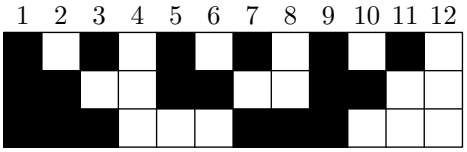
Quatrième / Olympiade

1. Logique

E.1

La frise

Une frise est réalisée en recopiant vers la droite le motif constitué par les douze colonnes représentées ci-dessous :



Chaque colonne de la frise est codée par trois symboles, `000` si les trois cases *(de la colonne)* sont blanches, `001` si les deux cases supérieures sont blanches et la troisième noire... et enfin `111` si les trois cases sont noires.

1. Comment est codée la colonne 10 de la frise? Même question pour la colonne 14.
2. Dans le motif ci-dessus, donner la ou les colonne*(s)* codées `100`?
3. On se donne un entier n. Comment la colonne $12n+5$ est-elle codée?
4. Comment la colonne 2 017 est-elle codée?

E.2 Pierre est un passionné des nombres. Il a dans sa voiture une horloge digitale à quatre chiffres qui indique l'heure de 00:00 à 23:59.
Au moment de partir pour long déplacement, Pierre observe son horloge et constate que les deux nombres indiqués, celui des minutes et celui des heures, sont des carrés de nombres entiers *(qui , sur une horloge digitale, s'écrivent sous la forme :00, 01, 04, 09, 25,...)*
Au retour de son voyage, Pierre constate que son horloge affiche de nouveau des carrés de deux nombres entiers. Son ordinateur de bord lui indique qu'il a parcouru 352 km en 4 heures et 20 minutes.
Quand Pierre peut-il être rentrée de son voyage?

E.3

Code secret

Les participants à un jeu cherchent à sortir d'une pièce équipée d'un digicode et doivent pour cela découvrir le code à composer.
Ils disposent des deux indices suivants :

Premier indice

Le code est une combinaison ordonnée de quatre chiffres différents pouvant constituer un nombre.
Ce nombre doit être strictement inférieur à 2 018.

Par exemple, 0 6 2 7 est un code correspondant au nombre 627.

Combien de codes différents peut-on composer?

Second indice

Parmi tous les codes possibles obtenus avec le premier indice, l'un est tel que :

- le nombre formé par le chiffre des milliers et celui des centaines est le double du nombre formé par le chiffre des dizaines et celui des unités ;
  par exemple pour 1809, 18 est le double de 09 ;
- la somme des quatre chiffres du code est paire et non divisible par 9.

Quel est ce nombre?

Le code à composer pour sortir de la pièce correspond au nombre obtenu comme différence entre les deux réponses précédemment obtenues *(premier et second indices)*.

Quel est ce code?

E.4 Christophe a découpé quarante formes identiques à celle représentée ci-dessous *(figure 1)*. Il a commencé à les assembler en une frise régulière *(figure 2)*.
Lorsqu'il aura fini de poser la quarantième forme, quel sera le périmètre de la frise ainsi créée?

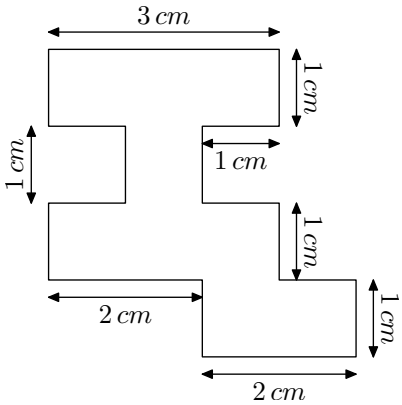


Figure 1.

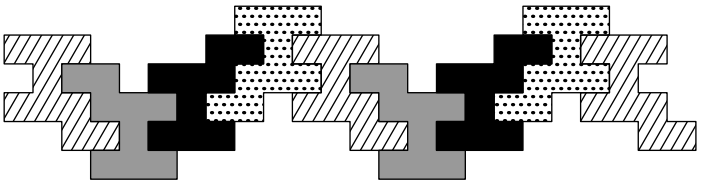


Figure 2.

2. Arithmétique

E.5 La persistance d'un nombre

Dans cet exercice, on considère des nombres entiers supérieurs ou égaux à 10, écrits dans le système décimal.
Lorsqu'on multiplie les chiffres qui composent l'écriture d'un entier, on obtient un nouveau nombre. On recommence ce calcul avec ce nouveau nombre et ainsi de suite. Par exemple, pour le nombre 377 :

$$\boxed{377} \xrightarrow{3\times7\times7} \boxed{147} \xrightarrow{1\times4\times7} \boxed{28} \xrightarrow{2\times8} \boxed{16} \xrightarrow{1\times6} \boxed{6}$$

Le processus s'arrête lorsqu'on obtient un nombre s'écrivant avec un seul chiffre. Il a fallu 4 étapes en tout : on dit que **la persistance de 377 est 4**.

1. Quelle est la persistance de chacun des nombres ?

   a) 77 b) 28 534 c) 6 785 791

2. La persistance de chacun des nombres 2 019, 4 806 et 13 970 875 est égale à 1. Quel résultat général ces résultats semblent-ils illustrer? Justifier.

3. Existe-t-il un chiffre que l'on pourrait insérer dans l'écriture d'un nombre sans changer sa persistance?

4. Trouver un nombre s'écrivant avec 20 chiffres dont la persistance soit 4.

5. Quelles sont les persistances possibles d'un nombre dont l'écriture comporte un chiffre pair et 5?

E.6

Le code EAN-13 *(European Article Numbering)* est un code-barres utilisé par le commerce et l'industrie permettant d'identifier des objets de façon unique et d'être lu par un scanner. Ce code-barres est composé de 13 chiffres *(entiers compris entre* 0 *et* 9*)*, le dernier étant une clé de contrôle calculée à partir des 12 chiffres précédents. Un code-barres est symbolisé par le tableau suivant :

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	C

... où on a porté les treize chiffres constituant le code barre. Le chiffre C est la clé de vérification.
Pour le déterminer, on calcule :

$$S = a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}+3\times\left(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}\right).$$

C est alors le chiffre tel que $S+C$ soit un multiple de 10.

1. Le code 4971850187820 est-il valide?

2. Déterminer C pour que le code $978204732850C$ soit valide.

3. Un chiffre a été remplacé par x dans le code $32525x7041767$. Quelle valeur donner à x pour que ce code soit valide?

4. Le code 3742278085985 n'est pas valide.
   Quelles peuvent être les valeurs des deux premiers chiffres à gauche dans d'autres codes valides comportant les 11 mêmes chiffres à droite?

E.7

Partie de fléchettes

On joue aux fléchettes sur une cible comportant trois zones : une à 5 points, une à 7 points et une à 11 points. On s'intéresse aux différents scores possibles, le nombre de fléchettes n'étant pas limité.

Par exemple, 30 est un score possible puisque :
$30 = 11+7+7+5$ ou $30 = 5+5+5+5+5+5$.

1. Vérifier que 26, 43, 220 012 sont des scores possibles.

2. On dit que deux jeux sont identiques si, pour chacun d'entre eux, chaque zone de la cible comporte le même nombre de fléchettes. Par exemple les jeux correspondant aux scores : 7+5+5+11 et $5+7+11+5$ sont identiques.

   a) Trouver quatre jeux différents donnant le score 40.

   b) Démontrer qu'il existe deux jeux différents et deux seulement correspondant au score 34.

3. Trouver tous les scores que l'on peut obtenir avec un lancer de trois fléchettes ayant toutes atteint la cible. Présenter les résultats de manière organisée.

4. a) Démontrer que 14 et les quatre entiers suivants sont des scores possibles.

   b) Déterminer la liste des entiers positifs non nuls qui ne correspondent à aucun score.

