

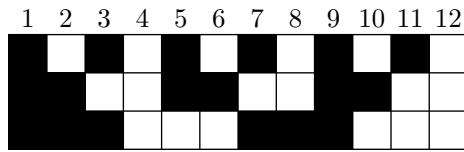
1. Lógica

E.8803



El friso

Se hace un friso copiando a la derecha el patrón formado por las doce columnas que se muestran a continuación:



Cada columna del friso está codificada por tres símbolos, 000 si las tres casillas (*de la columna*) son blancas, 001 si las dos casillas superiores son blancas y la tercera negra... y finalmente 111 si las tres casillas son negras.

- 1 ¿Cómo se codifica la columna 10 del friso? La misma pregunta para la columna 14.
- 2 En el patrón anterior, ¿dar el(los) columna(s) codificado 100?
- 3 Nos dan un número entero n . Cómo se codifica la columna $12n+5$?
- 4 ¿Cómo está codificada la columna 2017?

E.8849



A Pierre le apasionan los números. En su coche tiene un reloj digital de cuatro cifras que da la hora desde 00:00 hasta 23:59.

Cuando Pierre está a punto de emprender un largo viaje, mira su reloj y se da cuenta de que los dos números que aparecen, los minutos y las horas, son cuadrados de números enteros (*que, en un reloj digital, se escriben de la forma: 00, 01, 04, 09, 25,...*)

Al regresar de su viaje, Pierre se da cuenta de que su reloj vuelve a mostrar cuadrados de dos números enteros. Su ordenador de a bordo le dice que ha viajado 352 km en 4 horas y 20 minutos.

¿Cuándo podría volver Pierre de su viaje?

E.8709



Código secreto

Los participantes en un juego intentan salir de una habitación equipada con un código digital y, para ello, deben descubrir el código que deben marcar.

Disponen de las dos pistas siguientes:

Primera pista

El código es una combinación ordenada de cuatro dígitos diferentes que pueden formar un número.

Este número debe ser estrictamente inferior a 2018.

Por ejemplo, 0 6 2 7 es un código que corresponde al número 627.

¿Cuántos códigos diferentes se pueden componer?

Segunda pista

Entre todos los códigos posibles obtenidos con la primera pista, hay uno tal que:

- el número formado por las cifras de los miles y las centenas es el doble del número formado por las cifras de las decenas y las unidades; por ejemplo, para 1809, 18 es el doble de 09;
- la suma de los cuatro dígitos del código es par y no divisible por 9.

¿Cuál es este número?

El código que hay que marcar para salir de la habitación corresponde al número obtenido como diferencia entre las dos respuestas obtenidas anteriormente (*primera y segunda pistas*).

¿Cuál es este código?

E.8787



Christophe recortó cuarenta formas idénticas a la que se muestra a continuación (*figura 1*). Comenzó a ensamblarlas en un friso regular (*figura 2*). Cuando haya terminado de colocar la cuadragésima forma, ¿cuál será el perímetro del friso así creado?

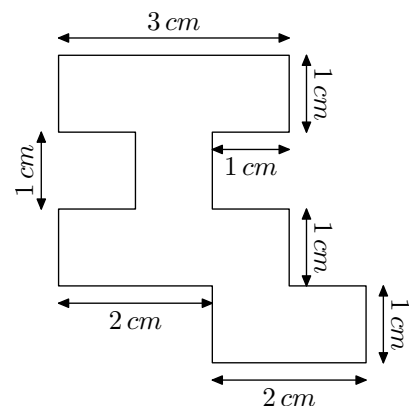


Figura 1.

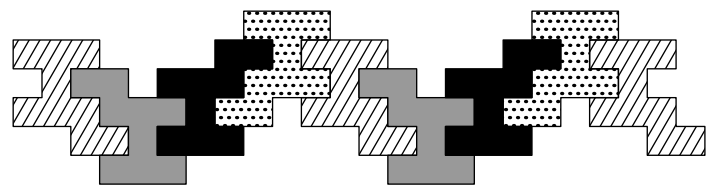


Figura 2.

2. Aritmética

E.8702

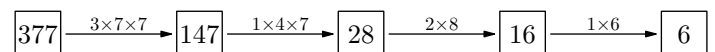


La persistencia de un número

En este ejercicio, consideramos números enteros mayores o iguales a 10, escritos en el sistema decimal.

Cuando multiplicamos los dígitos que componen la escritura de un número entero, obtenemos un nuevo número. Repeti-

mos este cálculo con el nuevo número y así sucesivamente. Por ejemplo, para el número 377:



El proceso se detiene cuando se obtiene un número que se escribe con un solo dígito. Se necesitaron 4 pasos en total: se

dice que la persistencia de 377 es 4.

- 1 ¿Cuál es la persistencia de cada uno de los números?
 - a 77
 - b 28 534
 - c 6 785 791
- 2 La persistencia de cada uno de los números 2 019, 4 806 y 13 970 875 es igual a 1. ¿Qué resultado general parecen ilustrar estos resultados? Justifica tu respuesta.
- 3 ¿Existe algún dígito que se pueda insertar en la escritura de un número sin cambiar su persistencia?
- 4 Encuentre un número escrito con 20 dígitos cuya persistencia sea 4.
- 5 ¿Cuáles son las posibles persistencias de un número cuya escritura contiene un dígito par y un 5?

E.8704    El código EAN-13 (*European Article Numbering*) es un código de barras utilizado por el comercio y la industria que permite identificar objetos de forma única y ser leído por un escáner. Este código de barras se compone de 13 dígitos (*enteros comprendidos entre 0 y 9*), siendo el último una clave de control calculada a partir de los 12 dígitos anteriores. Un código de barras se simboliza mediante la siguiente tabla:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	C
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	----------	----------	----------	-----

... donde se han introducido los trece dígitos que componen el código de barras. El dígito C es la clave de verificación.

Para determinarla, se calcula:

$S = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + 3 \times (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12})$.
 C es entonces el dígito tal que $S + C$ es un múltiplo de 10.

- 1 ¿Es válido el código 4971850187820?
- 2 Determinar C para que el código 978204732850 C sea válido.
- 3 Se ha sustituido un número por x en el código 32525 x 7041767. ¿Qué valor debe tener x para que este código sea válido?
- 4 El código 3742278085985 no es válido.
 ¿Cuáles pueden ser los valores de los dos primeros dígitos de la izquierda en otros códigos válidos que contengan los 11 mismos dígitos a la derecha?

E.8829



Partida de dardos

Se juega a los dardos en una diana que tiene tres zonas: una de 5 puntos, otra de 7 puntos y otra de 11 puntos. Nos interesan las diferentes puntuaciones posibles, ya que el número de dardos no está limitado.

Por ejemplo, 30 es una puntuación posible, ya que:

$$30 = 11 + 7 + 7 + 5 \quad \text{ou} \quad 30 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5.$$

- 1 Comprueba que 26, 43 y 220 012 son puntuaciones posibles.
- 2 Se dice que dos juegos son idénticos si, en cada uno de ellos, cada zona de la diana tiene el mismo número de dardos. Por ejemplo, los juegos correspondientes a las puntuaciones: $7+5+5+11$ y $5+7+11+5$ son idénticos.
 - a Encuentre cuatro juegos diferentes que den la puntuación 40.
 - b Demuestre que hay dos juegos diferentes y solo dos que corresponden a la puntuación 34.
- 3 Encuentre todas las puntuaciones que se pueden obtener con un lanzamiento de tres dardos que hayan alcanzado todos la diana. Presentar los resultados de forma organizada.
- 4
 - a Demostrar que 14 y los cuatro números enteros siguientes son puntuaciones posibles.
 - b Determinar la lista de números enteros positivos distintos de cero que no corresponden a ninguna puntuación.

