a. Un carré de 9 nombres tous négatifs ;
   b. Un carré de constante $S30$

3. Vers les suites

E.3 Sur l'étal du marchand, tous les fruits sont rangés. Les oranges sont organisées en pyramide à base carrée. L'étage du haut comporte une seule orange. Cet étage est noté $E1$. L'étage au-dessous sera noté $E2$, et ainsi de suite. Chaque orange est posée sur quatre autres.



1 a Combien d'oranges comporte l'étage $E2$?

b Combien d'oranges comporte l'étage $E3$?

c Combien d'oranges comporte l'étage $E10$?

d Y a-t-il un étage comportant exactement 64 oranges?

e Y a-t-il un étage comportant exactement 200 oranges?

2 Combien d'oranges comporte :

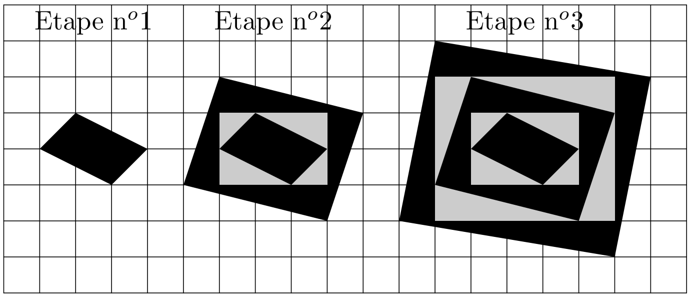
a une pyramide à 2 étages?

b une pyramide à 3 étages?

c une pyramide à 10 étages?

3 Les oranges de l'étal ont été organisées pour former une pyramide à sept étages. La pyramide se révèle malheureusement trop instable et il faut en former de plus petites. Proposer une organisation en pyramide à base carrée permettant de ranger toutes les oranges. Toutes les pyramides seront complètes et chacune comptera, au minimum, 3 étages.

E.4 On construit une suite de motifs selon un procédé dont les trois premières étapes sont représentées ci-dessous :



L'unité d'aire est le carreau de quadrillage

1 Pour chacune des étapes 2 et 3 :

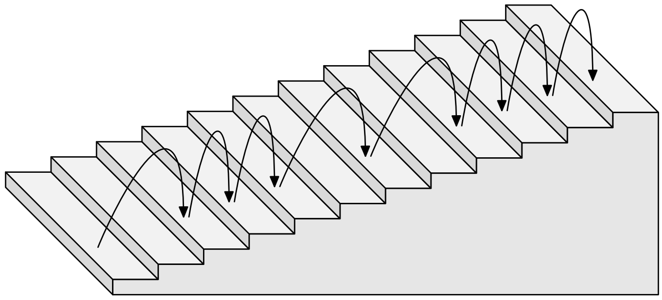
a Déterminer l'aire totale des parties intérieures claires ;

b Déterminer l'aire totale des parties noires.

2 a Quelle est, à l'étape 4, l'aire totale des parties intérieures claires? Et celles des parties noires?

b Et à l'étape 20?

E.5 On peut monter un escalier une ou deux marches à la fois. La figure de droite montre un exemple.

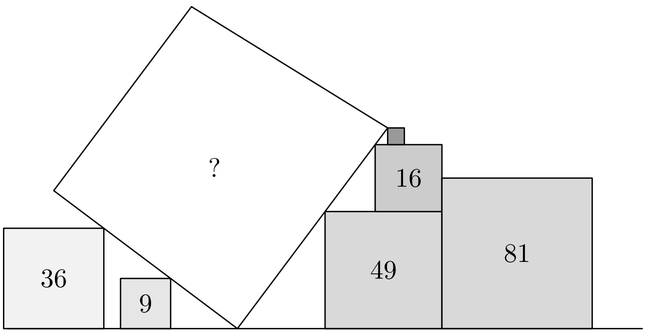


1 De combien de façons peut-on monter un escalier d'une marche? de deux marches? de trois marches? de quatre marches? de cinq marches?

2 De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de 20 marches?

4. *Géométrie avec trigonométrie*

E.6 Sur la figure ci-dessous, les aires de six carrés ont été indiquées.



Un des sommets du carré oblique blanc coïncide avec un sommet du carré d'aire 1.
Quelle est l'aire de ce carré?

5. *Exercices non-classés*

E.7

Sommes de chiffres

Dans cet exercice, les nombres considérés sont des entiers inscrits selon la numération décimale.
Pour cet exercice, on appelle **poids** d'un nombre N la somme de ses chiffres.

1 Quel est le poids du nombre 29? Quel est le poids du nombre 7 646?

2 Proposer trois nombres différents de même poids 42.

3 Est-il exact de dire que "*plus un nombre a de chiffres, plus son poids est élevé*"?

4 Quel est le plus petit nombre de poids 50?

5. Quel est le plus petit nombre de poids 2 022?

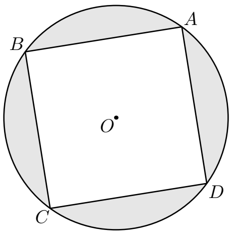
6. Peut-on trouver un nombre ne s'écrivant qu'avec des 5 et 7 et dont le poids soit 53?

