Quatrième / Réciproque du théorème de Pythagore

ChingEval : 10 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. Egalité de Pythagore

E.1

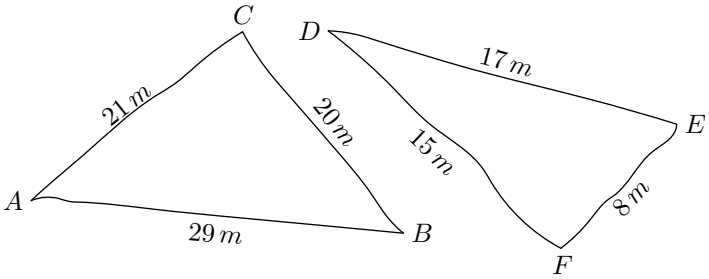
Définition : trois nombres forment un **triplet pythagoricien** si le carré d'un nombre est égal à la somme des carrés des deux autres.

Exemple : les nombres 6, 8 et 10 forment un triplet pythagoricien car : $10^2 = 6^2 + 8^2$

Justifier, pour chaque question, que ces trois nombres forment un triplet pythagoricien :

a) 3, 4 et 5 b) 5, 12 et 13 c) 9, 12 et 15

E.2 On considère les deux triangles ABC et DEF représentés à la main ci-dessous :



1) À l'aide de la calculatrice, compléter les pointillés suivants :

a) $AB^2 = \ldots\ldots$ $AC^2 = \ldots\ldots$ $BC^2 = \ldots\ldots$

b) $DE^2 = \ldots\ldots$ $DF^2 = \ldots\ldots$ $EF^2 = \ldots\ldots$

Définition : on dit qu'un triangle vérifie l'**égalité de Pythagore** si ses longueurs forment un triplet pythagoricien.

2) Justifier que les triangles ABC et DEF vérifient l'égalité de Pythagore.

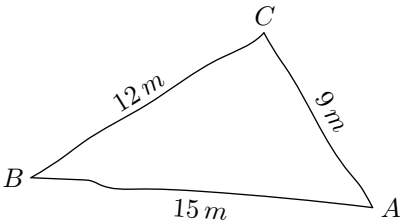
2. Réciproque du théorème de Pythagore et chainons déductifs

E.3

Réciproque du théorème de Pythagore :
Si, dans un triangle, le carré de la longueur d'un côté est égale à la somme des carrées des longueurs des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle et ce côté est son hypoténuse.

Autre version de l'énoncé :
Si un triangle vérifie l'égalité de Pythagore alors ce triangle est rectangle et le plus grand de ses côtés est son hypoténuse.

Elias se demande si le mur construit en bordure de son jardin, en forme de triangle, formera un angle droit. Son père lui a donné ce croquis de son jardin avec les mesures exactes du jardin :

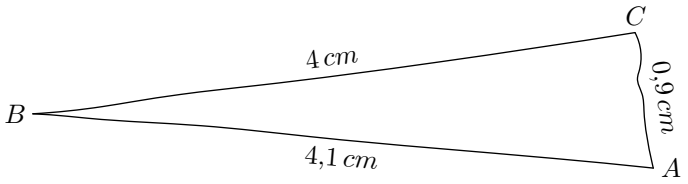


Pour aider Elias, compléter ce chaînon déductif :

Calculs	$AB^2 = \ldots$ $AC^2 = \ldots$ $BC^2 = \ldots$	
Chaînon déductif	Je sais	Les longueurs du triangle ABC vérifient l'égalité de Pythagore car : *(indiquer l'égalité correcte)* * $AB^2 = CA^2 + CB^2$ * $BC^2 = AB^2 + AC^2$ * $AC^2 = BA^2 + BC^2$
	J'utilise	D'après la réciproque du théorème de Pythagore
	J'en déduis	

 CC BY-NC

E.4 Un triangle ABC a été représenté ci-dessous à main levée, mais y sont indiquées ses vraies mesures :



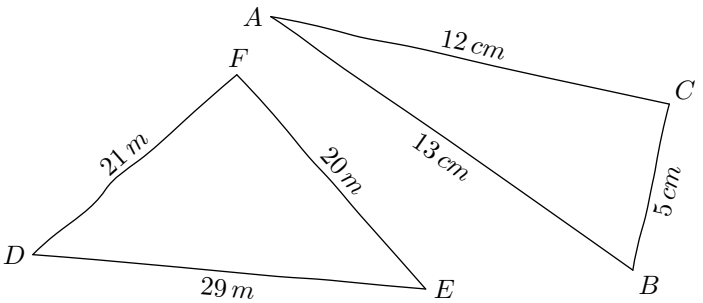
Compléter le chaînon déductif ci-dessous pour prouver que ce triangle est rectangle.