E.8841



Un programa de cálculo

Este es un programa de cálculo:

Sea N un número natural escrito en el sistema decimal:

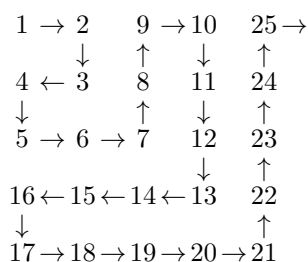
- **Paso n°1:** Localizar la cifra X de las unidades de N .
- **Paso n°2:** Calcular $N - X$. Sea M el número obtenido.
- **Paso n°3:** Dividir M entre 10. Sea D el número obtenido.
- **Paso n°4:** Calcular $D + 2X$. Sea R el número obtenido.
- **Paso n°5:** Si R es diferente de N , pasar al paso n°6. Si no, detener y mostrar R .
- **Paso n°6:** Si R se escribe con un solo dígito, detener y mostrar R . Si no es así, asigne a N el valor R y reanude el programa de cálculo en el paso n°1.

- 1 ¿Qué resultado se muestra cuando se introduce $N = 15$ en el programa de cálculo?
- 2 ¿Qué ocurre cuando se introduce $N = 2015$ en el programa de cálculo?
- 3 ¿Qué números pueden aparecer en la pantalla final?

E.8844



Números en cadena



Los números enteros consecutivos 1, 2, 3, 4, etc... están dispuestos en las casillas de una tabla según el esquema adjunto. El número 8 se encuentra en la intersección de la segunda fila y la tercera columna.

El número 13 se encuentra en la intersección de la cuarta fila y la cuarta columna.

¿Qué número se encuentra en la intersección de la vigésima quinta fila y la vigésima quinta columna?

E.8845



Unos con nueves

- Calcular las sumas:
 $a = 99 + 999$; $b = 99 + 999 + 9999$
- Consideramos el número N definido como la suma:
 $N = 99 + 999 + 9999 + \dots + 9999 \dots 999$

El primer término de esta suma se escribe con dos cifras 9; se suman los números que se escriben con tres y luego con cuatro cifras 9, etc... El último término de la suma se escribe con cien cifras 9.

Se realiza la suma y se escribe N en escritura decimal ordinaria. ¿Cuántas veces aparece el número 1 en esta escritura?

E.8846



Nos interesan las diversas formas de escribir un número natural como suma de otros números naturales (para evitar repeticiones, se escriben en orden ascendente). Por ejemplo:

- | | |
|---------------------------|-------------------|
| • $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ | • $5 = 1 + 2 + 2$ |
| • $5 = 1 + 1 + 1 + 2$ | • $5 = 1 + 4$ |
| • $5 = 1 + 1 + 3$ | • $5 = 2 + 3$ |

son las seis descomposiciones posibles del número 5.

A cada una de las sumas así escritas se le asocia el producto de sus términos. Los resultados obtenidos para 5 son 1, 2, 3, 4 y 6.

- ¿Cuáles son las descomposiciones posibles del número 7?
¿Cuáles son los productos correspondientes? ¿Cuál es el mayor?
 - Ahora nos interesan las descomposiciones del número 28, que no intentaremos escribir, y los productos correspondientes.
- a) Consideramos una descomposición cualquiera del

número 28 en la que aparece el número 1. Llamamos P al producto asociado. Encontrar una descomposición cuyo producto asociado sea superior a P .

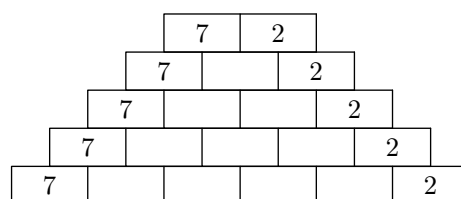
- Consideramos cualquier descomposición del número 28 en la que aparezca el número 5. Llamamos R al producto asociado. Encuentre una descomposición cuyo producto asociado sea mayor que R .
- ¿Qué descomposición de 28 da el producto asociado más grande?

E.8847



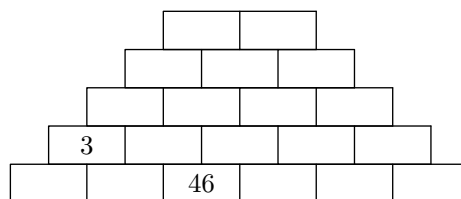
Se denomina pirámide de Pascal a una pila de casillas completadas de la siguiente manera:

- se eligen dos números enteros positivos m y n ;
- el primer número de cada fila es igual a m (en el ejemplo siguiente $m=7$);
- el último número de cada fila es igual a n (en el ejemplo siguiente $n=2$);
- un número escrito en una casilla es igual a la suma de los números escritos en las dos casillas situadas justo encima.



Exemple de pyramide de Pascal avec $m=7$ et $n=2$
On n'a représenté ici que les cinq premières lignes

- a) Reproduce y completa el ejemplo de la pirámide de Pascal anterior.
- Para cada fila, calcula la suma de los números que aparecen en ella. ¿Qué observas?
- Si consideramos la pirámide de Pascal asociada a los números enteros $m=1$ y $n=1$, ¿en qué fila la suma de los números será igual a 1024?
- Demuestra que, para cualquier número entero m y n , la suma de los números de la cuarta línea es igual al doble de la suma de los números de la tercera línea.
- Completa la pirámide de Pascal que aparece a continuación:



3. Acerca de los cocientes

E.8708



Expansión decimal

Al realizar la división de 28 entre 27, encontramos:

1,037 037 037 037 ...

La división planteada produce una escritura decimal periódica

ilimitada del cociente $\frac{28}{27}$.

El período de esta escritura consta de tres cifras repetidas (aquí 037). El 5º decimal es 3.

- ¿Cuál es el 52º decimal de $\frac{28}{27}$?

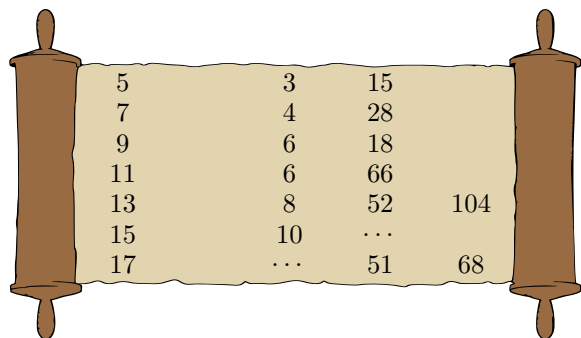
- 2 Cuando dividimos 19 entre 13, encontramos:
1,461 538 461 538 461 538...
¿De cuántos dígitos está formado el período?
¿Cuál es el 100^o decimal de $\frac{19}{13}$?
- 3 Cuando dividimos 9 533 entre 270, encontramos:
35,307 407 407 40...
¿De cuántos dígitos está formado el período?
¿Cuál es el 1 000^o decimal de $\frac{9\,533}{270}$?
- 4 La escritura decimal de $\frac{1}{97}$ muestra un período de 96 dígitos que comienza con 0309...
¿Cuál es el 96^o dígito de este período?

E.8756 Los egipcios solo utilizaban fracciones con numerador 1, a excepción de la fracción $\frac{2}{3}$.

Para hallar el doble de sus fracciones con numerador 1, se disponía de tablas cuyo uso se describe a continuación:

Por ejemplo, leyendo la primera línea, tenemos:

El doble de $\frac{1}{5}$ es $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$



5	3	15	
7	4	28	
9	6	18	
11	6	66	
13	8	52	104
15	10	...	
17	...	51	68

4. Uso del poder

E.8851

- 1 ¿Cuál es el número de cifras del número:

5. Álgebra y ecuaciones

E.8806

Nuevo Loto

En una partida de lotería, cada jugador recibe tarjetas en las que figuran números enteros. Se sortean fichas numeradas y se anuncia en voz alta el número que figura en cada una de ellas. Se gana cuando se han anunciado todos los números de una línea de la tarjeta.