7. Peut-on trouver un nombre ne s'écrivant qu'avec des 3 et des 6 et dont le poids soit 200?

E.8

Carré inscrit dans un cercle inscrit dans carré...

L'unité de longueur est le cm. *Attention : les figures ne sont pas à l'échelle. Tous les résultats numériques demandés sont attendus en valeur exacte.*



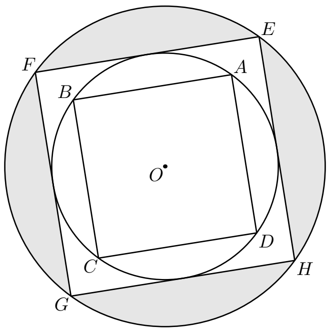
Sur la figure ci-dessus est représenté le cercle $\mathcal{C}_1$, de centre O et de rayon 2. Les segments $[AC]$ et $[BD]$ sont deux diamètres perpendiculaires de ce cercle.

1. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

On dit que le cercle $\mathcal{C}_1$ est le cercle circonscrit au carré $ABCD$.

2. Quelle est l'aire de la partie grisée de la figure?

On considère le carré $EFGH$ dont les côtés sont parallèles à ceux de $ABCD$ et tangents au cercle $\mathscr{C}_1$. On dit que le cercle $\mathcal{C}_1$ est inscrit dans le carré $EFGH$. On considère de même que précédemment le cercle $\mathcal{C}_2$ circonscrit au carré $EFGH$. La figure ci-dessous représente cette situation.



3. Calculer l'aire de la partie grisée sur cette nouvelle figure.

4. Sur le même principe, on peut construire une nouvelle figure avec un cercle $\mathcal{C}_3$ circonscrit à un nouveau carré $IJKL$ dont les côtés seraient tangents à $\mathcal{C}_2$ et parallèles aux côtés du carré $EFGH$. Quelle est, sur cette nouvelle figure, l'aire comprise entre le cercle $\mathcal{C}_3$ et les côtés du carré $IJKL$?

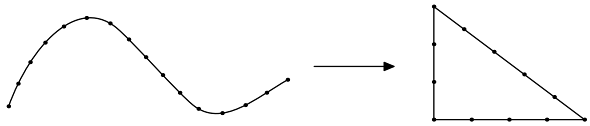
E.9

Triplets pythagoriciens

Une unité de longueur est donnée dans le plan. Un triangle ABC a pour côtés :

$AB = 15 \quad ; \quad AC = 8 \quad ; \quad BC = 17$

1. Montrer que ce triangle est rectangle, en indiquant quel point est le sommet de l'angle droit.



Corde à 13 noeuds et triangle égyptien

Plus généralement, on s'intéresse aux triangles rectangles dont les côtés ont des longueurs entières. On pose :

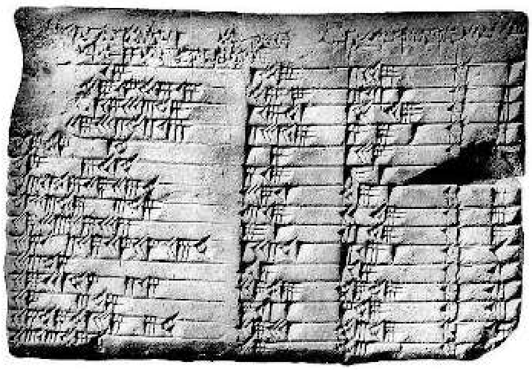
$AB = m \quad ; \quad AC = n \quad ; \quad BC = p.$

On fait l'hypothèse que $m<n<p$ et on dit que le *triplet* $(m\,;n\,;p)$ est *pythagoricien*.

2. a) Si $(m\,;n\,;p)$ est un triplet pythagoricien, quel point est le sommet de l'angle droit du triangle rectangle ABC associé?

   b) Montrer que $(3\,;4\,;5)$ est un triplet pythagoricien. Les triangles associés sont les "*triangles égyptiens*".

   c) Montrer que, si le triplet $(m\,;n\,;5)$ est pythagoricien, alors $m=3$ et $n=4$.



La tablette Plimpton 322 (Université Columbia, New-York) témoigne de recherches conduites par des Babyloniens.

4. On suppose que le triplet $(5\,;n\,;p)$ est pythagoricien.

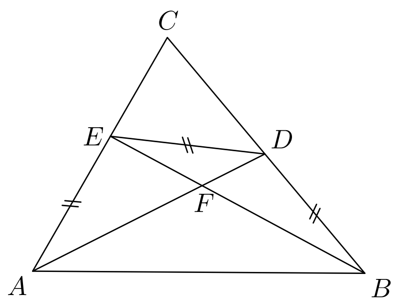
   a) Montrer que : $\quad (p-n)(p+n)=25$

   b) Comparer $p+n$ et $p-n$ et en déduire leurs valeurs puis finalement les valeurs de p et de n. Le triangle associé est dit "*babylonien*".

5. Existe-t-il des entiers m et p tels que le triplet $(m\,;5\,;p)$ soit pythagoricien?

E.10

Angle inconnu



L'angle en C du triangle ABC mesure 70^o. On a placé sur le côté $[BC]$ le point D et sur le côté $[AC]$ le point E tels que :

$BD = DE = EA.$

Les segments $[BE]$ et $[AD]$ se coupent en F.

Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AFB}$?