Quatrième / Théorème de Thalès

ChingEval : 9 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. *Produit en croix*

E.1

Proposition : *(du produit en croix)*
Soit quatre nombres a, b, c, d quatre nombres avec $b\neq 0$ et $d\neq 0$, Si on a l'égalité des rapports $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ alors on a l'égalité des produits $a\times d=b\times c$.

On note : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Longrightarrow \quad a\times d=b\times c$

Pour chaque question, donner l'écriture décimale du nombre x vérifiant l'égalité :

a) $\frac{2}{5}=\frac{x}{4}$ b) $\frac{3}{x}=\frac{12}{5}$ c) $\frac{x}{14}=\frac{5}{8}$ d) $\frac{5}{6}=\frac{x}{24}$

E.2 Dans chaque cas, trouver la longueur AB vérifiant l'égalité et donner sa valeur sous la forme d'une fraction simplifiée :

a) $\frac{AB}{3}=\frac{5}{9}$ b) $\frac{2}{AB}=\frac{7}{3}$ c) $\frac{5}{8}=\frac{8}{AB}$ d) $\frac{AB}{3}=\frac{8}{9}$

2. *Introduction au théorème de Thalès*

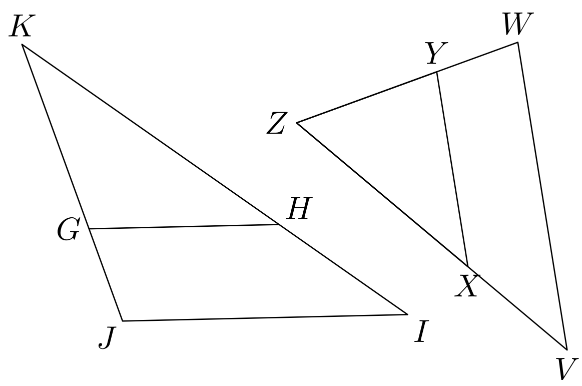
E.3

Théorème de Thalès :
Si les points A, B, M sont alignés, les points A, C, N sont alignés et si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

Remarque : l'égalité des quotients de longueurs traduit la proportionnalité des longueurs entre les triangles "*emboités*" lorsque deux de leurs côtés sont parallèles.

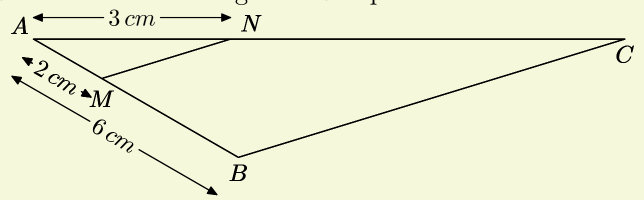
Nous avons représenté deux configurations de Thalès où $(GH)/\!/(IJ)$ et $(XY)/\!/(VW)$.



Pour chacun de ces triangles, écrire l'égalité des quotients obtenue par l'utilisation du théorème de Thalès.

E.4

Exemple commenté :
On considère le triangle ABC représenté ci-dessous :



Les points M et N appartiennent respectivement au segment $[AB]$ et $[AC]$ et sont tels que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Chaînons déductifs	
Je sais	Les points A, M, B sont alignés. Les points A, N, C sont alignés. $(MN)/\!/(BC)$
J'utilise	D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité des quotients :
J'en déduis	$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

On a l'application numérique :

$$\frac{2}{6}=\frac{3}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

Nous utiliserons l'égalité :

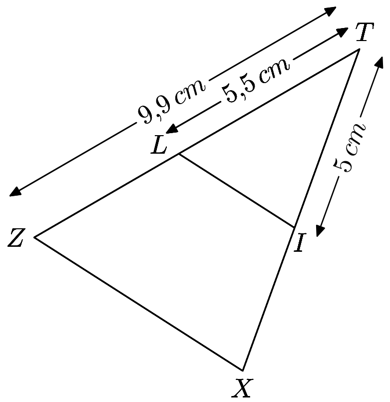
$$\frac{2}{6}=\frac{3}{AC}$$

D'après le produit en croix, on a :

$$2\times AC=6\times 3$$
$$2\times AC=18$$
$$AC=\frac{18}{2}$$
$$AC=9\,cm$$

On considère le triangle TXZ représenté ci-dessous et les points L et I appartenant respectivement aux segments $[TZ]$

et $[TX]$ tels que $(IL)//(XZ)$.