Calculs	$AB^2 = 16{,}81$	$AC^2 = 0{,}81$	$BC^2 = 16$
Chaînon déductif — Je sais			
Chaînon déductif — J'utilise			
Chaînon déductif — J'en déduis			

On précisera le sommet de l'angle droit.

3. Réciproque du théorème de Pythagore

E.5 Ci-dessous sont représentées, à main levée, les deux triangles ABC et DEF dont les mesures des côtés sont indiquées sur la figure :

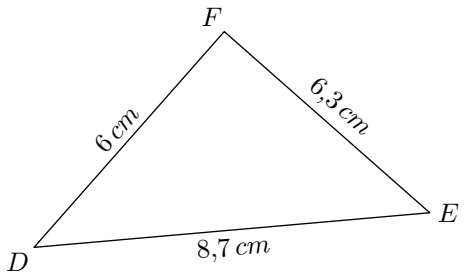


Démontrer que ces triangles sont rectangles. On indiquera le sommet de l'angle droit.

On rappelle les premiers carrés parfaits :

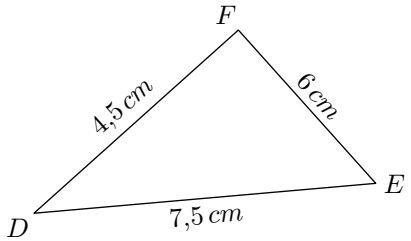
$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$	$31^2 = 961$	$41^2 = 1681$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$	$22^2 = 484$	$32^2 = 1024$	$42^2 = 1764$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$	$23^2 = 529$	$33^2 = 1089$	$43^2 = 1849$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$	$24^2 = 576$	$34^2 = 1156$	$44^2 = 1936$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$	$25^2 = 625$	$35^2 = 1225$	$45^2 = 2025$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$	$26^2 = 676$	$36^2 = 1296$	$46^2 = 2116$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	$27^2 = 729$	$37^2 = 1369$	$47^2 = 2209$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$	$28^2 = 784$	$38^2 = 1444$	$48^2 = 2304$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$	$29^2 = 841$	$39^2 = 1521$	$49^2 = 2401$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$	$30^2 = 900$	$40^2 = 1600$	$50^2 = 2500$

E.6 On considère le triangle DEF représenté ci-dessous et ayant pour mesures : $DE = 8{,}7\ cm$, $EF = 6{,}3\ cm$, $DF = 6\ cm$



Démontrer que le triangle DEF est un triangle rectangle dont on précisera le sommet de l'angle droit.

E.7 On considère le triangle DEF représenté ci-dessous et ayant pour mesures : $DE = 7{,}5\ cm$, $EF = 6\ cm$; $DF = 4{,}5\ cm$

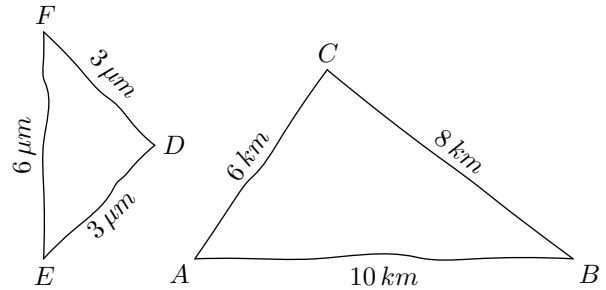


Démontrer que le triangle DEF est un triangle rectangle dont on précisera le sommet de l'angle droit.

