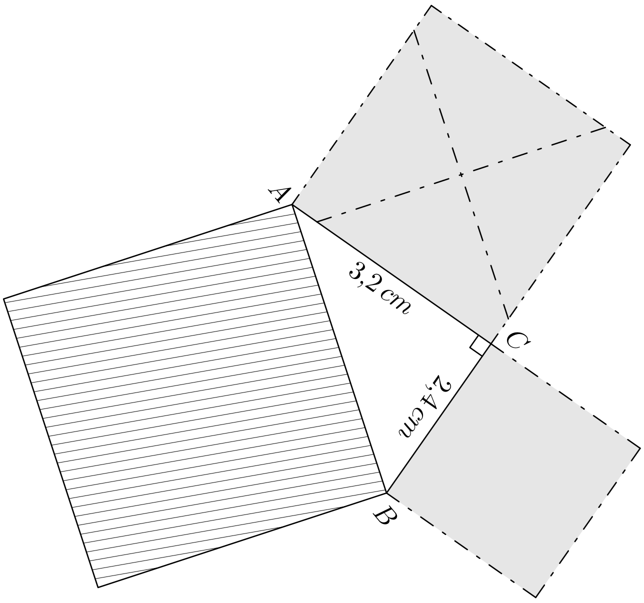
Quatrième / Théorème de Pythagore

ChingEval : 11 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. *Situations problèmes*

E.1 Ci-dessous, sont construits, extérieurement au triangle ABC, les carrés dont les côtés sont ceux du triangle ABC :



On admet que le découpage proposé des deux carrés grisés de côtés $[AC]$ et $[BC]$ permet d'effectuer un recouvrement parfait du carré hachuré ayant pour côté $[AB]$.

Déterminer la mesure exacte du segment $[AB]$.

Illustration : La vidéo suivante présente l'utilisation d'un tel découpage. r225-11

2. *Introduction à la racine carré*

E.2

Définition : pour un nombre a quelconque, on appelle **carré du nombre *a*** le nombre obtenu par la multiplication du nombre a par lui-même. On note ce nombre a^2.

Exemples : $3^2 = 9$; $7^2 = 49$

Compléter les affirmations ci-dessous :

(a) Le carré du nombre 4 est ......

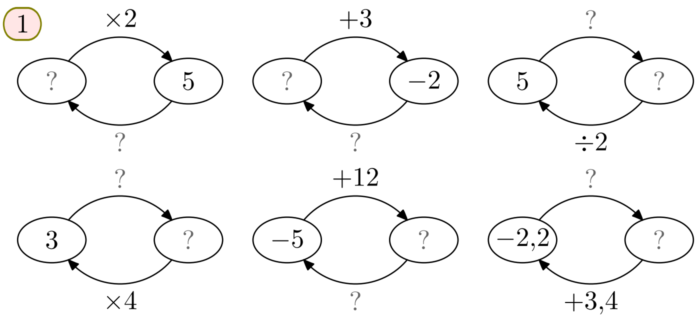
(b) Le nombre ...... a pour carré 36

(c) Le carré du nombre 7 est ......

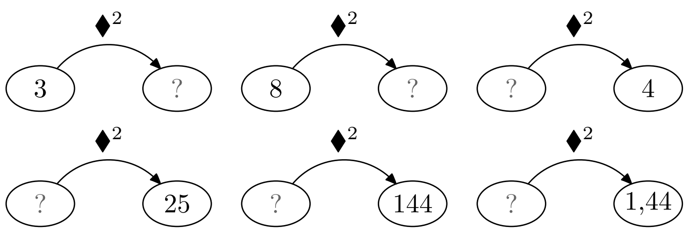
(d) Le nombre ...... a pour carré 16

E.3 Pour chaque question, on complétera en ajoutant le nombre et/ou l'opération manquante.

(1)



(2) L'opération marquée $\blacklozenge^2$ représente le carré de $\blacklozenge$.



Définition : soit a un nombre positif ou nul.
On appelle **racine carrée de *a*** l'unique nombre positif dont le carré vaut a. On note ce nombre $\sqrt{a}$.