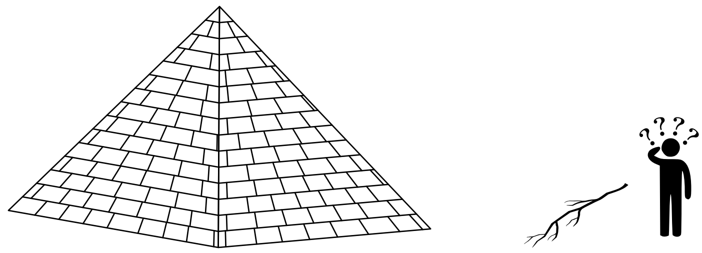
(1) Compléter le chainon déductif ci-dessous :

Chaînons déductifs		
	Je sais	Les points …, …, … sont alignés. Les points …, …, … sont alignés. … // …
	J'utilise	D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité des quotients :
	J'en déduis	—— = —— = ——

(2) Utiliser l'égalité des quotients de la question (2) pour déterminer la mesure du segment $[TX]$.

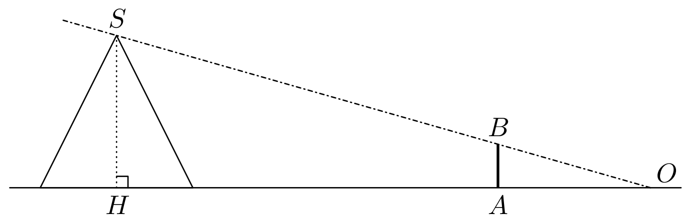
E.5

Thalès de Milet vécut en Asie mineure de 625 à 547 avant J.-C. environ. Selon la tradition, il serait le premier mathématicien grec. Un théorème de la théorie des triangles porte son nom. Il aurait appliqué les principes géométriques à la mesure de la hauteur des pyramides et des distances en mer.
Universalis.fr



Pour mesurer la hauteur de la pyramide Khéops, la légende dit que la première forme du théorème de Thalès de Milet aurait été : "*le rapport de la hauteur de mon bâton par celle de la pyramide est égal au rapport de l'ombre portée par mon bâton par celle portée par la pyramide*".

En déplaçant le bâton et en le plantant "*droit*", voici le schéma *(qui n'est pas représenté en vraie grandeur)* qu'il aurait utilisé pour mesure la pyramide :



Le segment $[SH]$ représente la hauteur de la pyramide, $[AB]$ le bâton planté droit, $[HO]$ l'ombre portée par la pyramide et $[AO]$ celle du bâton.

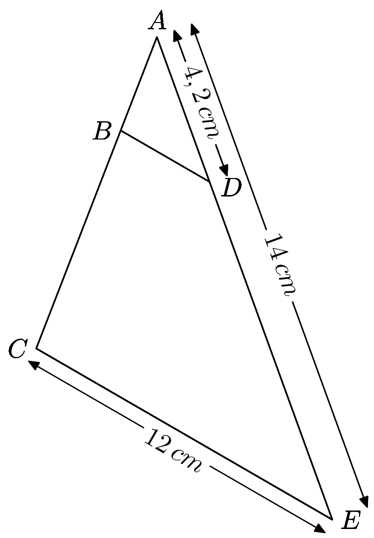
On donne les mesures suivantes :

$OH = 300\,m$; $OA = 3{,}1\,m$; $AB = 1{,}5\,m$

Comme Thalès de Millet, déterminer la hauteur de la pyramide de Khéops arrondie au mètre près.