E.8

Un programme de calcul

Voici un programme de calcul :

Soit N un nombre entier naturel écrit dans le système décimal :

- **Étape n°1 :** Repérer le chiffre X des unités de N.
- **Étape n°2 :** Calculer $N-X$. Soit M le nombre obtenu.
- **Étape n°3 :** Diviser M par 10. Soit D le nombre obtenu.
- **Étape n°4 :** Calculer $D+2X$. Soit R le nombre obtenu.
- **Étape n°5 :** Si R est différent de N, alors passer à l'étape n°6. Sinon, arrêter et afficher R.
- **Étape n°6 :** Si R s'écrit avec un seul chiffre, alors arrêter et afficher R. Sinon ,donner à N la valeur R et reprendre le programme de calcul à l'étape n°1.

1. Quel résultat affiche-t-on lorsqu'on introduit $N=15$ dans le programme de calcul?

2. Que se passe-t-il lorsqu'on introduit $N=2015$ dans le programme de calcul?

3. Quels sont les nombres susceptibles de figurer à l'affichage final?

E.9

Nombres à la chaîne

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & 2 & & 9 & \to & 10 & & 25 \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
4 & \leftarrow & 3 & & 8 & & 11 & & 24 \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
5 & \to & 6 & \to & 7 & & 12 & & 23 \\
 & & & & & & \downarrow & & \uparrow \\
16 & \leftarrow & 15 & \leftarrow & 14 & \leftarrow & 13 & & 22 \\
\downarrow & & & & & & & & \uparrow \\
17 & \to & 18 & \to & 19 & \to & 20 & \to & 21
\end{array}$$

Les entiers consécutifs 1, 2, 3, 4, etc... sont disposés dans les cases d'un tableau selon le schéma ci-contre. Le nombre 8 se trouve à l'intersection de la deuxième ligne et de la troisième colonne.

Le nombre 13 se trouve à l'intersection de la quatrième ligne et de la quatrième colonne.

Quel nombre se trouve à l'intersection de la vingt-cinquième ligne et de la vingt-cinquième colonne?

E.10

Des un avec des neuf

1. Calculer les sommes :
$a = 99 + 999 \quad ; \quad b = 99 + 999 + 9999$

2. On considère le nombre N défini comme la somme :
$N = 99 + 999 + 9\,999 + \cdots + 9999\ldots999$

Le premier terme de cette somme s'écrit avec deux chiffres 9 ; on ajoute les nombres s'écrivant avec trois puis quatre chiffres 9, etc... Le dernier terme de la somme s'écrit avec cent chiffres 9.

On effectue la somme et on écrit N en écriture décimale ordinaire. Combien de fois le chiffre 1 apparaît-il dans cette écriture?

E.11 On s'intéresse aux diverses façons d'écrire un nombre entier naturel comme somme d'autres entiers naturels *(pour éviter les répétitions, ils sont écrits dans l'ordre croissant)*. Par exemple :

- $5 = 1+1+1+1+1$
- $5 = 1+1+1+2$
- $5 = 1+1+3$
- $5 = 1+2+2$
- $5 = 1+4$
- $5 = 2+3$

sont les six décompositions possibles du nombre 5.

À chacune des sommes ainsi écrites, on associe le produit de ses termes. Les résultats obtenus pour 5 sont 1, 2, 3, 4 et 6.

1. Quelles sont les décompositions possibles du nombre 7? Quels sont les produits correspondants? Lequel est le plus grand?

2. On s'intéresse à présent aux décompositions du nombre 28, qu'on ne cherchera pas à écrire, et aux produits correspondants.

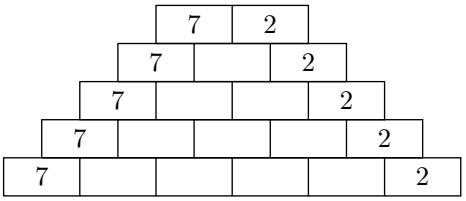
   a. On considère une décomposition quelconque du nombre 28 où apparait le nombre 1. On appelle P le produit associé. Trouver une décomposition dont le produit associé est supérieure à P.

   b. On considère une décomposition quelconque du nombre 28 où apparait le nombre 5. On appelle R le produit associé. Trouver une décomposition dont le produit associé est supérieur à R.

   c. Quelle décomposition de 28 donnent le plus grand produit associé?

E.12 On appelle pyramide de Pascale un empilement de cases complétées de la manière suivante :

- on choisit deux nombres entiers positifs m et n ;
- le premier nombre de chaque ligne est égal à m *(dans l'exemple ci-dessous $m=7$)* ;
- le dernier nombre de chaque ligne est égal à n *(dans l'exemple ci-dessous $n=2$)* ;
- un nombre inscrit dans une case est égal à la somme des nombres inscrits dans les deux cases situées juste au-dessus.



Exemple de pyramide de Pascale avec $m=7$ et $n=2$
On n'a représenté ici que les cinq premières lignes

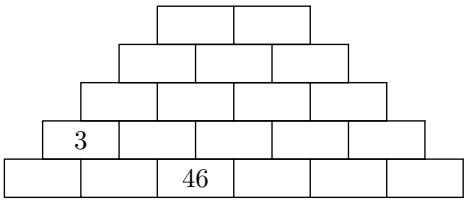
1. a. Reproduire et compléter l'exemple de pyramide de Pascale ci-dessus.

   b. Pour chaque ligne, calculer la somme des nombres figurant sur celle-ci. Que remarque-t-on?

2. Si l'on considère la pyramide de Pascale associée aux nombres entiers $m=1$ et $n=1$, sur quelle ligne la somme des nombres sera-t-elle égale à 1024?

3. Prouver que, pour des nombres entiers m et n quelconques, la somme des nombres de la quatrième ligne est égale au double de la somme des nombres de la troisième ligne.

4. Compléter la pyramide de Pascale ci-dessous :



3. *Autour des quotients*

E.13

Développement décimal

Quand on effectue la division de 28 par 27, on trouve :
1,037 037 037 037...
La division posée permet d'obtenir une écriture décimale périodique illimitée du quotient $\frac{28}{27}$.
La période de cette écriture est composée de trois chiffres *(ici 037)* qui se répètent. La 5e décimale est 3.

1. Quelle est la 52e décimale de $\frac{28}{27}$?

2. Quand on effectue la division de 19 par 13, on trouve :

1,461 538 461 538 461 538 . . .
De combien de chiffres est composée la période?
Quelle est la 100e décimale de $\frac{19}{13}$?

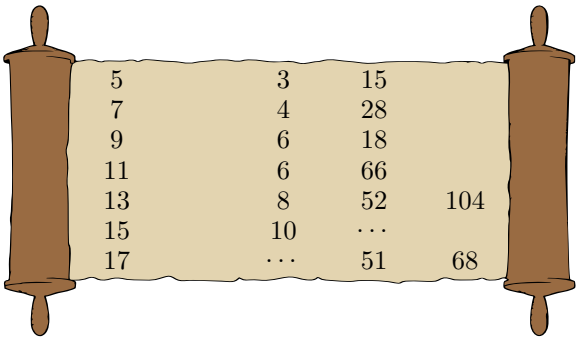
(3) Quand on effectue la division de 9 533 par 270, on trouve : 35,307 407 407 40 . . .
De combien de chiffres est composée la période?
Quelle est la $1\,000^e$ décimale de $\frac{9\,533}{270}$?

(4) L'écriture décimale de $\frac{1}{97}$ fait apparaître une période de 96 chiffres qui commence par `0309...`
Quel est le 96e chiffre de cette période?

E.14 Les Égyptiens n'utilisaient que des fractions de numérateur 1, à l'exception de la fraction $\frac{2}{3}$.

Pour trouver le double de leurs fractions de numérateur 1, on disposait de tables dont l'utilisation est décrite ci-dessous :

Par exemple, par lecture de la première ligne, on a :
Le double de $\frac{1}{5}$ est $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$



5	3	15	
7	4	28	
9	6	18	
11	6	66	
13	8	52	104
15	10	...	
17	...	51	68

(1) Interpréter la troisième ligne de la table.

(2) Il manque un nombre dans la ligne du 15 et un dans la ligne du 17.
Retrouver ces deux nombres.

(3) Pourquoi n'y a-t-il que des nombres impairs dans la première colonne?