Exemples : *(en lien avec l'exercice précédent)* :

- Le nombre dont le carré vaut 9 est 3 :
- $\sqrt{64} = 8$
- $\sqrt{4} = 2$
- $\sqrt{25} = 5$
- $\sqrt{144} = 12$
- $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$

E.4 Dire si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses :

1. Le carré du nombre 5 est 10.
2. La racine carrée du nombre 3 est 9.
3. Le nombre 25 a pour racine carrée 5.
4. La racine carrée du nombre 1 000 a pour valeur 100.

E.5 Compléter les affirmations ci-dessous :

1. La racine carrée du nombre 81 est ......
2. Le nombre 4 est la racine carrée du nombre ......
3. La racine carrée du nombre 0 a pour valeur ......
4. Le carré du nombre 3 a pour racine carrée ......

E.6 Donner la valeur de la somme :

- de la racine carrée de 25
- et du carré de (-2)

Indication *: on indiquera également la valeur de ces deux termes*

3. *Triplets pythagoriciens*

E.7 Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, on souhaite de déterminer la valeur du nombre positif c vérifiant la relation suivante : $a^2 + b^2 = c^2$

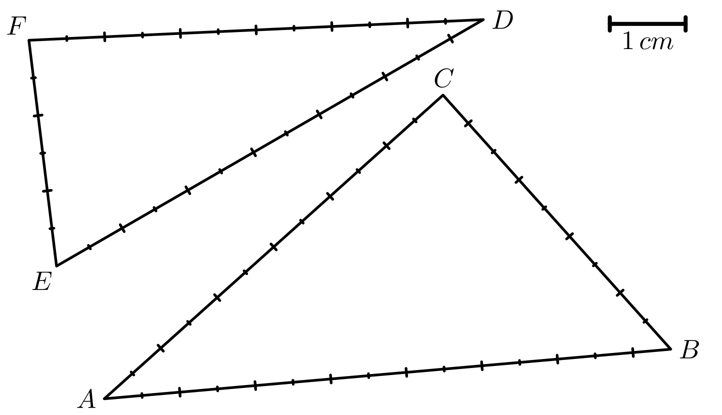
a	b	c	a^2	b^2	$a^2+b^2=c^2$
4		5			
	8	17			
12		13			
	30	50			

E.8 Vérifier si les nombres a, b, c forment un triplet pythagoricien. Si c'est le cas, écrire dans la dernière colonne l'égalité trouvée :

a	b	c	a^2	b^2	c^2	Egalité trouvée
3	5	4				
27	36	45				
6,5	3,3	5,6				
16	10	20				
3,5	9,1	8,4				
10	2	10,1				

4. *Introduction au théorème de Pythagore*

E.9 On considère les deux triangles ABC et DEF représentés ci-dessous :



Une graduation par demi-unité est apportée sur les côtés de ces triangles.

1. a. En prenant les mesures de ces triangles, compléter le tableau ci-dessous :

	AB	BC	AC	ED	DF	EF
x						
x^2						

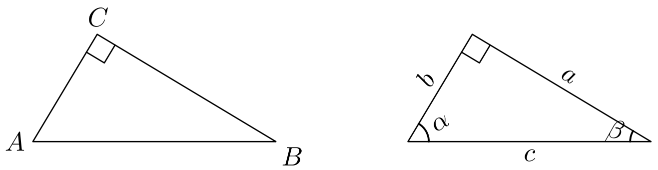
   b. Pour chacun des triangles, vérifier si les longueurs de leurs côtés définissent un triplet pythagoricien.

2. a. Vérifier, à l'aide de l'équerre, si les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{DFE}$ sont des angles droits.

   b. Effectuer une conjecture entre la nature du triangle et la nature du triplet des longueurs du triangle.

Définition :
une **conjecture** est une proposition faite, ou la conséquence d'une observation, qui est ***supposée vraie*** mais pour laquelle on n'a ***aucune preuve***.

E.10 On considère le triangle ABC rectangle en C représenté ci-dessous :



dont les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$ ont respectivement pour mesure b, a, c. On note α et β les mesures respectives des angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CBA}$.