4. Réciproque et contraposée du théorème de Pythagore

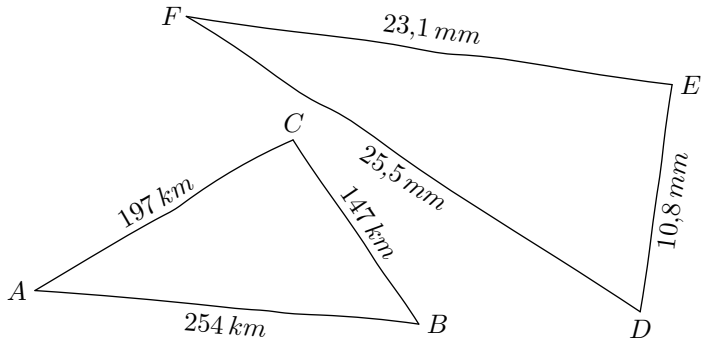
E.8 On considère les deux triangles ABC et DEF représentés ci-dessous à main levée et dont les mesures exactes des côtés ont été indiquées :

 CC BY-NC



Préciser si ces triangles ABC et DEF sont rectangles.

E.9 Déterminer la nature de chacun des triangles ci-dessous :

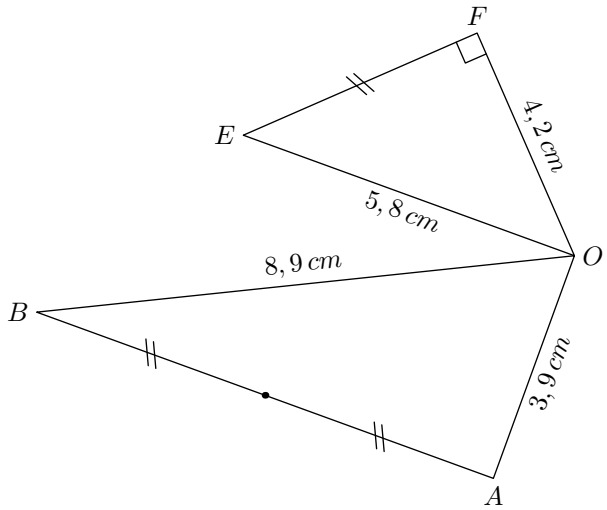


5. Réciproque et théorème de Pythagore

E.10 La configuration ci-dessous est composée des deux triangles ABO et OEF où ce dernier est rectangle en F et où :

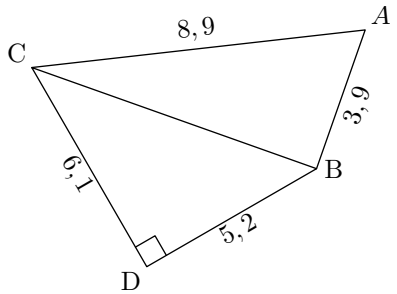
$EO = 5{,}8\,cm$; $OF = 4{,}2\,cm$; $OA = 3{,}9\,cm$

$OB = 8{,}9\,cm$; $AB = 2\times EF$



Déterminer la nature du triangle ABO.

E.11 On considère les deux triangles ABC et BCD représentés ci-dessous :

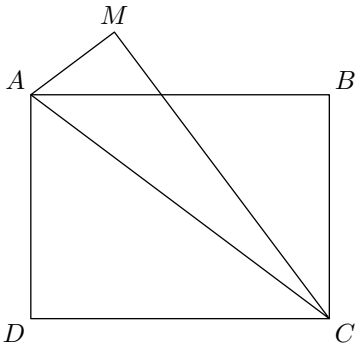


1. Calculer la longueur du segment $[BC]$ arrondie au dixième près.
2. Le triangle ABC est-il rectangle?

E.12

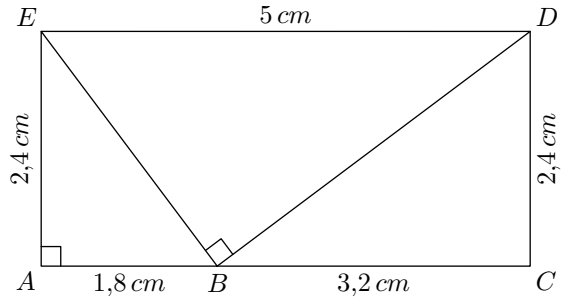
On considère un rectangle $ABCD$ ayant $20\,cm$ pour longueur et $15\,cm$ de largeur. Le point M est un point du plan tel que :
$AM = 7\,cm$; $MC = 24\,cm$

Une représentation de cette configuration est donnée ci-contre :



1. Justifier que le triangle ADC est rectangle en D.
2. Déterminer la mesure du segment $[AC]$.
3. Montrer que le triangle AMC est un triangle rectangle.