E.15

Et à la fin, que reste-t-il?

On écrit la liste des cent nombres : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{98}, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$ à laquelle on applique le procédé suivant : on choisit des nombres a et b dans la liste et on les remplace par le seul $a+b+ab$, puis on continue de même. À chaque étape, l'effectif perd une unité. À la fin, on ne peut plus continuer , il n'y a qu'un nombre.

(1) Si on procède systématiquement et en commençant par la gauche :

(a) Quelle liste obtient-on après la première étape? Après la deuxième?

(b) Quel nombre obtient-on après les 99 étapes?

(2) Et si on commence par la droite?

(3) Si on procède au hasard, quels résultats peut-on obtenir?

4. *Utilisation des puissances*

E.16

(1) Quel est le nombre de chiffres du nombre :

$$N = 10^{2006} - 2006$$

(2) Quelle est la somme des chiffres de N?

5. *Algèbre et équation*

E.17

Loto nouveau

Lors d'une partie de Loto, chaque joueur reçoit des cartes sur lesquelles sont inscrits des nombres entiers. Des jetons numérotés sont tirés au sort et le numéro porté par chacun est annoncé à haute voix. On gagne lorsque tous les nombres d'une ligne de sa carte ont été annoncés.

Ce soir, les règles ont un peu varié!

28	29	30
12	13	14
3	4	5

L'organisateur distribue des cartes sur lesquelles figurent neuf nombres répartis en trois lignes de trois nombres consécutifs *(le tableau ci-dessus est un exemple d'une telle carte)*.

(1) L'organisateur annonce : "*un lot est offert à qui complète une ligne de nombres dont la somme est* 41". Peut-on gagner?

(2) L'organisateur annonce : "*un lot de consolation est offert à qui complète une ligne de nombres dont la somme est* 57". Quels sont les nombres inscrits sur une ligne gagnante?

(3) À partir de maintenant : "*un lot de consolation est offert à qui présente une ligne de nombres dont le produit est multiple de* 6". Qui gagne?

Dans cette question, les cartes comportent trois lignes de quatre nombres consécutifs.

(4) L'organisateur annonce : "*si en ajoutant* 1 *au produit des*

quatre nombres d'une même ligne, vous obtenez un carré parfait, alors vous gagnez un lot*". Qui gagne?

* *On rappelle qu'un carré parfait est le carré d'un entier*

E.18 On s'intéresse aux carrés magiques 3×3 : ce sont des tableaux à trois lignes et trois colonnes *(désignées respectivement par L_1, L_2, L_3 et C_1, C_2, C_3)* dans lesquels sont inscrits 9 nombres, de sorte que les sommes des nombres écrits dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chaque diagonale *(les diagonales sont désignées par D_1 et D_2)* soient égales. Cette somme commune est notée S, c'est la *constante* du carré magique.

1. Dans le carré ci-contre, on inscrit les entiers compris entre 1 et 9.
   Le compléter pour en faire un carré magique.

		8
		1
		6

2. Des deux tableaux ci-dessous, un seul est magique. Lequel?

23	-2	33
28	18	8
3	38	13

23	-2	33
28	18	8
3	38	13

2. On désigne par x un nombre quelconque. On se demande s'il est possible de créer un carré magique 3×3 dans lequel figureraient les neufs nombres :

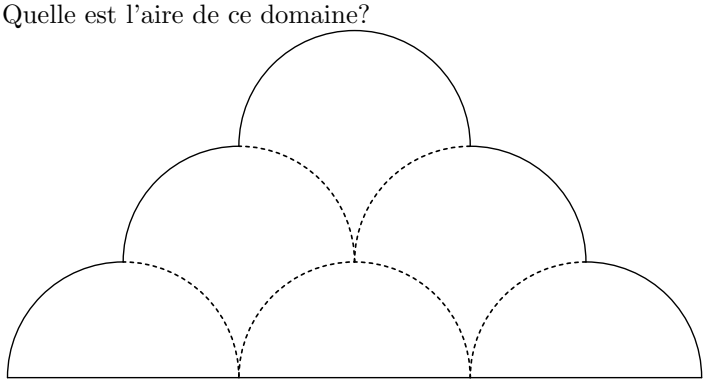
   $16x-10$; $2x-3$; -2 ; $4x-4$; $12x-8$
   $10x-7$; $6x-5$; $8x-6$; $14x-9$

   a. Quelle serait la constante de ce carré magique?
   b. Proposer un carré magique 3×3 utilisant ces neuf nombres.

3. Proposer finalement deux carrés magiques 3×3 :
   a. Un carré de 9 nombres tous négatifs ;
   b. Un carré de constante $S30$

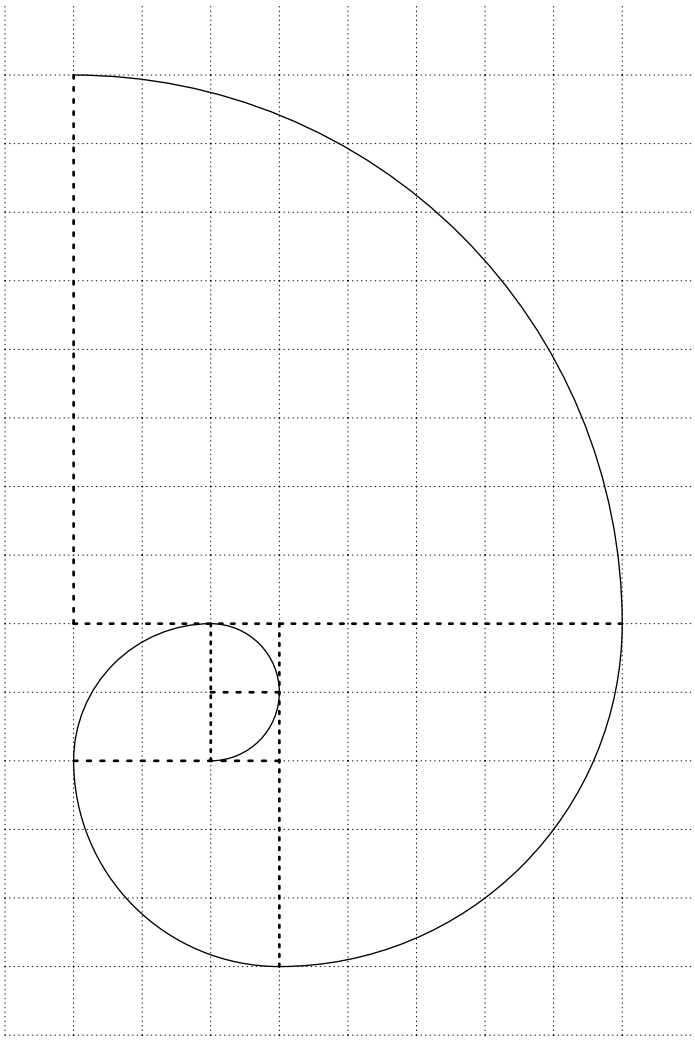
6. *Géométrie*

E.19 Six demi-cercles de rayon 1, et les diamètres de trois d'entre eux, déterminent le domaine représenté ci-dessous. Quelle est l'aire de ce domaine?



E.20

Une spirale



Une telle spirale est obtenue en traçant successivement des quarts de cercle de rayons de plus en plus grands.
Le premier quart de cercle a un rayon de 1, comme le deuxième. Le troisième quart de cercle a un rayon de 2, le quatrième de 3, le suivant de 5.

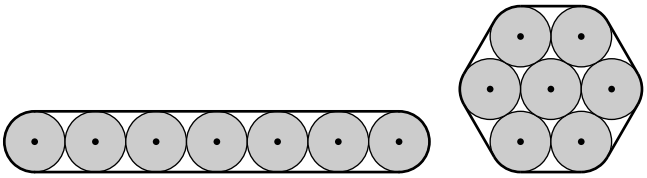
1. Quel est le rayon du sixième quart de cercle? du septième? du dixième?
2. Le rayon du quinzième quart de cercle est 610 et celui du seizième est 987. Quel est le rayon du dix-septième?
3. Quel est le rayon du vingtième quart de cercle?