¡Esta noche las reglas han cambiado un poco!

28	29	30
12	13	14
3	4	5

- 1 Interpreta la tercera línea de la tabla.
- 2 Falta un número en la línea del 15 y otro en la línea del 17.
Encuentre estos dos números.
- 3 ¿Por qué solo hay números impares en la primera columna?

E.8850

¿Y al final, qué queda?

Se escribe la lista de los cien números: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{98}, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$
a la que aplicamos el siguiente procedimiento: elegimos los números a y b de la lista y los sustituimos por el único $a+b+ab$, y luego continuamos de la misma manera. En cada paso, el número pierde una unidad. Al final, ya no se puede continuar, solo queda un número.

- 1 Si procedemos sistemáticamente y empezando por la izquierda:
- a ¿Qué lista obtenemos después del primer paso? ¿Y tras la segunda?
- b ¿Qué número obtenemos tras las 99 etapas?
- 2 ¿Y si empezamos por la derecha?
- 3 Si procedemos al azar, ¿qué resultados podemos obtener?

$$N = 10^{2006} - 2006$$

- 2 ¿Cuál es la suma de los dígitos de N ?

El organizador reparte tarjetas en las que figuran nueve números distribuidos en tres filas de tres números consecutivos (la tabla anterior es un ejemplo de una de estas tarjetas).

- 1 El organizador anuncia: “se ofrece un premio a quien complete una fila de números cuya suma sea 41”. ¿Se puede ganar?
- 2 El organizador anuncia: “Se ofrece un premio de consolación a quien complete una línea de números cuya suma sea 57”. ¿Cuáles son los números inscritos en una línea ganadora?
- 3 A partir de ahora: “Se ofrece un premio de consolación a quien presente una línea de números cuyo producto sea múltiplo de 6”. ¿Quién gana?

En esta pregunta, las tarjetas tienen tres líneas de cuatro

números consecutivos.

- 4 El organizador anuncia: “si al sumar 1 al producto de los cuatro números de una misma línea, se obtiene un cuadrado perfecto*, entonces se gana un premio”. ¿Quién gana?

* Recordemos que un cuadrado perfecto es el cuadrado de un número entero

E.9472    Nos interesan los cuadrados mágicos 3×3 : son tablas de tres filas y tres columnas (denominadas respectivamente L_1, L_2, L_3 y C_1, C_2, C_3) en las que se inscriben 9 números, de modo que las sumas de los números escritos en cada fila, en cada columna y en cada diagonal (las diagonales se designan por D_1 y D_2) son iguales. Esta suma común se denota S , es la constante del cuadrado mágico.

- 1 En el cuadrado de al lado, se escriben los números enteros comprendidos entre 1 y 9. Complételo para convertirlo en un cuadrado mágico.

		8
		1
		6

- 2 De las dos tablas siguientes, solo una es mágica. ¿Cuál?

23	-2	33
28	18	8
3	38	13

23	-2	33
28	18	8
3	38	13

- 2 Designamos con x un número cualquiera. Nos preguntamos si es posible crear un cuadrado mágico 3×3 en el que figuren los nueve números:

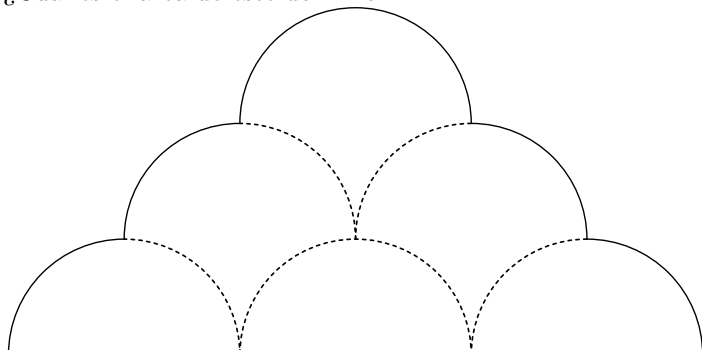
$$16x-10 ; 2x-3 ; -2 ; 4x-4 ; 12x-8$$

$$10x-7 ; 6x-5 ; 8x-6 ; 14x-9$$

- a ¿Cuál sería la constante de este cuadrado mágico?
- b Proponer un cuadrado mágico 3×3 utilizando estos nueve números.
- 3 Proponer finalmente dos cuadrados mágicos 3×3 :
- a Un cuadrado de 9 números todos negativos;
- b Un cuadrado de constante S_{30}

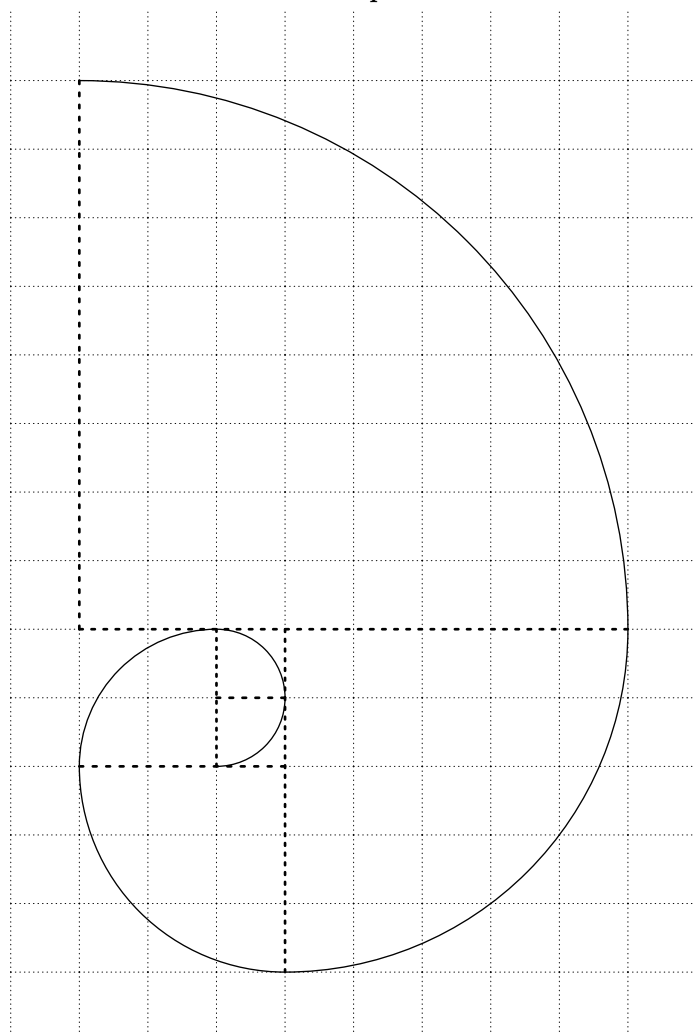
6. Geometría

E.8705    Seis semicírculos de radio 1, y los diámetros de tres de ellos, determinan el dominio que se muestra a continuación. ¿Cuál es el área de este dominio?



E.8842   

Una espiral



Esta espiral se obtiene trazando sucesivamente cuartos de círculo con radios cada vez mayores.

El primer cuarto de círculo tiene un radio de 1, al igual que el segundo. El tercer cuarto de círculo tiene un radio de 2, el cuarto de 3 y el siguiente de 5.

- 1 ¿Cuál es el radio del sexto cuarto de círculo? ¿Y el del séptimo? ¿Y el del décimo?
- 2 El radio del decimoquinto cuarto de círculo es 610 y el del decimosexto es 987. ¿Cuál es el radio del decimoséptimo?
- 3 ¿Cuál es el radio del vigésimo cuarto de círculo?