3. *Théorème de Thalès*

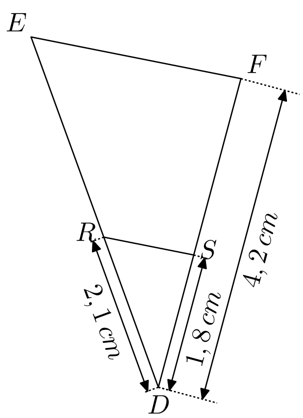
E.6 Dans le triangle ACE, la droite (BD) est parallèle à (CE). Déterminer la mesure du segment $[BD]$.



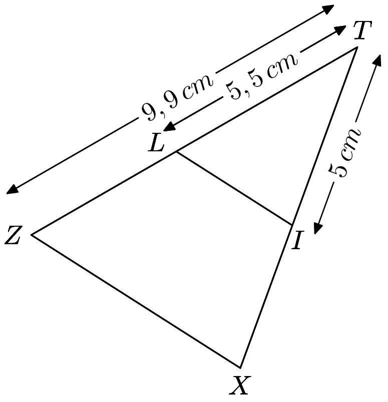
E.7

Dans le triangle DEF, les droites (EF) et (RS) sont parallèles entre elles.

Déterminer la mesure du segment $[ER]$.



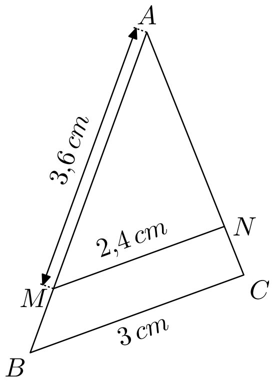
E.8 Dans le triangle TXZ, les droites (IL) et (XZ) sont parallèles entre elles. Déterminer la mesure du segment $[TX]$.



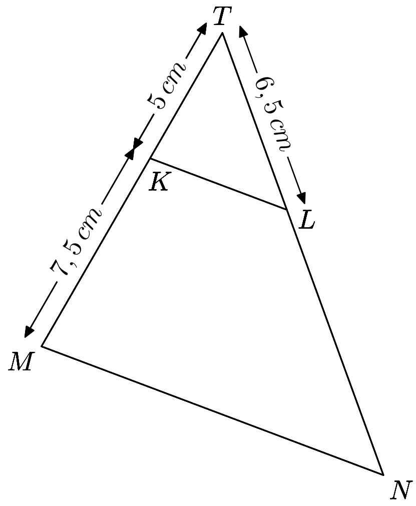
E.9

Dans le triangle ABC, les droites (MN) et (BC) sont parallèles entre elles.

Déterminer la mesure du segment $[MB]$.



E.10 Dans le triangle TMN, la droite (KL) est parallèle à (MN). Déterminer la mesure du segment $[TN]$.



E.11

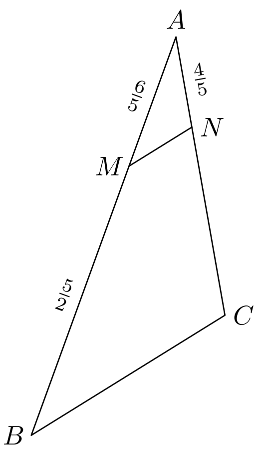
1. Construire le triangle ABC tel que :
   $AB = 7{,}5\,cm$; $BC = 10\,cm$; $AC = 12{,}5\,cm$.
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
3. a. M est un point du segment $[BC]$ tel que $BM = 4\,cm$.
   Placer le point M et construire la droite (d) parallèle à la droite (AC) passant par M.
   La droite (d) coupe $[AB]$ au point N.

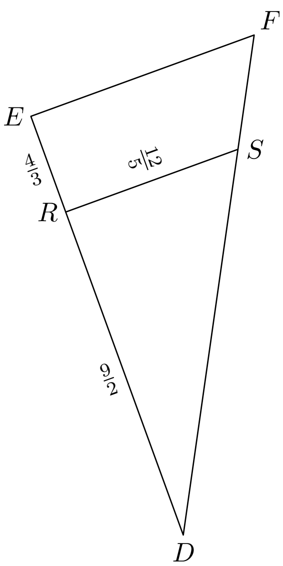
   b. Calculer BN et MN.