À partir du triangle ABC, on construit un carré de côté $a+b$ représenté dans la figure 1.

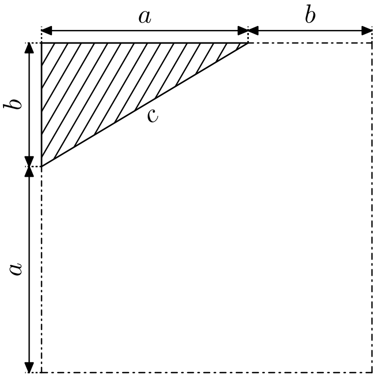


Figure 1

Puis, on utilise 4 triangles identiques au triangle ABC pour produire, à chaque fois, les figures 2 et 3

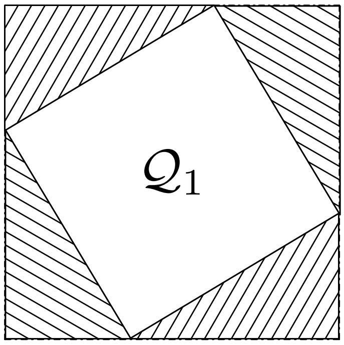


Figure 2

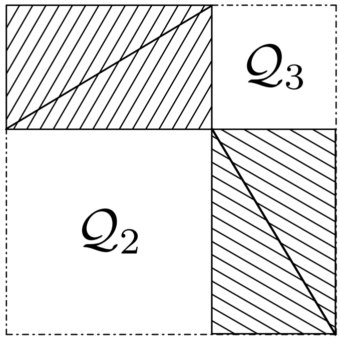
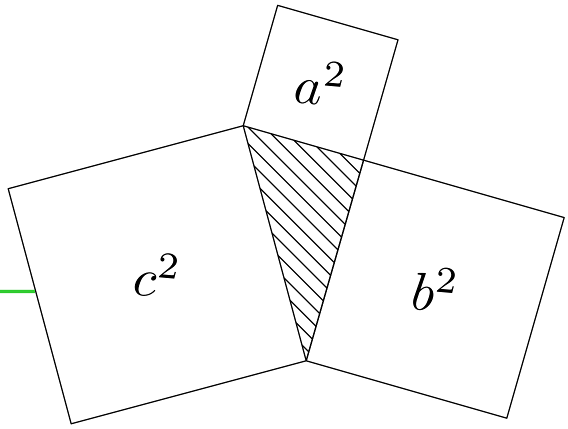


Figure 3

Ces deux figures permettent de définir les trois quadrilatères $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ et $\mathcal{Q}_3$ représentés ci-dessus.

1. Justifier que les quadrilatères $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_3$ sont des carrés de côté mesurant respectivement c, a et b.

2. Ci-dessous est représenté le triangle ABC sur lequel a été construit à l'extérieur un carré à partir de chacun de ses côtés. À l'intérieur de chacun de ces carrés, est notée leurs aires.



Justifier l'égalité : $a^2+b^2=c^2$

Le théorème de Pythagore peut être démontré de plusieurs manières. En voici l'une d'elle :

r536-0

r536-0

5. *Théorème de Pythagore et chaînons déductifs*

E.11

Théorème de Pythagore :
Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypothènuse est égale à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Définition : Soit ABC est un triangle rectangle en A. On appelle **égalité du théorème de Pythagore dans le triangle *ABC*** la relation : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Remarque : dans l'égalité de Pythogore, précédente le côté $[BC]$ est l'hypoténuse du triangle rectangle ABC. C'est aussi le plus grand côté de ce triangle.