E.8843



7. A las suites

E.8828

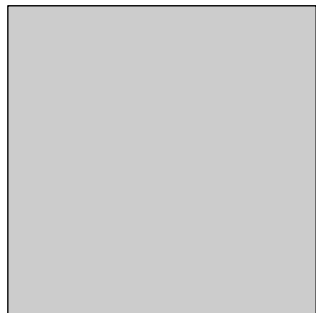


Excava cada vez más, pero cada vez menos.

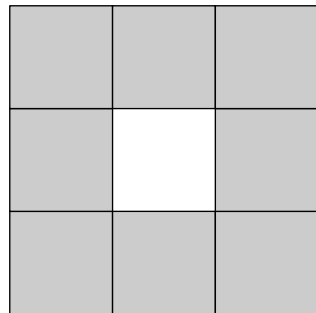
1 La alfombra de Sierpinski

Consideremos un cuadrado de lado 27.

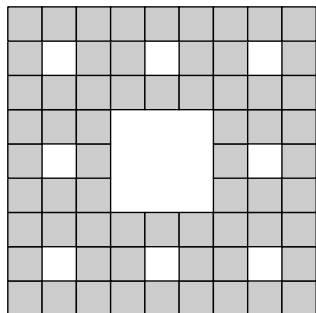
En cada paso, eliminamos el cuadrado central de cada cuadrado gris.



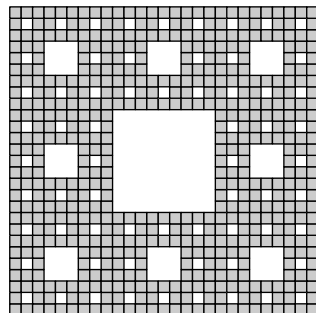
étape 0



étape 1



étape 2



étape 3

¿En qué etapa el área de la alfombra se vuelve inferior a la mitad del área inicial?

2 La esponja de Sierpinski

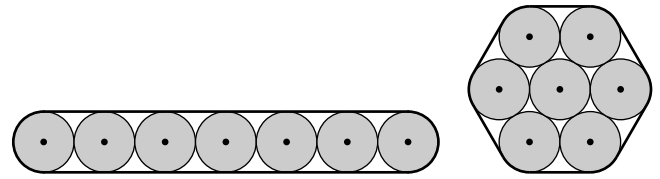
Consideremos ahora un cubo de arista a .

En cada etapa, vaciamos cada cubo de siete cubos pequeños en su interior, como se muestra a continuación.

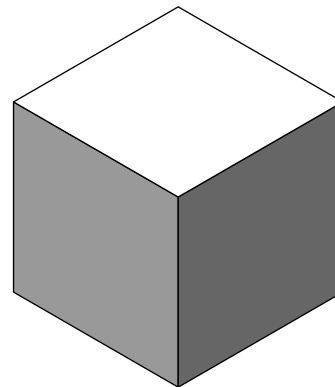
El mejor embalaje

Siete tubos cilíndricos de diámetro 20 cm se envuelven con cinta adhesiva. Pueden disponerse planos o en haz, como se muestra en las figuras siguientes.

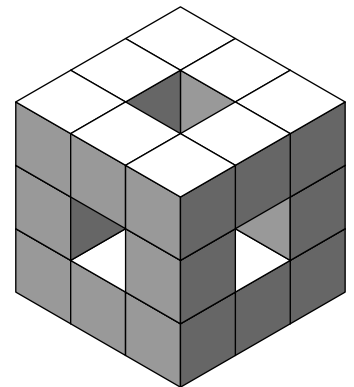
En cada caso, ¿cuál es la longitud de una vuelta de la cinta, redondeada al milímetro más próximo?



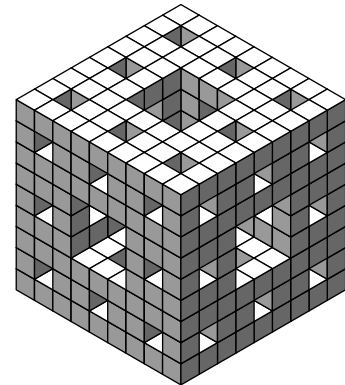
Pista: uso: $\pi \approx 3,1416$



étape 0



étape 1



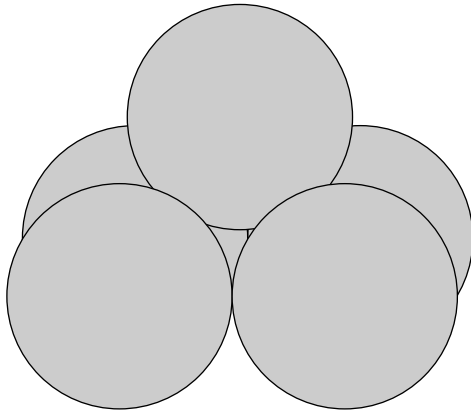
étape 2

¿En qué etapa el volumen de la esponja se vuelve inferior a la mitad del volumen inicial?

E.9471



Toda la fruta está dispuesta en fila en el puesto del vendedor. Las naranjas están dispuestas en una pirámide de base cuadrada. El nivel superior contiene una sola naranja. Este piso lleva la marca $E1$. El piso de abajo se anotará $E2$, y así sucesivamente. Cada naranja se asienta sobre otras cuatro.



- 1 a ¿Cuántas naranjas hay en el suelo $E2$?
 b ¿Cuántas naranjas hay en el $E3$ piso?
 c ¿Cuántas naranjas hay en el piso $E10$?
 d ¿Hay un piso con exactamente 64 naranjas?
 e ¿Hay un piso con exactamente 200 naranjas?
- 2 ¿Cuántas naranjas componen :
 a una pirámide con 2 pisos?
 b ¿una pirámide con 3 pisos?
 c ¿una pirámide con 10 pisos?

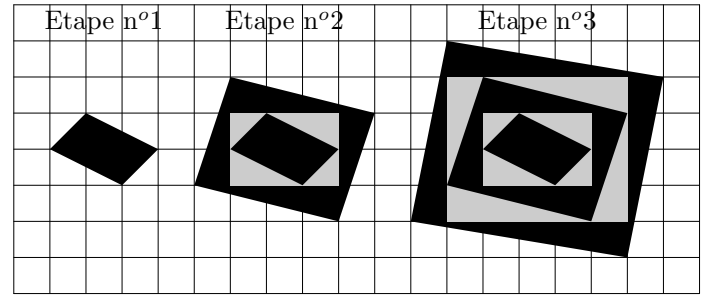
- 3 Las naranjas del puesto se han dispuesto formando una pirámide de siete pisos. Desgraciadamente, la pirámide resultó demasiado inestable y hubo que formar otras más pequeñas. Propón una organización piramidal de base cuadrada que permita disponer todas las naranjas. Todas las pirámides estarán completas y cada una tendrá, al menos, 3 pisos.

E.9473



Se construye una secuencia de pa-

trones mediante un proceso cuyas tres primeras etapas se muestran a continuación:



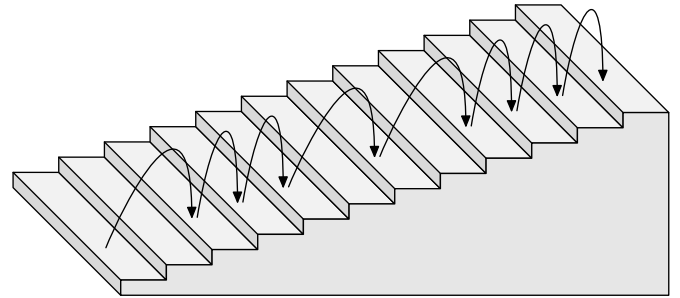
La unidad de superficie es el cuadrado de la cuadrícula

- 1 Para cada una de las etapas 2 y 3 :
 a Determine el área total de las partes interiores claras ;
 b Determine el área total de las partes negras.
- 2 a ¿Cuál es, en el paso 4, el área total de las partes interiores claras? Y la de las partes negras?
 b ¿Y en el paso 20?