4. *Théorème de Thalès et fractions*

E.12

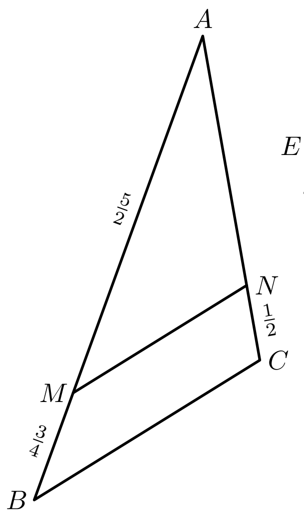
1. Dans le triangle ABC, les droites (MN) et (BC) sont parallèles entre elles. Déterminer la mesure du segment $[AC]$.
2. Dans le triangle DEF, les droites (RS) et (EF) sont parallèles entre elles. Déterminer la mesure du segment $[EF]$.

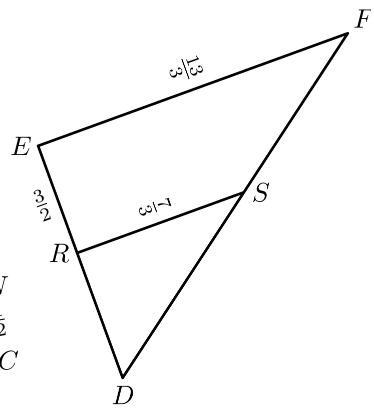




E.13

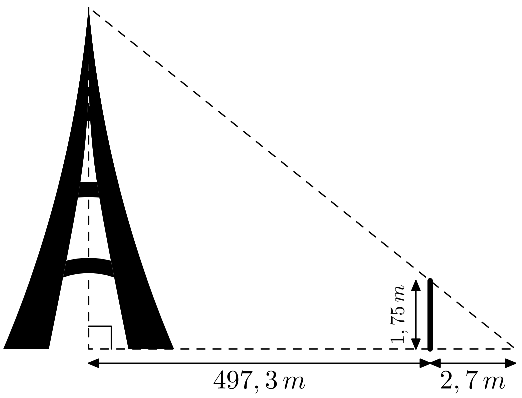
1. Dans le triangle ABC, les droites (MN) et (BC) sont parallèles entre elles. Déterminer la mesure du segment $[AN]$.
2. Dans le triangle DEF, les droites (RS) et (EF) sont parallèles entre elles. Déterminer la mesure du segment $[DR]$.





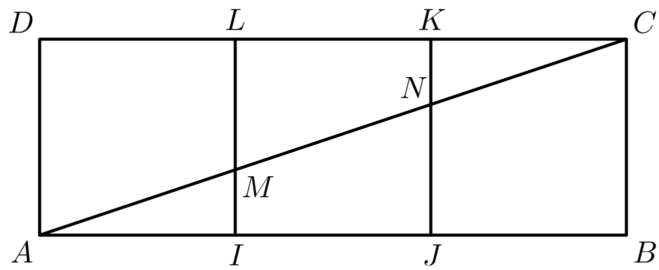
5. *Problèmes autour du théorème de Thalès*

E.14 Un homme mesurant 1,75 m se tenant droit aux alentours de la tour Eiffel se place de sorte que l'ombre lui passe juste au-dessus de la tête. Son ombre tombe à 2,7 m de lui et celle-ci se trouve à 500m du centre de la tour Eiffel.