On considère le triangle ABC rectangle en C et vérifiant :
$CA = 6\,m$; $CB = 1{,}1\,m$

À l'aide du chaînon déductif ci-dessous déterminer la mesure du côté $[AB]$:

Chaînons déductifs

Je sais	
J'utilise	D'après le théorème de Pythagore
J'en déduis	$\quad^2 = \quad^2 + \quad^2$

Calculs
$^2 = ^2 + ^2$
$ = + $
$AB^2 =$
$AB = \sqrt{}$
$AB =$

Calculs
$^2 = ^2 + ^2$
$ = + $
$^2 = - $
$DE^2 =$
$DE = \sqrt{}$
$DE =$

E.12 On considère le triangle DEF rectangle en D et vérifiant :

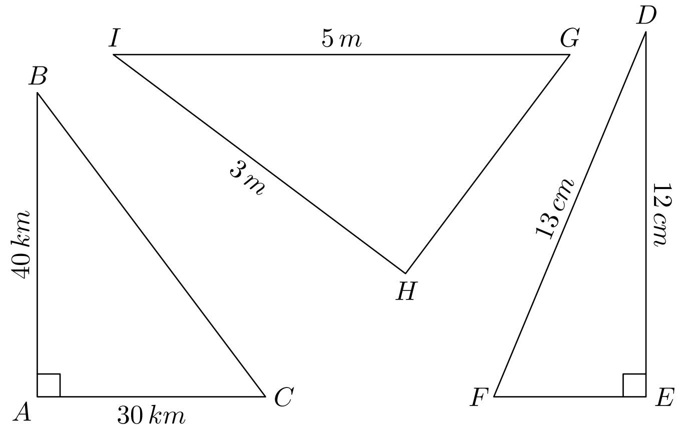
$EF = 5\,m$; $DF = 4{,}8\,m$

À l'aide des chaînons déductifs ci-dessous déterminer la mesure du côté $[DE]$:

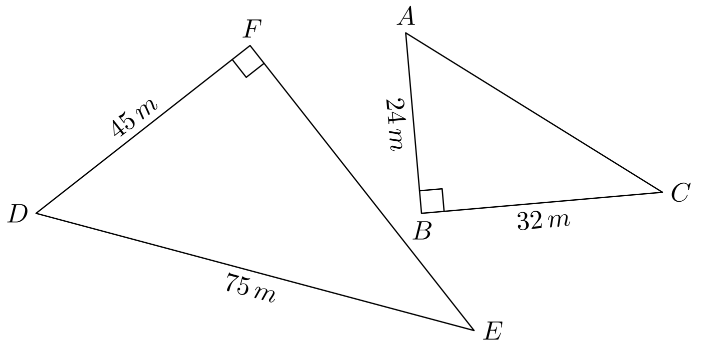
Chaînons déductifs	
Je sais	
J'utilise	D'après le théorème de Pythagore
J'en déduis	$^2 = ^2 + ^2$

6. *Théorème de Pythagore*

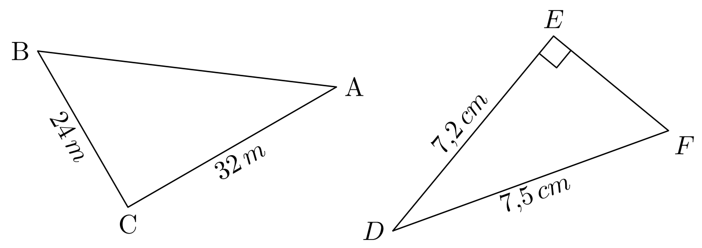
E.13 Pour chaque triangle, déterminer, si possible, la longueur inconnue.



E.14 Dans chacun des triangles ci-dessous, déterminer la longueur inconnue.



E.15 Pour chaque triangle et si cela est possible, déterminer la longueur inconnue.

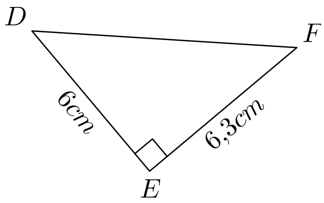


E.16

On considère le triangle DEF rectangle en E tel que :

$DE = 6\,cm$; $EF = 6{,}3\,cm$

Déterminer la mesure du côté $[DF]$.