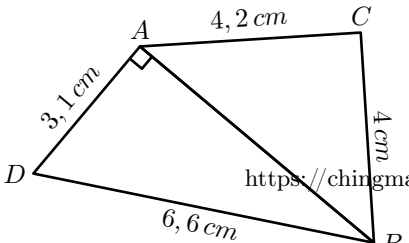
E.13 On considère la figure ci-dessous où les points A, B, C sont alignés et les triangles ABE et EBD sont respectivement rectangles en A et B.



1. Démontrer que le segment $[BD]$ a pour longueur $4\,cm$.
2. Justifier que le triangle BCD est un triangle rectangle en C.

6. Utilisation des valeurs approchées.

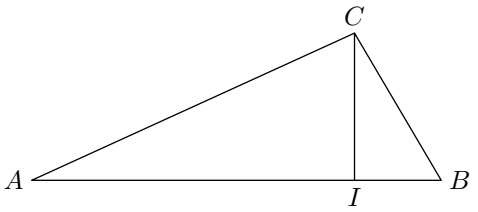
E.14 La figure ci-dessous représente deux triangles ABC et ABD où le triangle ABD est rectangle en A.



https://chingmath.fr CC BY-NC

1. Déterminer la mesure du segment $[AB]$ au millimètre près.
2. Le triangle ABC est-il un triangle rectangle? Justifier votre réponse.

E.15 Soit ABC un triangle et I un point du segment $[AB]$ tel que :



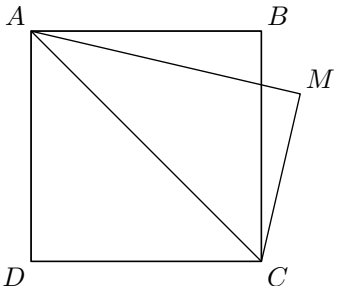
$CI = 5{,}6\,cm$; $IB = 3{,}3\,cm$; $BC = 6{,}5\,cm$; $AC = 13{,}5\,cm$

1. Montrer que le triangle CIB est rectangle en I.
2. Donner la longueur de $[AI]$, tronquée au centième de centimètre.

E.16

Dans la figure ci-dessous, le quadrilatère est un carré de $3\,cm$ de côté et le point M est placé tel que :

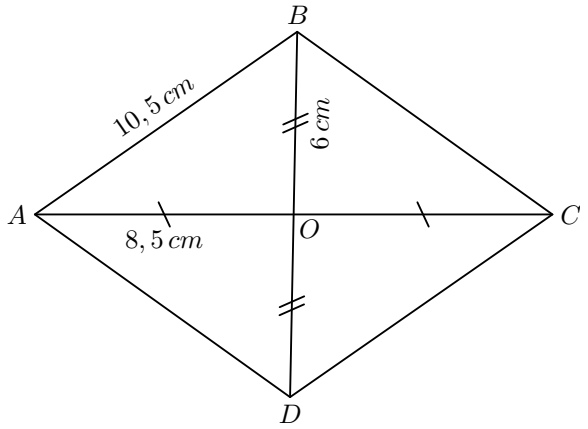
$AM = 3{,}6\,cm$; $MC = 2{,}24\,cm$



1. Déterminer la longueur du segment $[AC]$ arrondie au centième de centimètre près.
2. Le triangle AMC est-il rectangle? Justifier.

7. Quadrilatère et réciproque du théorème de Pythagore

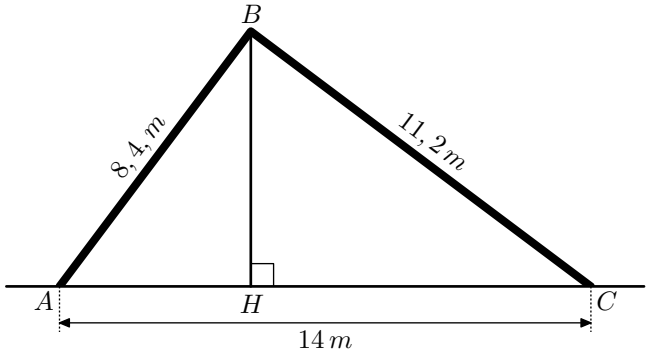
E.17 On considère le quadrilatère $ABCD$ représenté ci-dessous :



1. Justifier que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. $ABCD$ est-il un rectangle? Justifier votre réponse.
3. $ABCD$ est-il un losange? Justifier votre réponse.