Quelle est la hauteur de la tour Eiffel? *(arrondie au mètre près)*

E.15 Soit a un nombre positif non-nul. On considère le rectangle $ABCD$ de longueur $3a$ et de largeur a ; on partage ce rectangle en trois carrées de même mesure :

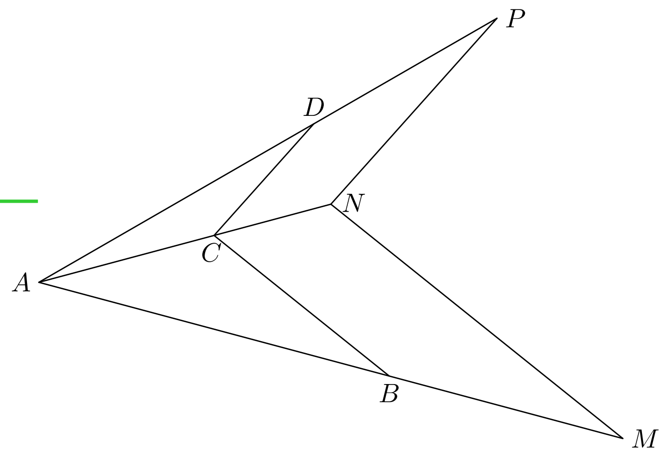


1. Démontrer l'égalité : $IM = KN$.
2. Comment peut-on partager le rectangle $ABCD$ en neuf rectangles tous identiques?

6. *Double application du théorème de Thalès*

E.16 Soit A, M, N, P quatre points du plan non-alignés tels que :

- Les points B, C et D appartiennent respectivement aux segments $[AM]$, $[AN]$, $[AP]$.
- Les droites (BC) et (MN) sont parallèles, ainsi que les droites (CD) et (NP).

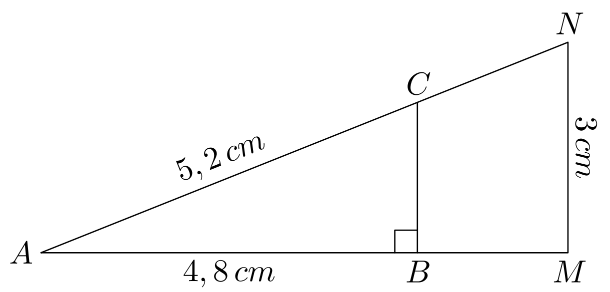


1. Justifier l'égalité des deux rapports $\dfrac{AB}{AM}$ et $\dfrac{CD}{NP}$.
2. On donne les mesures suivantes :
   $AM = 3\,cm$; $AB = 1{,}2\,cm$; $PN = 1{,}8\,cm$

   Déduire de la question précédente la mesure du segment $[CD]$.

7. *Théorème de Thalès et autres théorèmes*

E.17 Dans le plan, on considère la configuration ci-dessous :

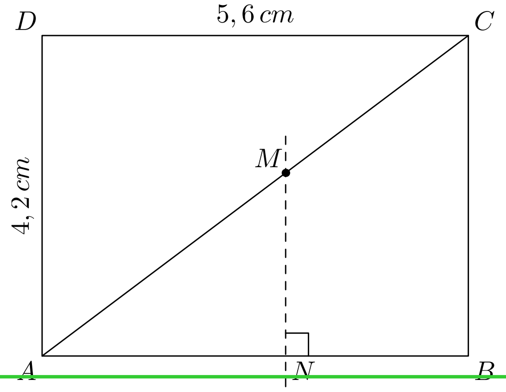


Voici les propriétés de la figure :

- Le point C appartient à la droite $[AN]$;
- le point B appartient à la droite $[AM]$;
- le triangle ABC est un triangle rectangle en B ;
- les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

1. Déterminer la mesure du segment $[BC]$.
2. (a) Déterminer la longueur du segment $[AN]$.
   (b) Donner la longueur du segment $[AM]$.

E.18 On considère le rectangle $ABCD$ de longueur 5,6 cm et de largeur 4,2 cm.