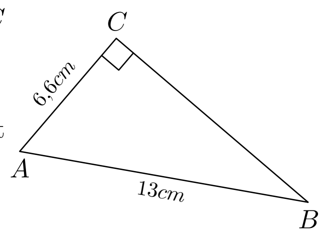


E.17

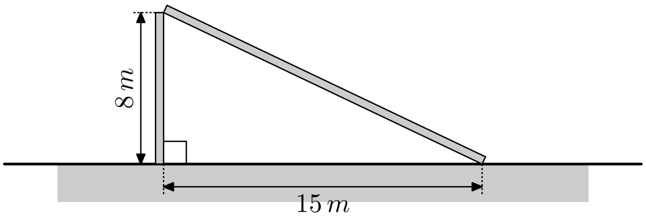
On considère le triangle ABC rectangle en C tel que :

$AB = 13\,cm$; $AC = 6{,}6\,cm$

Déterminer la mesure du segment $[BC]$.

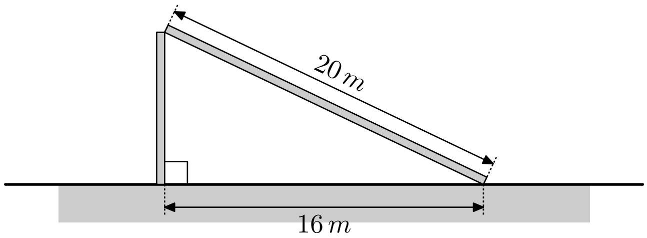


E.18 À la suite d'une tornade, un poteau en bois s'est brisé. Ci-dessous est représenté ce poteau brisé :



Déterminer la hauteur du poteau avant la tornade.

E.19 À la suite d'une tornade, un poteau en bois s'est brisé. Ci-dessous est représenté ce poteau brisé :



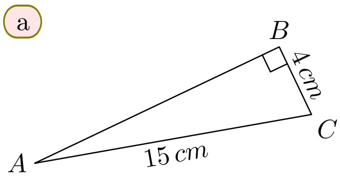
Déterminer la hauteur du poteau avant la tornade.

7. *Valeurs approchées*

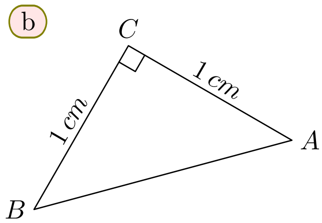
E.20 *Les figures ne sont pas dessinés aux dimensions réelles.*

Pour chacun des triangles, déterminer la longueur du segment $[AB]$, au dixième de centimètre près :

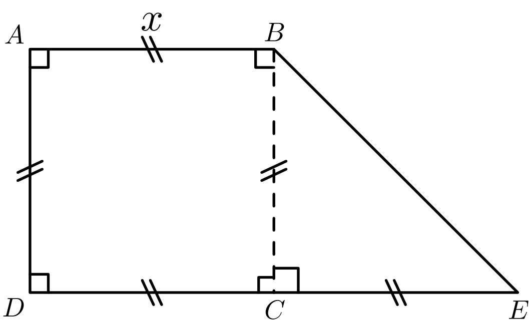
a



b

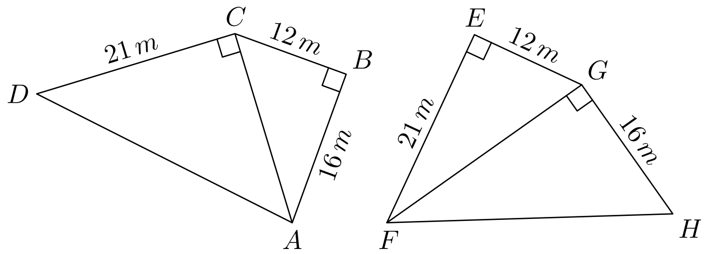


E.21 On considère le polygone $ABECD$ représentant le champ d'un agriculteur :



Déterminer la longueur de la clôture de ces champs, arrondie au mètre près, lorsque $x = 30\,m$.