E.9474



Una escalera puede subirse de uno en uno o de dos en dos. La figura de la derecha muestra un ejemplo.



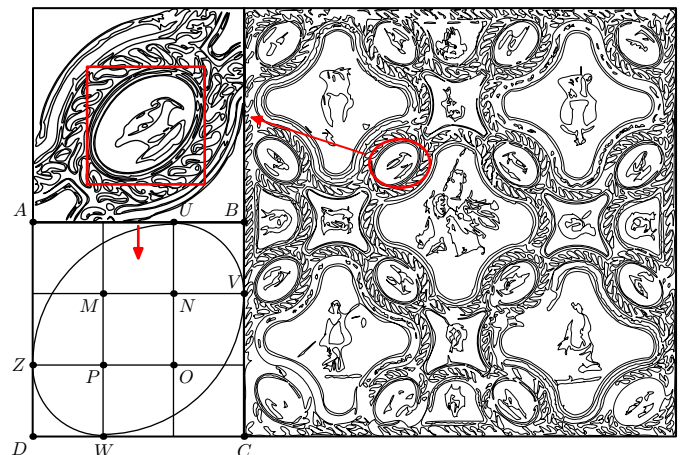
- 1 ¿De cuántas maneras se puede subir una escalera un escalón? dos escalones? tres escalones? cuatro escalones? cinco escalones?
- 2 ¿De cuántas formas distintas se puede subir una escalera de 20 peldaños?

8. Geometría con el teorema de Pitágoras

E.8703



En la ciudad de Nimes, unas obras han llevado al descubrimiento de un magnífico mosaico romano de principios del siglo III, conocido como "mosaico de Penteo". Este mosaico se compone de varios paneles figurativos de diversas formas geométricas, separados por "trenzas" (torsadas). Es obra de un maestro artesano con sólidos conocimientos de "geometría práctica" y capaz de ensamblar arcos de círculo en diversas formas para componer finalmente un todo armonioso.



En la figura anterior, se ha extraído mentalmente del mosaico un óvalo incluido en un cuadrado $ABCD$ de lado 3 unidades, a su vez dividido en 9 cuadrados. Sabemos que el óvalo está

formado por 4 cuartos de círculo.

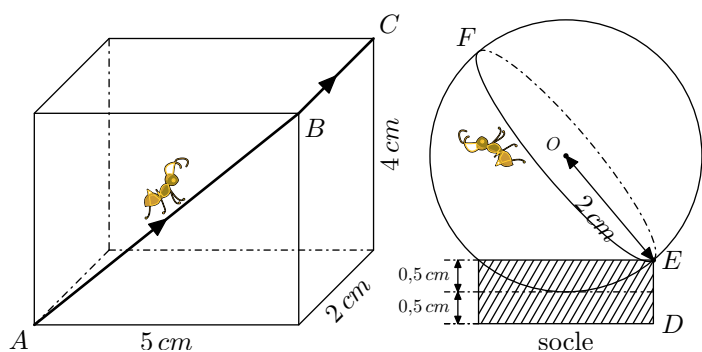
- 1 ¿Cuál es el centro de cada uno de estos cuartos de círculo?
- 2 Calcular el perímetro de este óvalo.
- 3 Calcular el área de este óvalo.
- 4 a Construir un óvalo de este tipo (tomaremos 3 cm como unidad).
- b Deducir la construcción de una figura con el mismo perímetro, pero con un área más pequeña.
- c Construir una figura con el mismo perímetro, pero con un área igual a 4 unidades de área.

E.8711



Las hormigas

- 1 A continuación se muestran dos sólidos: un paralelepípedo y una esfera sobre los que se mueven dos hormigas.

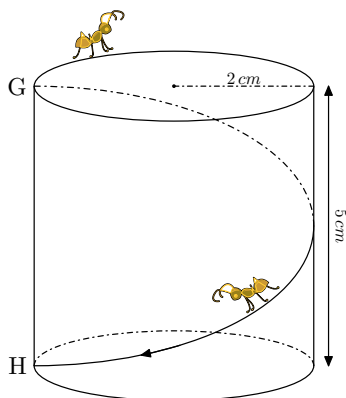


La hormiga n°1 se mueve sobre el paralelepípedo siguiendo el recorrido formado por los segmentos $[AB]$ y $[BC]$.

La hormiga n°2 se desplaza sobre una bola con centro O y radio 2 cm que descansa sobre una base de 1 cm de altura. Parte del punto D , se dirige a E , siguiendo el segmento $[DE]$, y luego llega al punto F siguiendo el semicírculo de diámetro $[EF]$.

¿Qué hormiga recorre el camino más corto?

- 2 Dos hormigas se desplazan sobre un cilindro de radio 2 cm.



La hormiga n°1 parte del punto G y describe el círculo superior del cilindro varias veces seguidas.

La hormiga n°2, por su parte, se desplaza por el cilindro siguiendo la trayectoria marcada con flechas de G a H , tomando el camino más corto, y luego vuelve a subir por G por el mismo camino.

Las dos hormigas comienzan su recorrido al mismo

tiempo y se desplazan a la misma velocidad, que se supone constante.

- a ¿Se encontrará la hormiga n°2 con la hormiga n°1 a su regreso a G ?
- b Imaginemos que las dos hormigas continúan moviéndose de esta manera sin detenerse ¿Podrán encontrarse en algún momento en G ?

Indicaciones:

- redondearemos todos los resultados al milímetro más cercano.
- Se utilizará: $\pi \approx 3,1416$

E.8805



¿Sabes clavar clavos?

La señora Briqueau quiere colgar un cuadro en su salón. El cuadro es rectangular y mide 84 cm de largo y 56 cm de alto. El sistema de sujeción consiste en una cuerda de 60 cm de largo, atada a la parte posterior del cuadro en dos puntos situados ambos a 21 cm del borde superior del cuadro y cada uno a 20 cm de uno de los bordes laterales.

La pared destinada a colgarlo es rectangular y mide 2,68 m de alto por 3,78 m de ancho.

La señora Briqueau desea que, una vez colocado, el marco quede centrado en anchura (con el mismo espacio a la izquierda y a la derecha del marco) y que su borde inferior quede horizontal y a 1,42 m del suelo.

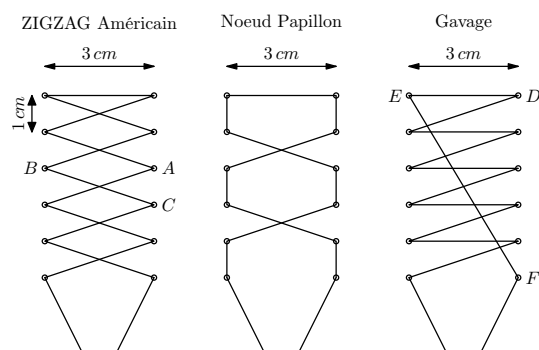
- 1 ¿A qué distancia del borde izquierdo de la pared debe colocar la señora Briqueau el gancho?
- 2 ¿Qué forma tendrá la cuerda cuando el marco esté colocado?
- 3 ¿A qué distancia de la parte superior de la pared deberá colocar el gancho la señora Briqueau? (redondeado al milímetro)?

E.8808



Los cordones

Hay varias formas de atarse los cordones de los zapatos. Aquí hay tres:



¿Cuál es el cordón más largo?