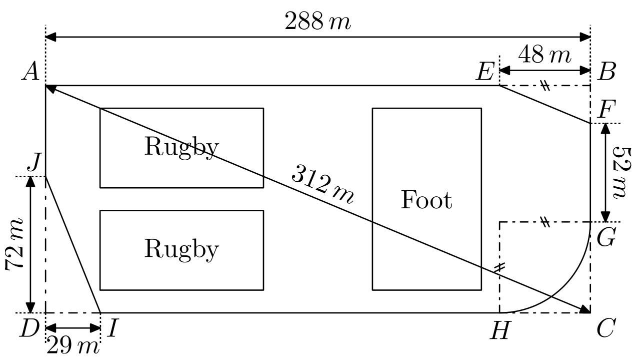


Le point M appartient au segment $[AC]$ tel que $AM = 4\,cm$. La droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point M intercepte le segment (AB) au point N.

1. Justifier que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
2. Déterminer la valeur de la longueur AC.
3. Déterminer la valeur de la longueur AN.

E.19 *Dans cet exercice, si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans l'évaluation.*

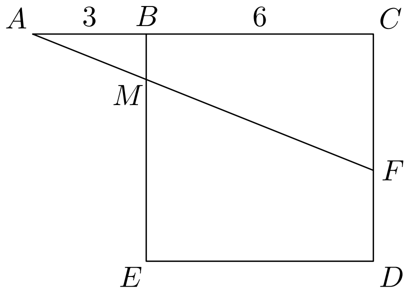
La ville BONVIVRE possède une plaine de jeux bordée d'une piste cyclable. La piste cyclable a la forme d'un rectangle $ABCD$ dont on a "*enlevé trois des coins*".
Le chemin de G à H est un arc de cercle ; les chemins de E à F et de I à J sont des segments.
Les droites (EF) et (AC) sont parallèles.



Quelle est la longueur de la piste cyclable? Justifier la réponse.

E.20 *Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

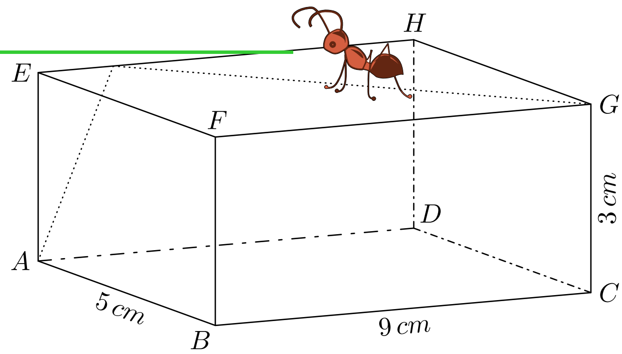
On considère la figure ci-dessous, qui n'est pas en vraie grandeur.



$BCDE$ est un carré de 6 cm de côté. Les points A, B et C sont alignés et $AB = 3\,cm$.
F est un point du segment $[CD]$.
La droite (AF) coupe le segment $[BE]$ en M.

Déterminer la longueur CF par calcul ou par construction pour que les longueurs BM et FD soient égales.

E.21 Une fourmi se balade sur le pavé droit $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



Elle choisit le plus court chemin pour aller du point G au point A.
Déterminer la longueur de ce chemin.

8. *Réciproque du théorème de Thalès (quotient décimaux)*

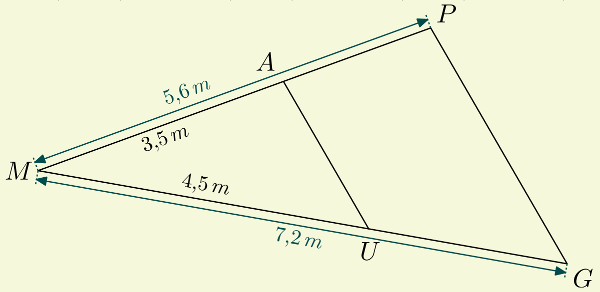
E.22 Prouver, sans l'usage de la calculatrice, que chacun des couples de quotients ci-dessous sont égaux :

(a) $\dfrac{1{,}4}{6}$ et $\dfrac{7}{30}$ (b) $\dfrac{3}{1{,}2}$ et $\dfrac{5}{2}$