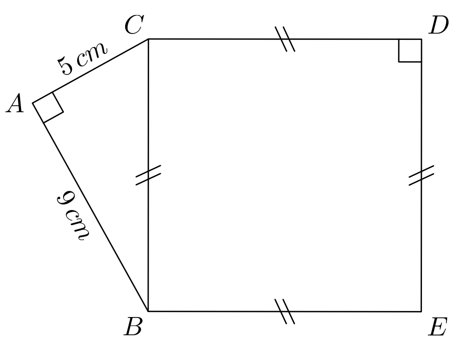
E.22 On considère la figure ci-dessous où les triangles ABC, CDA, EFG et GFH sont des triangles rectangles :



Établir que les segments $[AD]$ et $[FH]$ sont de même longueur.

8. *Aires*

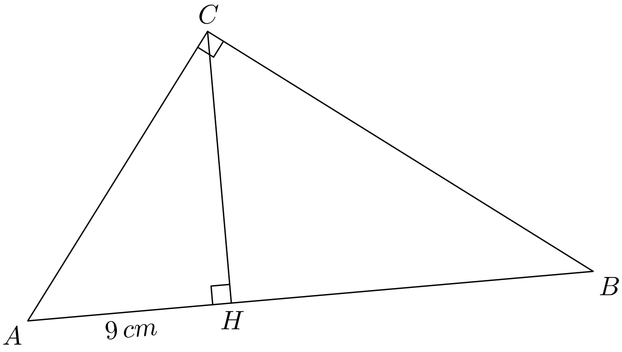
E.23 La figure ci-dessous représente un triangle rectangle ABC en A et un quadrilatère $BCDE$.



1. Déterminer la longueur du segment $[BC]$ au millimètre près.
2. a. Quelle est la nature du quadrilatère $BCDE$? Justifier votre réponse.
   b. Déterminer l'aire du quadrilatère $BCDE$.
   c. Déterminer le périmètre du polygone $ABEDC$ au millimètre près.

E.24 On considère le triangle ABC rectangle en C et le point H pied de la hauteur issue du sommet C.
On possède les informations suivantes :

- le segment $[AH]$ mesure $9\,cm$;
- on a les aires des deux triangles suivants :
  $\mathcal{A}_{ACH} = 54\,cm^2$; $\mathcal{A}_{ABC} = 150\,cm^2$



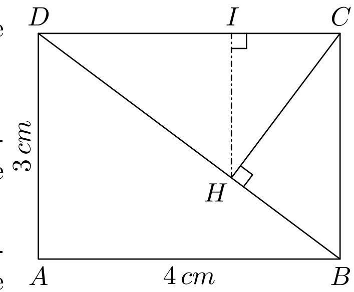
1. Déterminer la mesure du segment $[CH]$.
2. Déterminer la mesure du segment $[BC]$.

E.25

On considère le rectangle $ABCD$ tel que :
$AB = 4\,cm$; $AD = 3\,cm$

On note H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle DCB.

On note I le pied de la hauteur issue de H dans le triangle DCH.

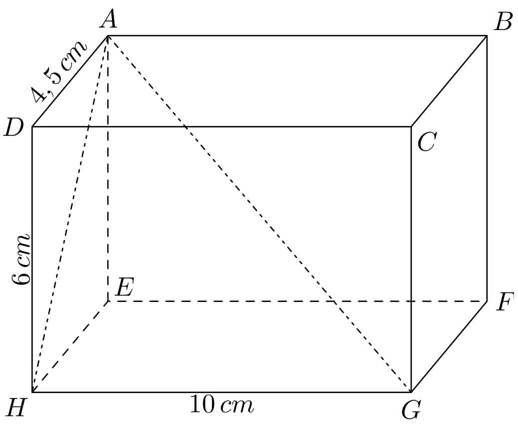


1. a) Déterminer la mesure du segment $[DB]$.
   b) Déterminer la mesure de l'aire du triangle DCB.
   c) En déduire que le segment $[CH]$ a pour mesure $2{,}4\,cm$.
2. Déterminer la mesure du segment $[HB]$.
3. a) En déduire la mesure du segment $[DH]$.
   b) Déterminer l'aire du triangle DCH.
   c) En déduire la mesure du segment $[IH]$.