E.21

Le meilleur emballage

On emballe sept tuyaux cylindriques de diamètre 20 *cm* en les entourant de ruban adhésif. On peut les disposer à plat ou en fagot comme le montrent les figures ci-dessous.

Quelle est dans chacun des cas la longueur d'un tour du ruban adhésif, arrondie au millimètre près?



Indication : on utilisera : $\pi \approx 3{,}1416$

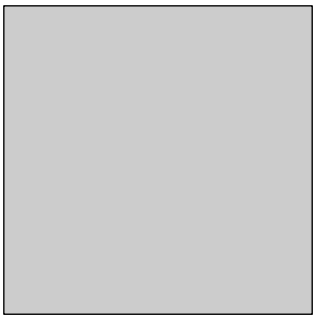
7. *Vers les suites*

E.22

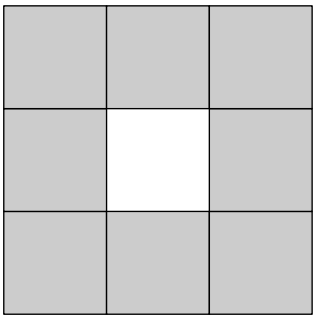
Creusez de plus en plus, mais de moins en moins.

1. **La carpette de Sierpinski**

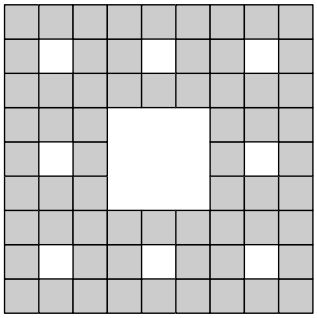
On considère un carré de côté 27.
À chaque étape, on enlève le carré central de chaque carré gris.



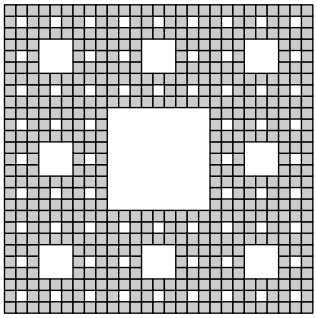
étape 0



étape 1



étape 2

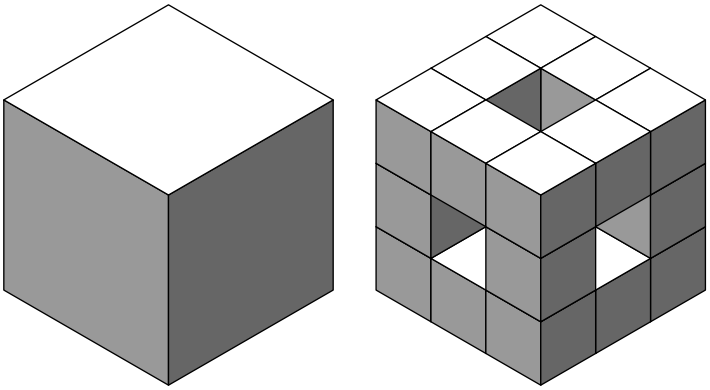


étape 3

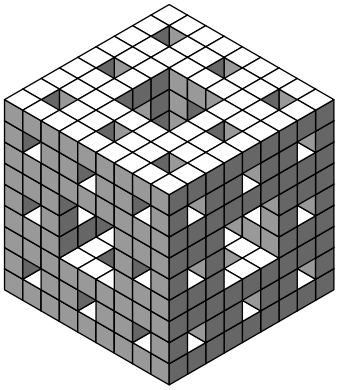
À quelle étape l'aire de la carpette devient-elle inférieure à la moitié de l'aire initiale?

2. **L'éponge de Sierpinski**

On considère à présent un cube d'arête a.
À chaque étape, on évide chaque cube de sept petits cubes à l'intérieur comme ci-dessous.



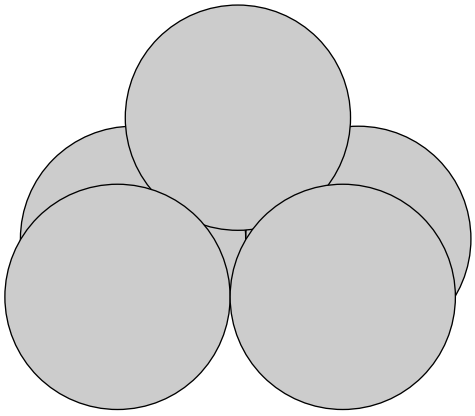
étape 0 étape 1



étape 2

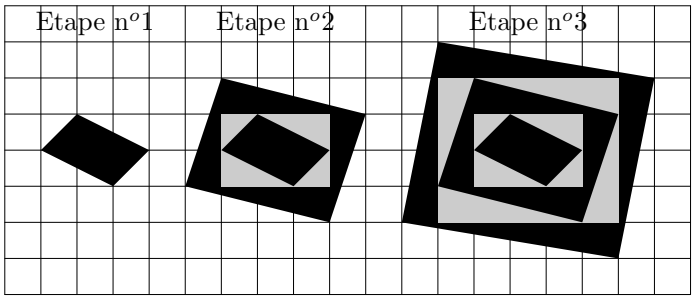
À quelle étape le volume de l'éponge devient-il inférieur à la moitié du volume initial?

E.23 Sur l'étal du marchand, tous les fruits sont rangés. Les oranges sont organisées en pyramide à base carrée. L'étage du haut comporte une seule orange. Cet étage est noté $E1$. L'étage au-dessous sera noté $E2$, et ainsi de suite. Chaque orange est posée sur quatre autres.



1. a. Combien d'oranges comporte l'étage $E2$?
   b. Combien d'oranges comporte l'étage $E3$?
   c. Combien d'oranges comporte l'étage $E10$?
   d. Y a-t-il un étage comportant exactement 64 oranges?
   e. Y a-t-il un étage comportant exactement 200 oranges?
2. Combien d'oranges comporte :
   a. une pyramide à 2 étages?
   b. une pyramide à 3 étages?
   c. une pyramide à 10 étages?
3. Les oranges de l'étal ont été organisées pour former une pyramide à sept étages. La pyramide se révèle malheureusement trop instable et il faut en former de plus petites. Proposer une organisation en pyramide à base carrée permettant de ranger toutes les oranges. Toutes les pyramides seront complètes et chacune comptera, au minimum, 3 étages.

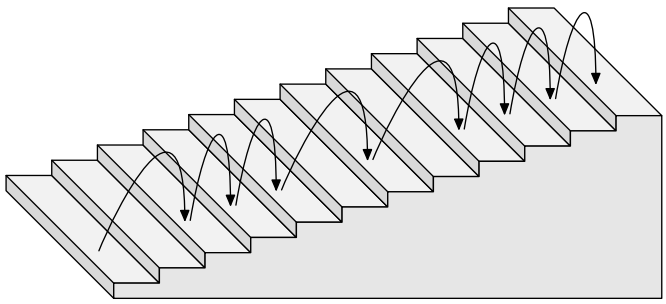
E.24 On construit une suite de motifs selon un procédé dont les trois premières étapes sont représentées ci-dessous :



L'unité d'aire est le carreau de quadrillage

1. Pour chacune des étapes 2 et 3 :
   a. Déterminer l'aire totale des parties intérieures claires ;
   b. Déterminer l'aire totale des parties noires.
2. a. Quelle est, à l'étape 4, l'aire totale des parties intérieures claires? Et celles des parties noires?
   b. Et à l'étape 20?