(c) $\dfrac{0{,}01}{0{,}04}$ et $\dfrac{0{,}3}{1{,}2}$ (d) $\dfrac{7{,}2}{1{,}6}$ et $\dfrac{5{,}4}{1{,}2}$

E.23

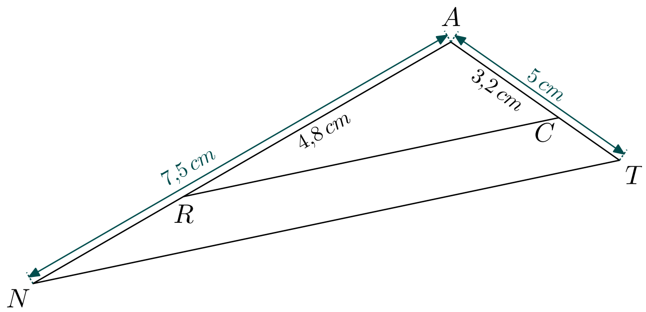
Exemple commenté :
On considère le triangle MGP représenté ci-dessous et les points A et U appartenant respectivement aux segments $[MP]$ et $[MG]$:
$MA = 3{,}5\,m$; $MP = 5{,}6\,m$; $MU = 4{,}5\,m$; $AT = 7{,}2\,m$



On a l'application numérique :
$$\frac{MA}{MP} = \frac{3{,}5}{5{,}6} = 0{,}625 \quad ; \quad \frac{MU}{MG} = \frac{4{,}5}{7{,}2} = 0{,}625$$

Chaînons déductifs	
Je sais	Les points M, A, P et les points M, U, G sont alignés dans le même ordre. $\frac{MA}{MP} = \frac{MU}{MG}$
J'utilise	D'après la réciproque du théorème de Thalès :
J'en déduis	$(AU)/\!/(PG)$

On considère le triangle ANT et les deux points R et C appartenant respectivement aux segments $[AN]$ et $[AT]$. On a les mesures :
$AN = 7{,}5\,cm$; $AR = 4{,}8\,cm$; $AC = 3{,}2\,cm$; $AT = 5\,cm$



(1) Prouver que l'égalité des quotients : $\frac{AR}{AN} = \frac{AC}{AT}$

(2) Compléter le chaînon déductif ci-dessous :

Chaînons déductifs	
Je sais	Les points …, …, … et les points …, …, … sont alignés dans le même ordre. $\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$
J'utilise	D'après la réciproque du théorème de Thalès :
J'en déduis	… $/\!/$ …

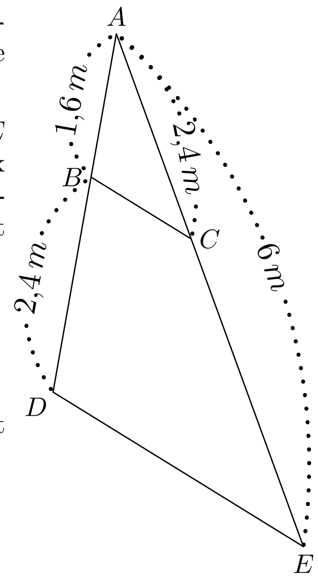
E.24

On considère les deux configurations ci-dessous composées de deux triangles ADE et PST.

On considère le triangle ADE représenté ci-contre et les deux points B et C appartenant respectivement aux segments $[AD]$ et $[AE]$.

On a les mesures :
$AB = 1{,}6\,m$; $BD = 2{,}4\,m$
$AC = 2{,}4\,m$; $AE = 6\,m$

Montrer que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.