1^2=1	$1{,}1^2$=1,21	$1{,}2^2$=1,44	$1{,}3^2$=1,69	$1{,}4^2$=1,96
$1{,}5^2$=2,25	$1{,}6^2$=2,56	$1{,}7^2$=2,89	$1{,}8^2$=3,24	$1{,}9^2$=3,61
2^2=4	$2{,}1^2$=4,41	$2{,}2^2$=4,84	$2{,}3^2$=5,29	$2{,}4^2$=5,76
$2{,}5^2$=6,25	$2{,}6^2$=6,76	$2{,}7^2$=7,29	$2{,}8^2$=7,84	$2{,}9^2$=8,41
3^2=9	$3{,}1^2$=9,61	$3{,}2^2$=10,24	$3{,}3^2$=10,89	$3{,}4^2$=11,56
$3{,}5^2$=12,25	$3{,}6^2$=12,96	$3{,}7^2$=13,69	$3{,}8^2$=14,44	$3{,}9^2$=15,21

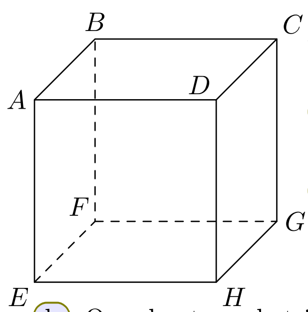
9. *Géométrie dans l'espace*

E.26 On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous dont on connait les mesures suivantes :
$HG = 10\,cm$; $HD = 6\,cm$; $DA = 4{,}5\,cm$



1. a) Quelle est la nature du triangle ADH?
   b) Dessiner en vraie grandeur le triangle ADH.
   c) Déterminer la valeur exacte de la longueur AH.
2. a) Quelle est la nature du triangle AHG?
   b) Dessiner en vraie grandeur le triangle AHG.
   c) Déterminer la valeur exacte de la longueur AG.

E.27

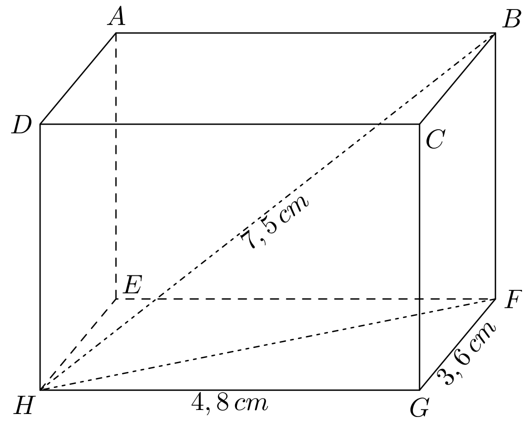


$ABCDEFGH$ est un cube de $3\,cm$ d'arête.

1. Calculer la longueur de $[AH]$ au millimètre près.
2. a) Sans justification, donner la nature du quadrilatère $ABGH$?
   b) On admet que le triangle BAH est un triangle rectangle. Calculer la longueur de $[AG]$ au millimètre près.

E.28 On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous dont on connait les mesures suivantes :

$HG = 4{,}8\,cm$; $FG = 3{,}6\,cm$; $HB = 7{,}5\,cm$

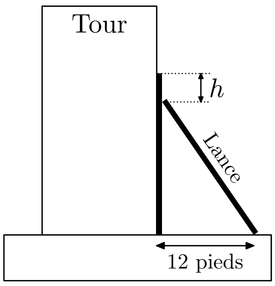


Déterminer la mesure exacte de la hauteur $[FB]$ de ce parallélépipède rectangle.

10. *Problèmes ouverts*

E.29

A Pise vers 1200 après J.C. *(problème attribué à Léonard de Pise, dit Fibonacci, mathématicien italien du moyen âge).*



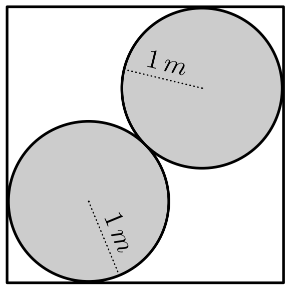
Une lance, longue de 20 pieds*, est posée verticalement le long d'une tour considérée comme perpendiculaire au sol. Si on éloigne l'extrémité de la lance qui repose sur le sol de 12 pieds de la tour,

de combien descend l'autre extrémité de la lance le long du mur?