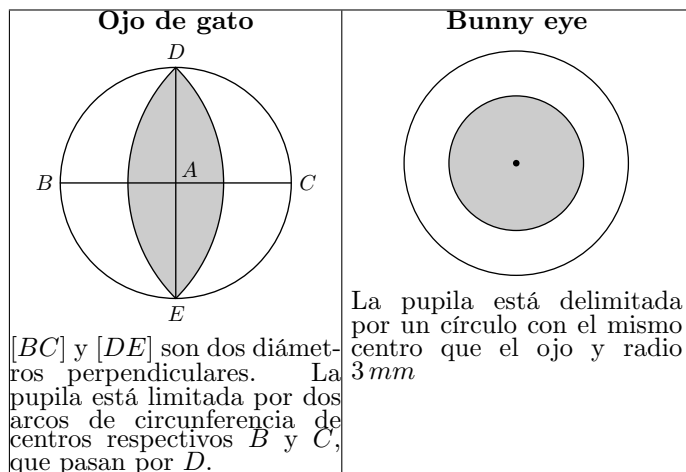
(No se tiene en cuenta la longitud de los cordones que se utilizan para hacer el nudo).

E.8809



En los ojos

Esquematisamos los ojos mediante discos de radios 5 mm .



¿Cuál de estos dos ojos tiene la pupila más grande?

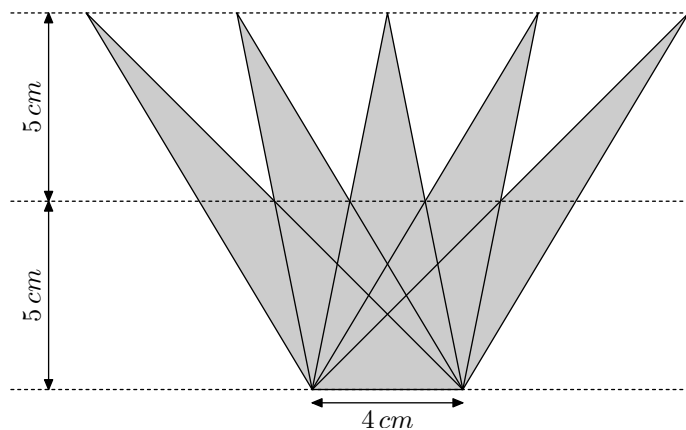
9. Geometría con el teorema de Tales

E.8710



La corona

Los vértices del polígono sombreado que se muestra a continuación están situados en rectas paralelas separadas por 5 cm . La “base” tiene una longitud de 4 cm .



¿Cuál es el área de este polígono?

10. Geometría con trigonometría

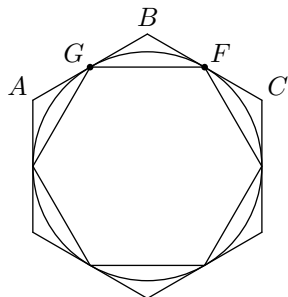
E.8807



Hexágonos encajables

Sea H_1 un hexágono regular inscrito en un círculo y H_2 un hexágono regular circunscrito al mismo círculo.

En la figura siguiente (, que no es a escala real), A , B y C designan tres vértices consecutivos del hexágono H_2 y G y F , los puntos medios respectivos de los segmentos $[AB]$ y $[BC]$, son dos vértices del hexágono H_1 .

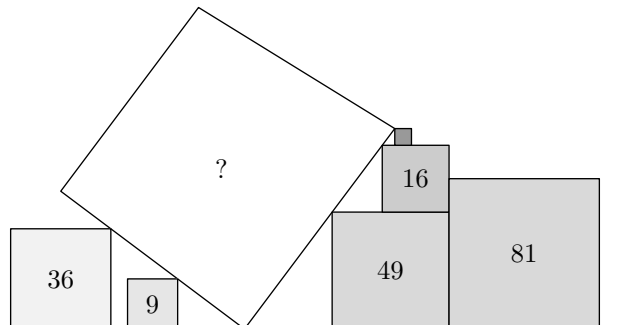


El área del hexágono H_2 es 340 m^2 . ¿Cuál es el área del hexágono H_1 ?

E.9014



En la figura siguiente se han indicado las áreas de seis cuadrados.



Uno de los vértices del cuadrado blanco oblicuo coincide con un vértice del cuadrado de área 1.

¿Cuál es el área de este cuadrado?

11. Proporcionalidad, porcentaje, unidad

E.8804

**BavardaCar**

El señor *A* debe realizar un viaje en coche de 350 km (*sin peaje*). Debe recoger por el camino a otras cuatro personas, la señora *B*, el señor *C*, la señora *D* y el señor *E*, que se dirigen al mismo lugar que él. Recoge a la señora *B* después de 60 km de viaje y luego sigue conduciendo durante 60 km antes de recoger al señor *C* y a la señora *D*. Recoge al señor *E* a 200 km de la llegada.

El gasto en combustible se estima en $36,40\text{ €}$.

Se barajan diferentes modos de reparto de los gastos entre **todos los ocupantes del coche**.

- 1 **Primer modo:** cada uno paga la misma cantidad. ¿Cuál es esa cantidad?
- 2 **Segundo modo:** la parte de cada uno es proporcional a la distancia que ha recorrido en el coche. ¿Cuál es la parte de cada uno?
- 3 **Tercer método:** la parte de cada uno se calcula teniendo en cuenta, en cada tramo, el número de personas presentes en el coche y la longitud del tramo. ¿Cuál es la parte de cada uno?

E.8840

**Carrera de persecución**

Recientemente se ha creado un nuevo tipo de carrera a pie.

Todos los corredores salen al mismo tiempo y no hay línea de meta que cruzar. Media hora más tarde, un coche sale en su

persecución. Todo corredor que sea adelantado por el coche queda eliminado. El último corredor adelantado es declarado ganador de la carrera.

El objetivo de cada corredor es recorrer la mayor distancia posible antes de ser alcanzado por el coche.

Esta es la organización de la carrera:

- Los corredores salen a las 10 de la mañana.
 - El coche que los persigue sale 30 minutos más tarde. Aumenta su velocidad progresivamente:
 - Durante la primera hora, circula a 15 km/h ;
 - La hora siguiente, circula a 16 km/h ;
 - La hora siguiente, circula a 17 km/h ;
 - Las dos horas siguientes, circula a 20 km/h ;
 - A continuación, estabiliza su velocidad a 35 km/h .
- 1 Robert fue alcanzado por el coche una hora después de su salida. ¿Qué distancia recorrió?
 - 2 Michèle fue alcanzada por el coche dos horas después de su salida. ¿A qué velocidad media corrió?
 - 3 Philippe recorrió 30 km antes de ser alcanzado. ¿A qué hora lo alcanzó el coche?
 - 4 El ganador de la carrera del año pasado recorrió 78 km . ¿Cuánto tiempo corrió y a qué velocidad media?
 - 5 Victoire cree que este año podrá correr durante horas a 14 km/h . Si lo consigue, ¿qué distancia recorrerá?

12. Probabilidad

E.8848

**Verdadero - Falso**

Ludovic debe responder a un test de 25 preguntas. Las respuestas son “Verdadero” o “Falso”. Su profesor de matemáticas da la siguiente indicación: en cualquier serie de 5 respuestas consecutivas, hay exactamente tres respuestas “Verdadero”.

- 1 ¿Por qué no es válida la siguiente lista?

Pregunta 1	V
Pregunta 2	F
Pregunta 3	V
Pregunta 4	V
Pregunta 5	F
Pregunta 6	F
...	...

- 2 ¿Cuántas respuestas “Verdadero” hay en la lista de 25 respuestas?
- 3 El profesor indica que la respuesta a la primera pregunta es “Falso”. Ludovic afirma que sabe la respuesta a la sexta sin haber leído las preguntas. ¿Cómo lo ha hecho?
- 4 El profesor le susurra a Ludovic que la respuesta a la última pregunta también es “Falso”. Ludovic afirma que ahora puede encontrar todas las respuestas sin leer las preguntas. ¿Tiene razón?