8. Théorème/réciproque de Pythagore et aires

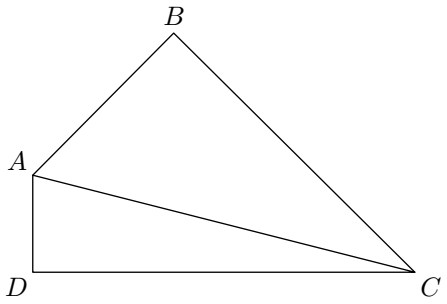
E.18 Dans la forêt tropicale, une famille d'autochtones construit une hutte dont un schéma est donné ci-dessous :



1. Justifier que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. a. Déterminer l'aire de la façade ABC de cette hutte.
   b. En déduire la mesure de la hauteur $[BH]$ de la hutte.
3. Déterminer la mesure du segment $[HC]$.

 CC BY-NC

E.19 Jean-Michel est propriétaire d'un champ, représenté par le triangle ABC ci-dessous. Il achète à son voisin le champ adjacent, représenté par le triangle ADC. On obtient ainsi un nouveau champ formé par le quadrilatère $ABCD$.



Jean-Michel sait que le périmètre de son champ ABC est de 154 mètres et que $BC = 56\,m$. Son voisin l'informe que le périmètre du champ ADC est de 144 mètres et que $AC = 65\,m$.
De plus, il sait que : $AD = 16\,m$.

1. a. Justifier que les longueurs AB et DC sont respectivement égales à $33\,m$ et $63\,m$.
   b. Calculer le périmètre du champ $ABCD$.
2. Démontrer que le triangle ADC est rectangle en D.

On admet que le triangle ABC est rectangle en B.

3. Calculer l'aire du champ $ABCD$.
4. Jean-Michel veut clôturer son champ avec du grillage. Il se rend chez son commerçant habituel et tombe sur l'annonce suivante :

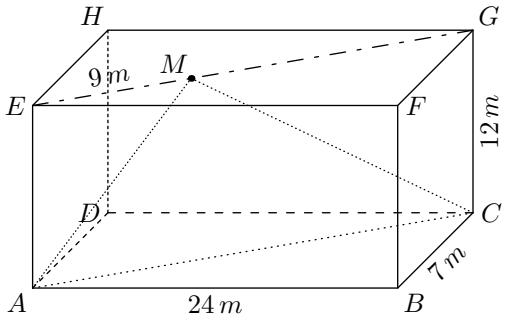
   Grillage : 0,85 € par mètre.

   Combien va-t-il payer pour clôturer son champ?

9. *Théorème/réciproque de Pythagore dans l'espace*

E.20 On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous et dont les mesures suivantes sont données :

$AB = 24\,m$; $BC = 7\,m$; $CG = 12\,m$

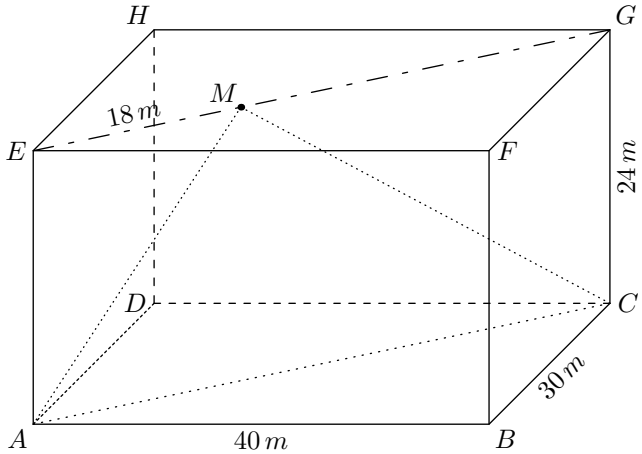


Le point M appartient à la diagonale $[EG]$ du rectangle $EFGH$ et tel que : $EM = 9\,m$

1. a. Dans le triangle EMA rectangle en E, déterminer la mesure du segment $[AM]$.
   b. Dans le triangle ABC rectangle en B, déterminer la mesure du segment $[AC]$.
   c. Dans le triangle MGC rectangle en G, déterminer la mesure du segment $[MC]$.
2. En déduire que le triangle ACM est rectangle en M.