* *Un pied est une unité de mesure anglo-saxonne valant environ* $30\,cm$

E.30

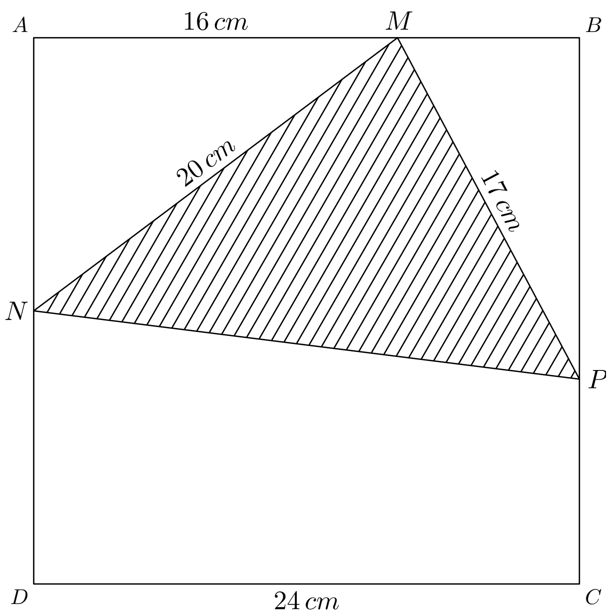
Ci-contre, deux cercles se situent à l'intérieur d'un carré. Ils sont tangents entre eux et sont chacun tangent à deux côtés de la boite.



Déterminer la longueur de la diagonale de ce carré.

11. *Exercices non-classés*

E.31 On considère le carré $ABCD$ représenté ci-dessous de côté $24\,cm$



On considère les points M, N, P appartenant respectivement aux côtés $[AB]$, $[AD]$, $[BC]$ et vérifiant les mesures :

$AM = 16\,cm$; $MN = 20\,cm$; $MP = 17\,cm$

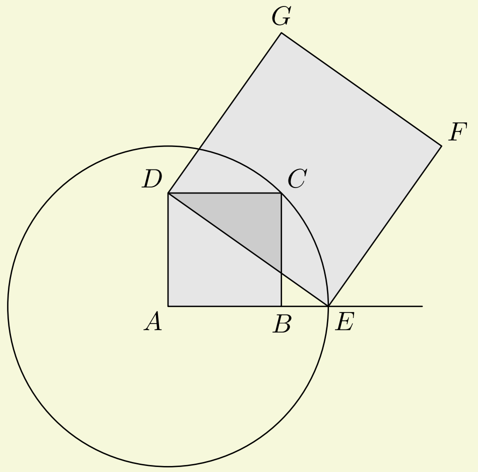
Déterminer l'aire du triangle MNP.

E.32 Avec un logiciel de géométrie, on exécute le programme ci-dessous.

Programme de construction :

- Construire un carré $ABCD$;
- Tracer le cercle de centre A et de rayon $[AC]$;
- Placer le point E à l'intersection du cercle et de la demi-droite $[AB)$;
- Construire un carré $DEFG$.

Figure obtenue :



1. Sur la copie, réaliser la construction avec $AB = 3\,cm$.
2. Dans cette question, $AB = 10\,cm$.
   a. Montrer que : $AC = \sqrt{200}\,cm$
   b. Expliquer pourquoi : $AE = \sqrt{200}\,cm$
   c. Montrer que l'aire du carré $DEFG$ est le triple de l'aire du carré $ABCD$.
3. On admet pour cette question que pour n'importe quelle longueur du côté $[AB]$, l'aire du carré $DEFG$ est toujours le triple de l'aire du carré $ABCD$.
   En exécutant ce programme de construction, on souhaite obtenir un carré $DEFG$ ayant une aire de $48\,cm^2$.
   Quelle longueur AB faut-il choisir au départ?