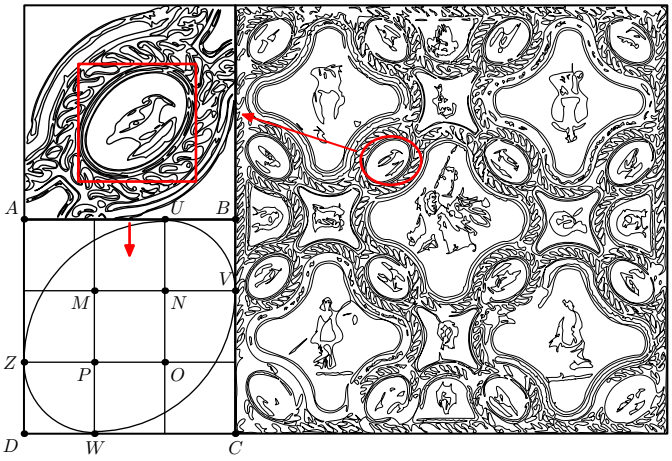
E.25 On peut monter un escalier une ou deux marches à la fois. La figure de droite montre un exemple.



1. De combien de façons peut-on monter un escalier d'une marche? de deux marches? de trois marches? de quatre marches? de cinq marches?
2. De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de 20 marches?

8. *Géométrie avec le théorème de Pythagore*

E.26 *Dans la ville de Nîmes, des travaux ont amené à la découverte d'une magnifique mosaïque romaine du début du troisième siècle, dite "mosaïque de Penthée". Cette mosaïque se compose de plusieurs panneaux figurés de formes géométriques diverses, séparés par des "tresses" (torsades). C'est là l'oeuvre d'un maître-artisan possédant de solides connaissances de "géométrie pratique" et capable d'assembler des arcs de cercles en des formes variées, pour finalement composer un tout harmonieux.*



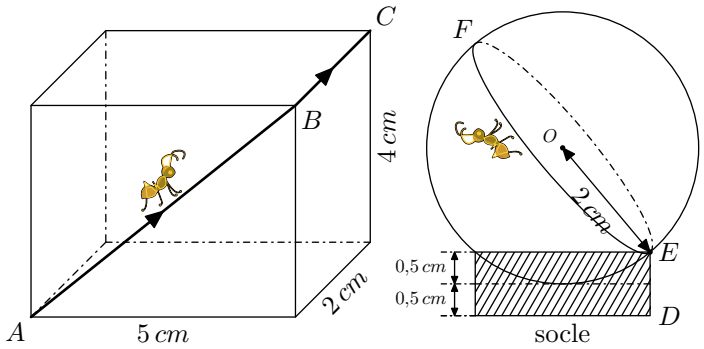
Sur la figure ci-dessus, on a extrait mentalement de la mosaïque un ovale inclus dans un carré $ABCD$ de côté 3 unités, découpé lui-même en 9 carrés. On sait que l'ovale est constitué de 4 quarts de cercles.

1. Quel est le centre de chacun de ces quarts de cercles?
2. Calculer le périmètre de cet ovale.
3. Calculer l'aire de cet ovale.
4. a. Construire un tel ovale *(on prendra 3 cm pour unité)*.
   b. En déduire une construction d'une figure de même périmètre, mais avec une aire plus petite.
   c. Construire une figure de même périmètre, mais avec une aire égale à 4 unités d'aire.

E.27

Les fourmis

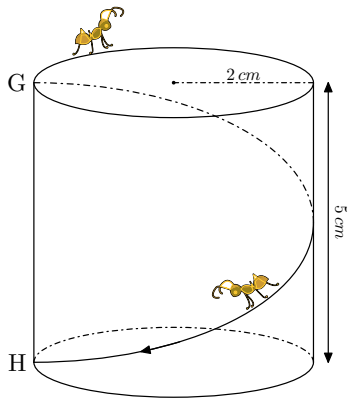
1. Voici ci-dessous deux solides : un pavé droit et une boule sur lesquels se déplacent deux fourmis.



La fourmi n^o1 se déplace sur le pavé droit en suivant le parcours formé par les segments $[AB]$ puis $[BC]$.
La fourmi n^o2 se déplace sur une boule de centre O et de rayon $2\,cm$ qui repose sur un socle de $1\,cm$ de hauteur. Elle part du point D, va en E, en suivant le segment $[DE]$, puis rejoint le point F en suivant le demi-cercle de diamètre $[EF]$.

Quelle fourmi parcourt le chemin le plus court?

2. Deux fourmis se déplacent sur un cylindre de rayon $2\,cm$.



La fourmi n^o1, par du point G et décrit le cercle supérieur du cylindre plusieurs fois de suite.
La fourmi n^o2, quant à elle, se déplace sur le cylindre en suivant le tracé fléché de G à H, en prenant le plus court chemin, puis remonte en G par le même chemin.
Les deux fourmis débutent leur parcours au même instant et se déplacent à la même vitesse, supposée constante.

a. **Est-ce que la fourmi n^o2 rencontrera la fourmi n^o1 à son retour en G?**
b. Imaginons que les deux fourmis continuent de se déplacer de la sorte sans s'arrêter. **Pourront-elles se rencontrer à un moment donné en G?**

Indications :

- on arrondira tous les résultats au millimètre près.
- on utilisera : $\pi \approx 3{,}1416$

E.28

Savez-vous planter des clous?

Madame Briqueau souhaite accrocher un cadre dans son salon. Ce cadre est rectangulaire et mesure $84\,cm$ de longueur et $56\,cm$ de hauteur. Son système d'accrochage est constitué d'une ficelle de $60\,cm$ de long, attachée au dos du cadre en deux points situés tous deux à $21\,cm$ du bord supérieur du cadre et chacun à $20\,cm$ d'un des bords latéraux.

Le mur destiné à l'accrochage est rectangulaire et mesure $2{,}68\,m$ de haut sur $3{,}78\,m$ de large.

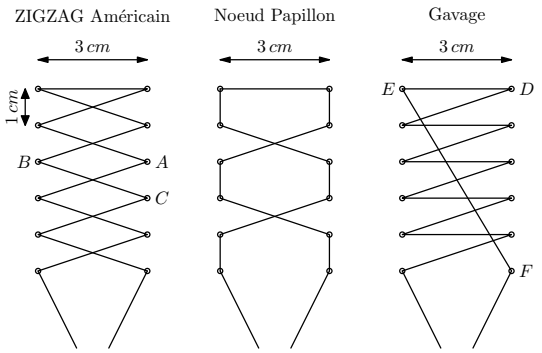
Madame Briqueau voudrait que son cadre, une fois posé, soit centré en largeur *(même espace à gauche et à droite du cadre)* et que son bord inférieur soit horizontal et à $1{,}42\,m$ du sol.

1. À quelle distance du bord gauche du mur madame Briqueau doit-elle planter le crochet?
2. Quelle forme prendra la ficelle quand le cadre sera en place?
3. À quelle distance du haut du mur madame Briqueau devra-t-elle planter le crochet *(arrondi au millimètre)*?

E.29

Les lacets

Il existe plusieurs façons de lacer des chaussures. En voici trois :



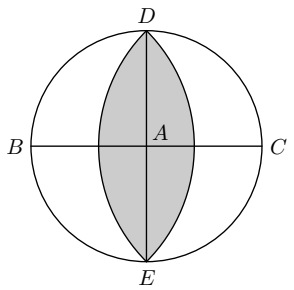
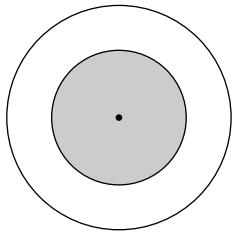
Quel est le laçage le plus long?

(On ne tient pas compte de la longueur de brins qui servent à faire un noeud).

E.30

Dans les yeux

On schématise les yeux par des disques de rayons $5\,mm$.

Oeil de chat	Oeil de lapin
 $[BC]$ et $[DE]$ sont deux diamètres perpendiculaires. La pupille est délimitée par deux arcs de cercles de centres respectifs B et C, passant par D.	 La pupille est délimitée par un cercle de même centre que l'oeil et de rayon $3\,mm$

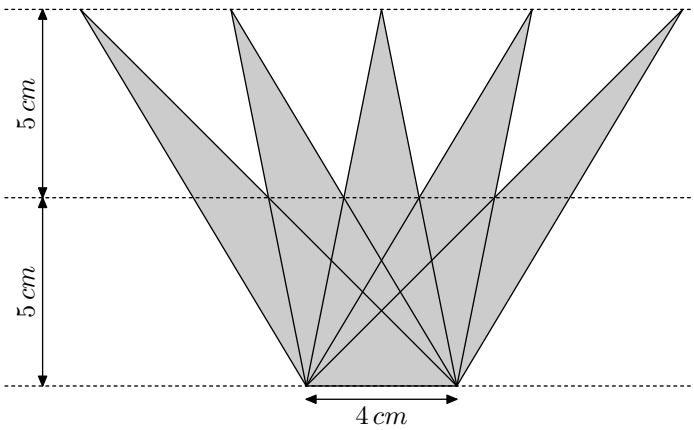
Lequel de ces deux yeux a la plus grande pupille?