E.21 On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous et dont les mesures suivantes sont données :

$AB = 40\,m$; $BC = 30\,m$; $CG = 24\,m$

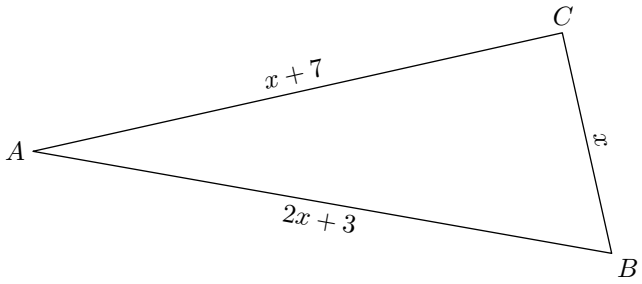


Le point M appartient à la diagonale $[EG]$ du rectangle $EFGH$ et tel que : $EM = 18\,m$

1. Établir que : $MA = 30\,m$
2. Établir que : $MG =$
3. En déduire que le triangle ACM est rectangle en M.

10. *Expressions littérales*

E.22 On considère le triangle ABC représenté ci-dessous où les longueurs sont données en fonction de l'indéterminé x :



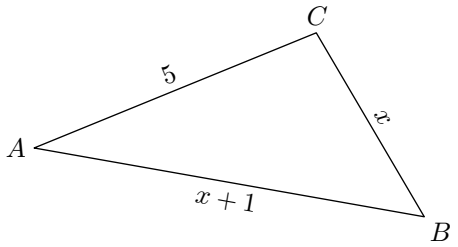
1. Justifier que, pour $x = 5$, le triangle ABC est un triangle

 CC BY-NC

rectangle en C.

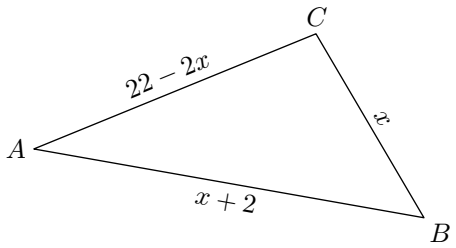
2. Le triangle ABC est-il rectangle lorsque $x=4$

E.23 On considère le triangle ABC représenté ci-dessous où certaines de ses longueurs sont exprimées en fonction d'une valeur indéterminée notée x :



1. Montrer que pour $x=12$, le triangle ABC est un triangle rectangle en C.
2. Justifier que le triangle ABC est rectangle pour $x=3$.
3. Le triangle ABC est-il rectangle pour $x=8$?

E.24 On considère le triangle ABC représenté ci-dessous où certaines de ses longueurs sont exprimées en fonction d'une valeur indéterminée notée x :



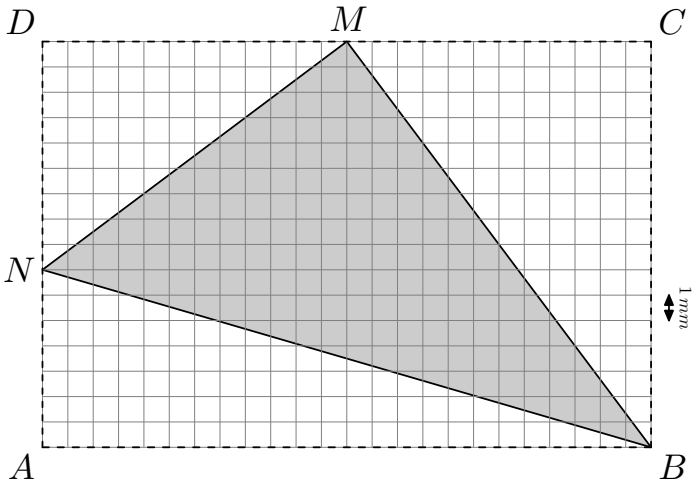
1. Montrer que pour $x=8$, le triangle ABC est un triangle rectangle en C.
2. Justifier que le triangle ABC est rectangle pour $x=6$.
3. Le triangle ABC est-il rectangle pour $x=7$.