13. Algoritmos

E.8706



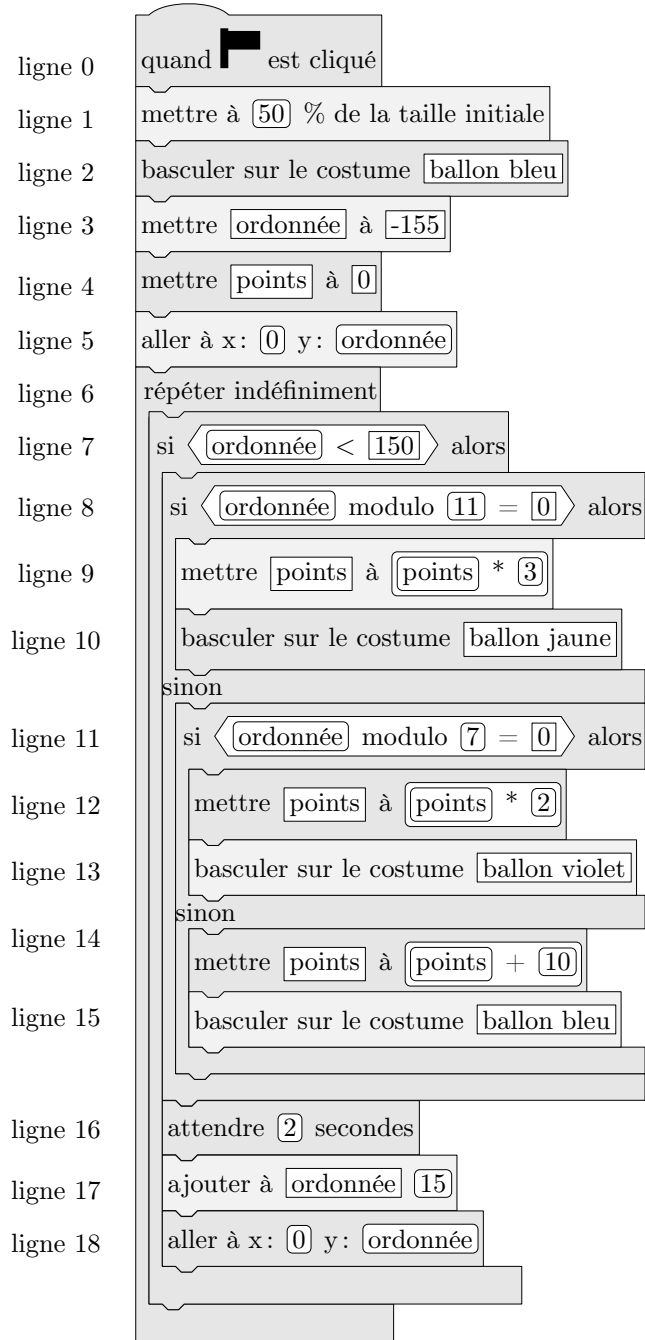
En Scratch, el comando siguiente comprueba si un número entero es divisible por otro número entero.

$\langle \text{nombre entier modulo nombre entier} = 0 \rangle$

Por lo tanto, la proposición $\langle 66 \text{ modulo } 11 = 0 \rangle$ es verdadera, ya que $66 = 6 \times 11$. En otras palabras, 66 es divisible por 11.

Por el contrario, la proposición $\langle 64 \text{ modulo } 11 = 0 \rangle$ es falsa, ya que 64 no es divisible por 11.

El siguiente comando se utiliza para programar el desplazamiento vertical de un sprite que representa un balón que cambia de color (azul, violeta o amarillo) en función de su ordenada y cada paso permite modificar el número de puntos.



- a) Cada vez que se pasa por el bucle “Si la ordenada es inferior a 150”, ¿en cuánto aumenta la ordenada del balón?
- b) Si la ordenada del balón es igual a 55, explique por qué el número de puntos se multiplica por 3.
- c) Si la ordenada del balón es igual a 100, ¿qué ocurre con

el número de puntos?

- d) ¿Para qué(s) ordenada(s) el balón pasa por el color amarillo? ¿Por qué?
- e) ¿Cuál será la puntuación final del balón?
- f) ¿Por qué número debo sustituir el valor “10” (línea 14) para que la puntuación final sea igual a 955?
- g) ¿Por qué número hay que sustituir el valor 2 (línea 11) para que el número de puntos sea igual a 17 300?

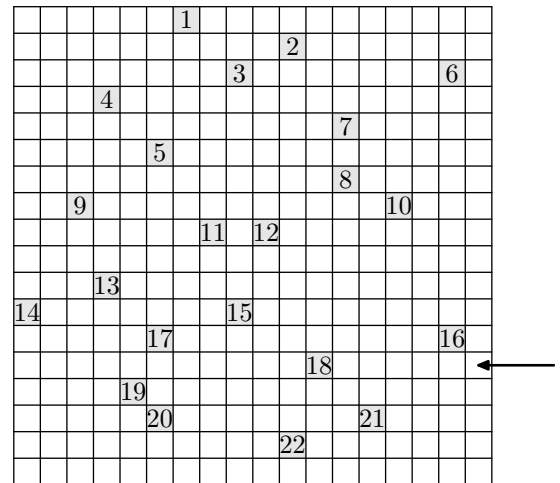
E.8707



Gymkhana para robots

Se coloca un robot sobre una plataforma cuadrículada en la que se disponen obstáculos numerados.

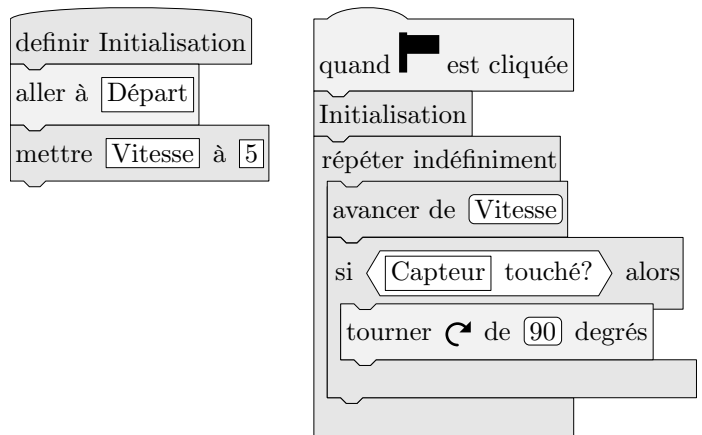
Se coloca en la salida, listo para avanzar en la dirección de la flecha.



Este robot está equipado con un sensor de presencia situado en la parte delantera. Este sensor permite detectar un obstáculo situado delante de él.

Por último, este robot también está equipado con un chip que permite programar sus movimientos con un lenguaje por bloques tipo “Scratch” o “MBlock”.

”. El siguiente programa se ha implantado en el chip de este robot.



A continuación, el robot se pone en marcha mediante la bandera verde.

- 1 Indique la lista de los diez primeros obstáculos encontrados.
- 2 ¿Cuál será el 50^{ème} obstáculo con el que se encontrará?
- 3 ¿Cuál será el 2019^{ème} obstáculo con el que se encontrará?

E.8712 Louise, Nassim, Ilam y Sophie participan en un concurso televisivo que consta de 2 rondas. En la 1^{ère} ronda, estos cuatro concursantes deben responder cada uno a tres preguntas. Por cada respuesta correcta, el jugador gana 5 puntos, pierde 2 puntos si no responde y pierde 3 puntos si su respuesta es incorrecta.

El candidato que obtenga menos puntos es eliminado en la 1^{er} ronda.

Louise solo responde a 2 preguntas, una de las cuales es incorrecta.

Nassim responde a todas las preguntas: 2 son correctas.

Ilam responde correctamente a las primeras 2 preguntas, pero no responde a la última.

Sophie solo responde a una pregunta, pero es correcta.