9. *Géométrie avec le théorème de Thalès*

E.31

La couronne

Les sommets du polygone grisé représenté ci-dessous sont situés sur des droites parallèles espacées de $5\,cm$. La "*base*" a pour longueur $4\,cm$.



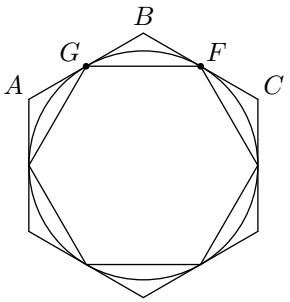
Quelle est l'aire de ce polygone?

10. *Géométrie avec trigonométrie*

E.32

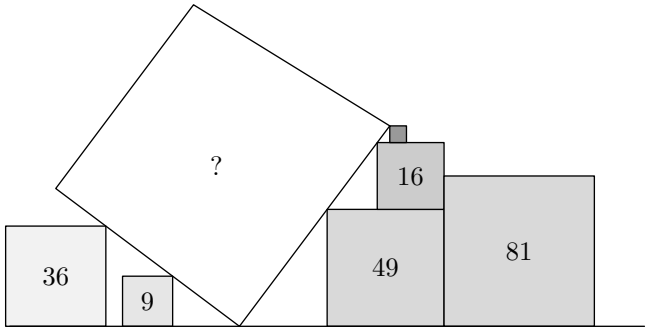
Hexagones gigognes

Soit H_1 un hexagone régulier inscrit dans un cercle et H_2 un hexagone régulier circonscrit au même cercle.
Sur la figure ci-dessous *(qui n'est pas en vraie grandeur)*, A, B et C désignent trois sommets consécutifs de l'hexagone H_2 et G et F, les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$, sont deux sommets de l'hexagone H_1.



L'aire de l'hexagone H_2 vaut $340\,m^2$. Combien vaut l'aire de l'hexagone H_1?

E.33 Sur la figure ci-dessous, les aires de six carrés ont été indiquées.



Un des sommets du carré oblique blanc coïncide avec un sommet du carré d'aire 1.
Quelle est l'aire de ce carré?

11. *Proportionnalité, pourcentage, unité*

E.34

BavardaCar

Monsieur A doit effectuer en voiture un voyage de $350\,km$ *(sans péage)*. Il doit prendre en route quatre autres personnes, madame B, monsieur C, madame D et monsieur E, qui se rendent au même endroit que lui. Il récupère madame B après $60\,km$ de route puis roule encore pendant $60\,km$ avant de prendre en charge monsieur C et madame D. Il prend en charge monsieur E à $200\,km$ de l'arrivée.
La dépense en carburant est estimée à 36,40 €.

On envisage différents modes de partage pour la répartition des frais entre **tous les occupants de la voiture**.

1. **Premier mode :** chacun paie la même somme. Quelle est cette somme?
2. **Deuxième mode :** la part de chacun est proportionnelle à la distance qu'il a parcourue dans la voiture. Quelle est la part de chacun?
3. **Troisième mode :** la part de chacun se calcule en prenant en compte, sur chacun des tronçons, le nombre de personnes présents dans la voiture et la longueur du tronçon. Quelle est la part de chacun?

E.35

Course poursuite

Une course à pied d'un type nouveau a été créée récemment.

Les coureurs partent tous en même temps et n'ont pas de ligne d'arrivée à franchir. Une voiture part à leur poursuite une demi-heure plus tard. Tout coureur dépassé par la voiture est éliminé. Le dernier coureur dépassé est donc déclaré vainqueur de la course.

L'objectif de chaque coureur est donc de parcourir la plus grande distance possible, avant d'être rattrapé par la voiture.

Voici l'organisation de la course :

- Les coureurs s'élancent à 10 heures du matin.
- La voiture qui les poursuit démarre 30 minutes plus tard. Elle accroît sa vitesse progressivement :
  - Pendant la première heure, elle roule à $15\,{}^{km}/_{h}$;
  - L'heure suivante, elle roule à $16\,{}^{km}/_{h}$;
  - L'heure suivante, elle roule à $17\,{}^{km}/_{h}$;
  - Les deux heures suivantes, elle roule à $20\,{}^{km}/_{h}$;
  - Elle stabilise ensuite sa vitesse à $35\,{}^{km}/_{h}$.

1. Robert s'est fait rattraper par la voiture une heure après son départ. Quelle distance a-t-il parcourue?
2. Michèle s'est fait rattraper par la voiture deux heures après son départ. À quelle vitesse moyenne a-t-elle couru?
3. Philippe a parcouru $30\,km$ avant d'être rattrapé. À quelle heure a-t-il été repris par la voiture?
4. Le vainqueur de la course de l'an passé a parcouru $78\,km$. Combien de temps a-t-il couru, et à quelle vitesse moyenne?
5. Victoire pense cette année pouvoir courir pendant des heures à $14\,{}^{km}/_{h}$.
   Si elle y parvient, quelle distance parcourra-t-elle?

12. *Probabilité*

E.36

Vrai - Faux

Ludovic doit répondre à un test de 25 questions. Les réponses sont "*Vrai*" ou "*Faux*". Son professeur de mathématiques donne l'indication suivante : dans toute série de 5 réponses consécutives, il y a exactement trois réponses "*Vrai*".

1. Pourquoi la liste suivante ne convient-elle pas?

Question 1	V
Question 2	F
Question 3	V
Question 4	V
Question 5	F
Question 6	F
...	...

(2) Combien y a-t-il de réponses “*Vrai*” dans la liste des 25 réponses?

(3) Le professeur indique que la réponse à la première question est “*Faux*”. Ludovic affirme qu'il connait la réponse à la sixième sans avoir lu les questions. Comment a-t-il fait?

(4) Le professeur souffle à Ludovic que la réponse à la dernière question est également “*Faux*”. Ludovic affirme qu'il peut maintenant trouver toutes les réponses sans lire les questions.
A-t-il raison?

13. *Algorithmique*

E.37 Sous scratch, la commande ci-dessous teste si un nombre entier est divisible par un nombre entier.

⟨ [nombre entier] modulo [nombre entier] = [0] ⟩

Ainsi, la proposition ⟨ [66] modulo [11] = [0] ⟩ est vraie, car $66 = 6 \times 11$. Autrement dit, 66 est divisible par 11.

Par contre, la proposition ⟨ [64] modulo [11] = [0] ⟩ est fausse, car 64 n'est pas divisible par 11.

La commande ci-dessous est utilisée pour la programmation du déplacement vertical d'un lutin représentant un ballon changeant de couleur *(bleu, violet ou jaune)* en fonction de son ordonnée et chaque étape permettant de faire évoluer le nombre de points.

```
ligne 0   quand [flag] est cliqué
ligne 1   mettre à [50] % de la taille initiale
ligne 2   basculer sur le costume [ballon bleu]
ligne 3   mettre [ordonnée] à [-155]
ligne 4   mettre [points] à [0]
ligne 5   aller à x: [0] y: [ordonnée]
ligne 6   répéter indéfiniment
ligne 7     si ⟨ [ordonnée] < [150] ⟩ alors
ligne 8       si ⟨ [ordonnée] modulo [11] = [0] ⟩ alors
ligne 9         mettre [points] à [points] * [3]
ligne 10        basculer sur le costume [ballon jaune]
              sinon
ligne 11        si ⟨ [ordonnée] modulo [7] = [0] ⟩ alors
ligne 12          mettre [points] à [points] * [2]
ligne 13          basculer sur le costume [ballon violet]
                sinon
ligne 14          mettre [points] à [points] + [10]
ligne 15          basculer sur le costume [ballon bleu]
ligne 16      attendre [2] secondes
ligne 17      ajouter à [ordonnée] [15]
ligne 18      aller à x: [0] y: [ordonnée]
```

(a) À chaque passage dans la boucle “*Si l'ordonnée est inférieure à 150*”, combien est augmentée l'ordonnée du ballon?