11. *Partage*

E.25

1. On considère un rectangle $ABCD$ ayant pour mesure :
   $AB = 24\,mm$; $AD = 16\,mm$

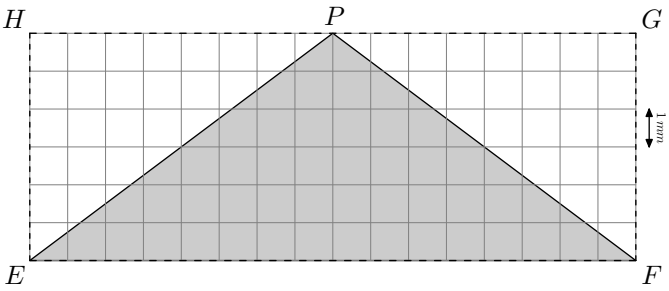
   On place les points M et n, appartenant respectivement aux segments $[CD]$ et $[AD]$, tels que représentés ci-dessous :



   a. Montrer que : $MN=15\,mm$
   b. On admet les mesures suivantes :
      $MB=20\,mm$; $BN = 25\,mm$
      Quelle est la nature du triangle MNB? Justifier.

2. On considère un rectangle $EFGH$ ayant pour mesure :
   $EF = 16\,mm$; $EH = 6\,mm$

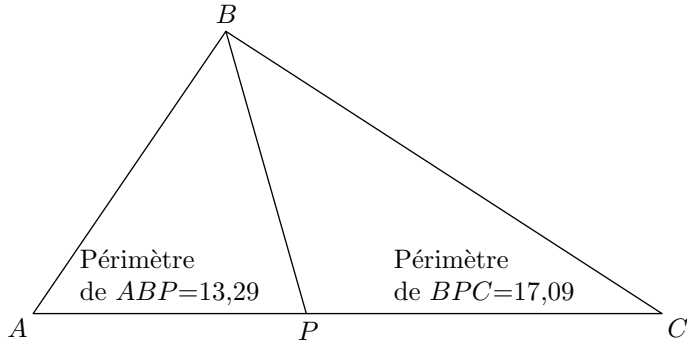
   On considère le point P tel que $HP = 8\,mm$. Cette figure est représentée ci-dessous :



   Justifier que le triangle EFP n'est pas un triangle rectangle.

12. *Exercices non-classés*

E.26 ABC est un triangle tel que :
$AB = 5\,cm$; $BC = 7{,}6\,cm$; $AC = 9{,}2\,cm$



1. Tracer ce triangle en vraie grandeur.
2. ABC est-il un triangle rectangle?
3. Avec un logiciel, on a construit ce triangle, puis :
   - on a placé un point P mobile sur le côté $[AC]$;
   - on a tracé les triangles ABP et BPC ;
   - on a affiché le périmètre de ces deux triangles.

   a. On déplace le point P sur le segment $[AC]$.
   Où faut-il le placer pour que la distance BP soit la plus petite possible?

   b. On place maintenant le point P à $5\,cm$ de A.
   Lequel des triangles ABP et BPC a le plus grand

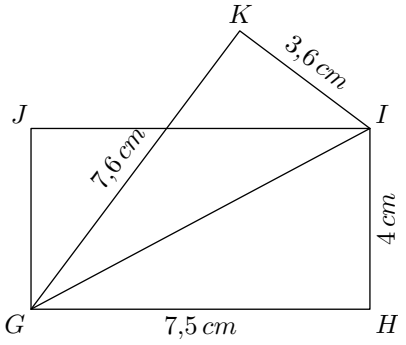
 CC BY-NC

périmètre?

c On déplace à nouveau le point P sur le segment $[AC]$. Où faut-il le placer pour que les deux triangles ABP et BPC aient le même périmètre?

E.27 On considère la figure représentée ci-dessous où le quadrilatère $GHIJ$ est un rectangle. On donne les mesures suivantes :

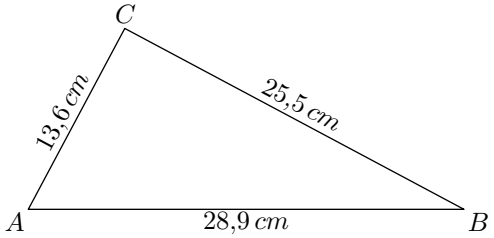
$GH = 7{,}5\,cm$; $HI = 4\,cm$; $IK = 3{,}6\,cm$; $GK = 7{,}6\,cm$



Le triangle GKI est-il un triangle rectangle? Justifier votre réponse.

E.28 On considère le triangle ABC représenté ci-dessous et dont on connait les mesures :

$AB = 13{,}6\,cm$; $AC = 28{,}9\,cm$; $BC = 25{,}5\,cm$



Montrer que la hauteur du triangle ABC issue du sommet C mesure $12\,cm$.

CC BY-NC