9. *Réciproque du théorème de Thalès (quotient rationnel)*

E.25

Proposition : ***(réciproque du produit en croix)***
Soit a, b, c, d quatre nombres non-nuls.
Si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

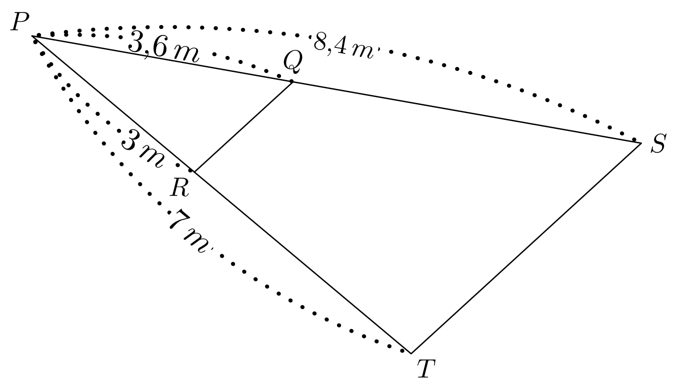
Pour chaque question, justifier que les nombres A et B sont égaux :

(a) $A = \frac{2{,}4}{5{,}6}$ et $B = \frac{3{,}6}{8{,}4}$ (b) $A = \frac{2{,}2}{3{,}4}$ et $B = \frac{3{,}3}{5{,}1}$

E.26 On considère le triangle PST représenté ci-dessous et les deux points Q et R appartenant respectivement aux segments $[PS]$ et $[PT]$.

On a les mesures suivantes :

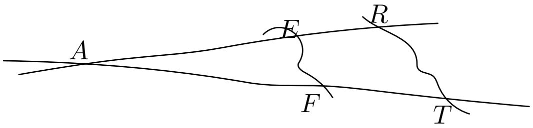
$PR = 3\,m$; $PT = 7\,m$; $PQ = 3{,}6\,m$; $PS = 8{,}4\,m$



Montrer que les droites (QR) et (ST) sont parallèles.

10. *Contraposé du théorème de Thalès*

E.27 On considère la figure ci-contre, réalisée à main levée et qui n'est pas à l'échelle.



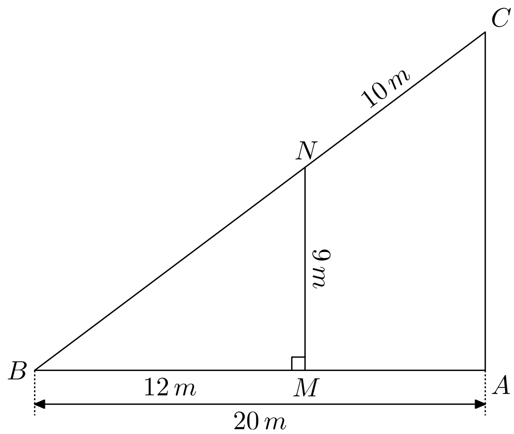
On donne les informations suivantes :

- Les droites (ER) et (FT) sont sécantes en A.
- $AE = 8\,cm$, $AF = 10\,cm$, $EF = 6\,cm$
- $AR = 12\,cm$, $AT = 14\,cm$

1. Démontrer que le triangle AEF est rectangle en E.
2. Les droites (EF) et (RT) sont-elles parallèles?

11. *Réciproque de Thalès et autres théorèmes*

E.28 On considère le triangle ABC représenté ci-dessous où les points M et N appartiennent respectivement aux segments $[BA]$ et $[BC]$, où le triangle BMN est rectangle en M et où les distances suivantes sont connues :
$BM = 12\,m$; $BA = 20\,m$; $NC = 10\,m$; $MN = 9\,m$



1. Déterminer la mesure du segment $[BN]$.
2. Montrer que les droites (MN) et (AC) sont parallèles.

12. *Exercices non-classés*

E.29 $ABCD$ est un parallélogramme tel que :
$AB = 8\,cm$; $AD = 4{,}5\,cm$

E est un point de la droite (AD) tel que :
$AE = 1{,}5\,cm$ et E n'est pas sur le segment $[AD]$.

La droite (EC) coupe le segment $[AB]$ en M.

1. Calculer AM.
2. Placer le point N sur le segment $[DC]$ tel que :
$DN = \frac{3}{4} \times DC$
3. Démontrer que les droites (AN) et (EC) sont parallèles.