(b) Si l'ordonnée du ballon est égale à 55, expliquer pourquoi le nombre de points est multiplié par 3?

(c) Si l'ordonnée du ballon est égale à 100, que se passe-t-il pour le nombre de points?

(d) Pour quelle(s) ordonnées(s) le ballon passe-t-il par la couleur jaune? Pourquoi?

(e) Quel sera le nombre de points final attribué au ballon?

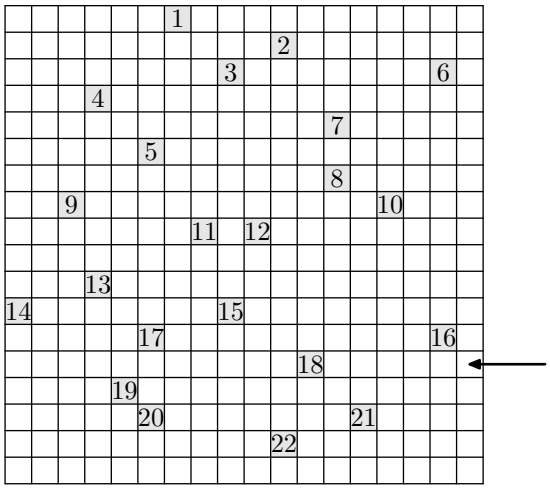
(f) Par quel nombre dois-je remplacer la valeur "10" *(ligne 14)* pour que le nombre de points final soit égal à 955?

(g) Par quel nombre doit-on remplacer la valeur 2 *(ligne 11)* pour que le nombre de points soit égal à 17 300?

E.38

Gymkhana pour robot

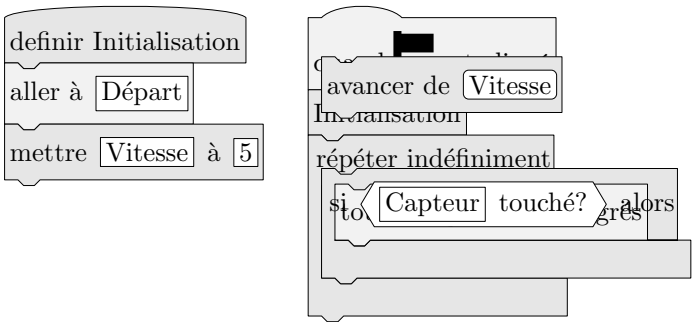
Un robot est posé sur un plateau quadrillé sur lequel sont disposés des obstacles numérotés.
Il est positionné au départ prêt à avancer dans le sens de la flèche.



Ce robot est équipé d'un capteur de présence placé à l'avant. Ce capteur permet de repérer un obstacle situé devant lui.

Enfin, ce robot est aussi équipé d'une puce permettant de programmer ses déplacements avec un langage par blocs type "*Scratch*" ou "*MBlock*".

Le programme suivant a été implanté dans la puce de ce robot.



Le robot est ensuite mis en marche par l'intermédiaire du drapeau vert.

(1) Donner la liste des dix premiers obstacles rencontrés.

(2) Quel sera le 50ème obstacle qu'il rencontrera?

(3) Quel sera le 2019ème obstacle qu'il rencontrera?

E.39 Louise, Nassim, Ilam et Sophie participent à un jeu télévisé comportant 2 parties.
Lors de la 1ère partie, ces quatre candidats doivent répondre chacun à trois questions. Pour chaque réponse juste, le joueur gagne 5 points, il perd 2 points s'il ne répond pas et perd 3 points si sa réponse est fausse.
Le candidat récoltant le moins de points est éliminé au 1er tour.
Louise ne répond qu'à 2 questions dont une est fausse.
Nassim répond à toutes les questions : 2 sont justes.
Ilam répond correctement aux 2 premières questions, mais ne répond pas à la dernière.
Sophie ne répond qu'à une seule question, mais elle est juste.

(1) (a) Quel est le candidat éliminé lors de cette 1ère partie de jeu?

(b) Lister tous les scores possibles que peut obtenir un candidat jouant à ce jeu lors de la 1ère partie.

(2) Lors de la 2ème partie du jeu, le principe est le même, mais les candidats doivent répondre à 8 questions.
Zoé regarde ce jeu chez elle. Elle sort sa tablette et ouvre une feuille de calculs dans un tableur.

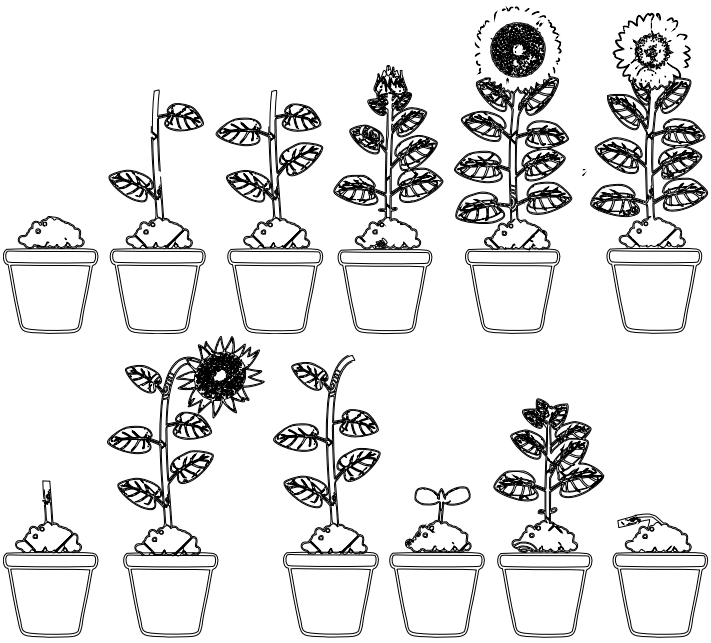
	A	B	C	D
1	Bonnes	Ne réponds pas	Fausses	Score
2	0	0	=8-A2-B2	=A2*5+B2*(-2)+C2*(-3)
3	0	1	7	-23
4	0	2	6	-22
5	0	3	5	-21
6	0	4	4	-20

À partir de combien de bonnes réponses peut-on avoir un score positif?

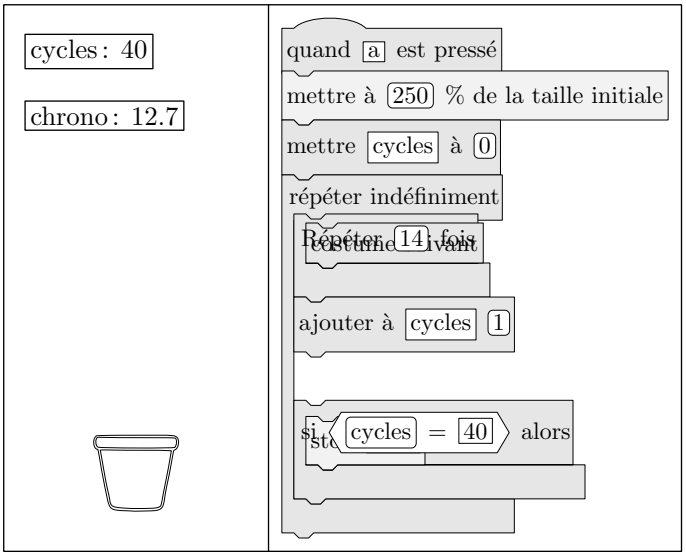
E.40 Les douze images ci-dessous sont extraites d'un fichier d'image animée *(comprenant réellement 15 images successives)* présentant le développement d'une fleur de sa naissance à sa mort. Seules la première et la dernière image sont correctement placées.

1re partie :

Indiquer l'ordre de défilement des dix autres images pendant l'animation.



2ème partie :



Questions préliminaires : compréhension de l'algorithme

(a) Que faut-il faire pour lancer le programme?

(b) Combien peut-on observer de cycles de la fleur avant l'arrêt du programme?

(c) Quelle est la "*durée*" de l'animation?

(d) La variable `cycles` affichée est-elle le nombre de cycles déjà exécutés ou le rang du cycle en cours d'exécution? Justifier votre choix.

Question 1

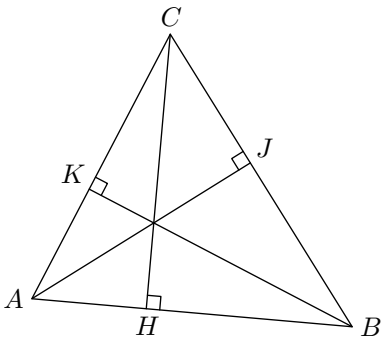
Quelle serait la durée de l'animation pour exactement 5 cycles? 9 cycles?

Question 2

Lorsque le chronomètre affiche la fin de la 9ème "*seconde*", quel est le nombre de cycles affiché?
Quel "*costume*" du "*lutin*" serait sur l'image à cet instant?

14. *Fin d'année : avec identitié remarquable*

E.41 Le triangle ABC ci-contre est tel que :
$AC = 13$; $AB = 14$; $BC = 15$
Soit H, J, K les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets C, A, B.



(1) Montrer que CH est un nombre entier.

(2) Montrer que AJ est un nombre décimal et que BK est un quotient d'entiers.

(3) Proposer un triangle dont les trois côtés et les trois hauteurs ont pour longueurs des nombres entiers.

15. *Exercices non-classés*

E.42

Sommes de chiffres

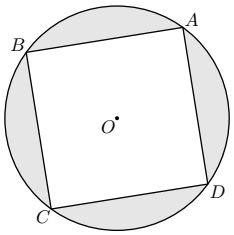
Dans cet exercice, les nombres considérés sont des entiers inscrits selon la numération décimale.
Pour cet exercice, on appelle **poids** d'un nombre N la somme de ses chiffres.

1. Quel est le poids du nombre 29? Quel est le poids du nombre 7 646?
2. Proposer trois nombres différents de même poids 42.
3. Est-il exact de dire que "*plus un nombre a de chiffres, plus son poids est élevé*"?
4. Quel est le plus petit nombre de poids 50?
5. Quel est le plus petit nombre de poids 2 022?
6. Peut-on trouver un nombre ne s'écrivant qu'avec des 5 et 7 et dont le poids soit 53?
7. Peut-on trouver un nombre ne s'écrivant qu'avec des 3 et des 6 et dont le poids soit 200?

E.43

Carré inscrit dans un cercle inscrit...

L'unité de longueur est le cm. *Attention : les figures ne sont pas à l'échelle. Tous les résultats numériques demandés sont attendus en valeur exacte.*



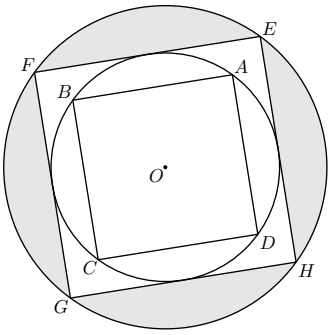
Sur la figure ci-dessus est représenté le cercle $\mathscr{C}_1$, de centre O et de rayon 2. Les segments $[AC]$ et $[BD]$ sont deux diamètres perpendiculaires de ce cercle.

1. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

On dit que le cercle $\mathscr{C}_1$ est le cercle circonscrit au carré $ABCD$.

2. Quelle est l'aire de la partie grisée de la figure?

On considère le carré $EFGH$ dont les côtés sont parallèles à ceux de $ABCD$ et tangents au cercle $\mathscr{C}_1$. On dit que le cercle $\mathscr{C}_1$ est inscrit dans le carré $EFGH$. On considère de même que précédemment le cercle $\mathscr{C}_2$ circonscrit au carré $EFGH$. La figure ci-dessous représente cette situation.



3. Calculer l'aire de la partie grisée sur cette nouvelle figure.
4. Sur le même principe, on peut construire une nouvelle figure avec un cercle $\mathscr{C}_3$ circonscrit à un nouveau carré $IJKL$ dont les côtés seraient tangents à $\mathscr{C}_2$ et parallèles aux côtés du carré $EFGH$. Quelle est, sur cette nouvelle figure, l'aire comprise entre le cercle $\mathscr{C}_3$ et les côtés du carré $IJKL$?

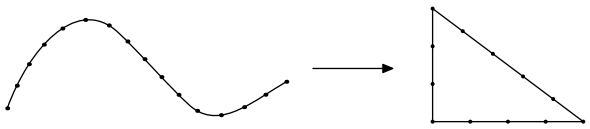
E.44

Triplets pythagoriciens

Une unité de longueur est donnée dans le plan. Un triangle ABC a pour côtés :

$AB = 15 \quad ; \quad AC = 8 \quad ; \quad BC = 17$

1. Montrer que ce triangle est rectangle, en indiquant quel point est le sommet de l'angle droit.



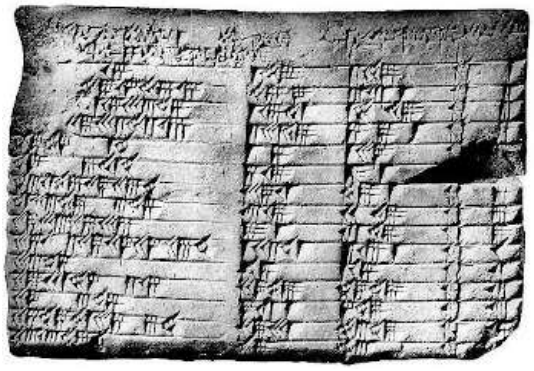
Corde à 13 noeuds et triangle égyptien

Plus généralement, on s'intéresse aux triangles rectangles dont les côtés ont des longueurs entières. On pose :

$AB = m \quad ; \quad AC = n \quad ; \quad BC = p.$

On fait l'hypothèse que $m<n<p$ et on dit que le *triplet* $(m\,;n\,;p)$ est *pythagoricien*.

2. a. Si $(m\,;n\,;p)$ est un triplet pythagoricien, quel point est le sommet de l'angle droit du triangle rectangle ABC associé?
   b. Montrer que $(3\,;4\,;5)$ est un triplet pythagoricien. Les triangles associés sont les "*triangles égyptiens*".
   c. Montrer que, si le triplet $(m\,;n\,;5)$ est pythagoricien, alors $m=3$ et $n=4$.

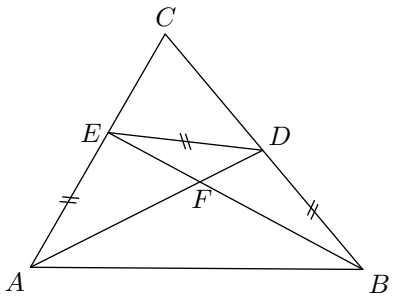


La tablette Plimpton 322 (Université Columbia, New-York) témoigne de recherches conduites par des Babyloniens.

4. On suppose que le triplet $(5\,;n\,;p)$ est pythagoricien.
   a. Montrer que : $(p-n)(p+n)=25$
   b. Comparer $p+n$ et $p-n$ et en déduire leurs valeurs puis finalement les valeurs de p et de n. Le triangle associé est dit "*babylonien*".
5. Existe-t-il des entiers m et p tels que le triplet $(m\,;5\,;p)$ soit pythagoricien?

E.45

Angle inconnu



L'angle en C du triangle ABC mesure 70°. On a placé sur le côté $[BC]$ le point D et sur le côté $[AC]$ le point E tels que :
$BD = DE = EA$.
Les segments $[BE]$ et $[AD]$ se coupent en F.

Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AFB}$?