- 1 a ¿Qué concursante es eliminado en esta 1^{ère} ronda del juego?
 - b Enumera todas las puntuaciones posibles que puede obtener un concursante que juegue a este juego en la 1^{ère} ronda.
- 2 En la 2^{ème} ronda del juego, el principio es el mismo, pero los concursantes deben responder a 8 preguntas. Zoe ve este juego en su casa. Saca su tableta y abre una hoja de cálculo en un procesador de textos.

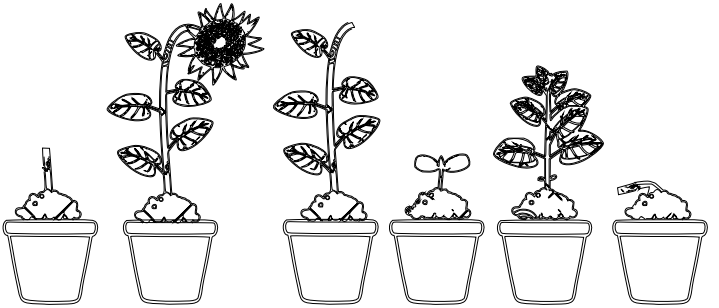
	A	B	C	D
1	Bonnes	Ne répons pas	Fausse	Score
2	0	0	$=8-A2-B2$	$=A2*5+B2*(-2)+C2*(-3)$
3	0	1	7	-23
4	0	2	6	-22
5	0	3	5	-21
6	0	4	4	-20

¿A partir de cuántas respuestas correctas se puede obtener una puntuación positiva?

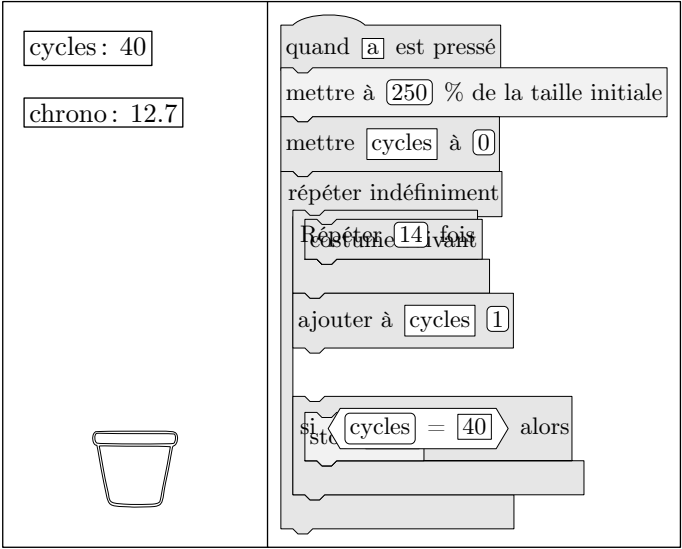
E.8713 Las doce imágenes siguientes están extraídas de un archivo de imágenes animadas (que contiene realmente 15 imágenes sucesivas) que muestran el desarrollo de una flor desde su nacimiento hasta su muerte. Solo la primera y la última imagen están colocadas correctamente.

1^{re} parte:

Indique el orden de desplazamiento de las otras diez imágenes durante la animación.



2^{ème} parte:



Preguntas preliminares: comprensión del algoritmo

- a ¿Qué hay que hacer para iniciar el programa?
- b ¿Cuántos ciclos de la flor se pueden observar antes de que se detenga el programa?
- c ¿Cuál es la “duración” de la animación?
- d ¿La variable `cycles` que se muestra es el número de ciclos ya ejecutados o el rango del ciclo que se está ejecutando? Justifique su elección.

Pregunta 1

¿Cuál sería la duración de la animación para exactamente 5 ciclos? 9 ciclos?

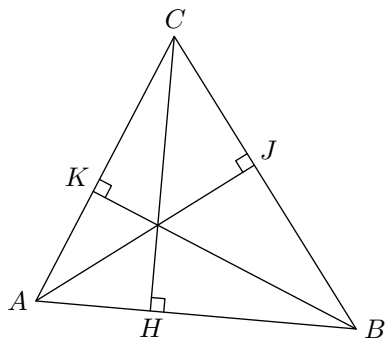
Pregunta 2

Cuando el cronómetro muestra el final del 9^{ème} “segundo”, ¿cuál es el número de ciclos que se muestra? ¿Qué “traje” del “duende” aparecería en la imagen en ese momento?

E.8757     El triángulo ABC adjunto es tal que:

$$AC = 13 \quad ; \quad AB = 14 \quad ; \quad BC = 15$$

Sean H, J, K los pies de las alturas que parten respectivamente de los vértices C, A, B .



- 1 Demuestre que CH es un número entero.
- 2 Demuestra que AJ es un número decimal y que BK es un cociente de números enteros.
- 3 Propón un triángulo cuyos tres lados y tres alturas tengan longitudes que sean números enteros.

15. Ejercicios no clasificados

E.9747   

Suma de números

En este ejercicio, los números considerados son enteros escritos según la numeración decimal.

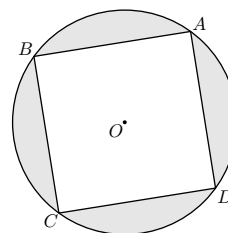
Para este ejercicio, llamamos **peso** de un número N a la suma de sus cifras.

- 1 ¿Cuál es el peso del número 29? ¿Cuál es el peso del número 7 646?
- 2 Sugiere tres números diferentes del mismo peso 42.
- 3 ¿Es correcto afirmar que “cuantas más cifras tiene un número, mayor es su peso”?
- 4 ¿Cuál es el menor número de pesos 50?
- 5 ¿Cuál es el menor número de pesos 2022?
- 6 ¿Podemos encontrar un número que se escriba sólo con 5 y 7 y cuyo peso sea 53?
- 7 ¿Podemos encontrar un número escrito sólo con 3 y 6 y cuyo peso sea 200?

E.9748   

Cuadrado inscrito en un círculo inscrito...

La unidad de longitud es el cm. *Atención: las figuras no están a escala. Todos los resultados numéricos solicitados deben ser valores exactos.*



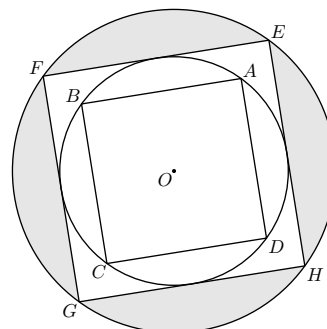
En la figura anterior se representa el círculo $\mathcal{C}_1$, con centro O y radio 2. Los segmentos $[AC]$ y $[BD]$ son dos diámetros perpendiculares de este círculo.

- 1 ¿Cuál es la naturaleza del cuadrilátero $ABCD$?

Se dice que el círculo $\mathcal{C}_1$ es el círculo circunscrito al cuadrado $ABCD$.

- 2 ¿Cuál es el área de la parte sombreada de la figura?

Consideremos el cuadrado $EFGH$ cuyos lados son paralelos a los de $ABCD$ y tangentes al círculo $\mathcal{C}_1$. Se dice que el círculo $\mathcal{C}_1$ está inscrito en el cuadrado $EFGH$. Del mismo modo que antes, consideramos que el círculo $\mathcal{C}_2$ está circunscrito al cuadrado $EFGH$. La siguiente figura representa esta situación.



- 3 Calcula el área de la parte sombreada en esta nueva figura.

- 4 Siguiendo el mismo principio, se puede construir una nueva figura con un círculo $\mathcal{C}_3$ circunscrito a un nuevo cuadrado $IJKL$ cuyos lados serían tangentes a $\mathcal{C}_2$ y paralelos a los lados del cuadrado $EFGH$. ¿Cuál es, en esta nueva figura, el área comprendida entre el círculo $\mathcal{C}_3$ y los lados del cuadrado $IJKL$?

E.9749

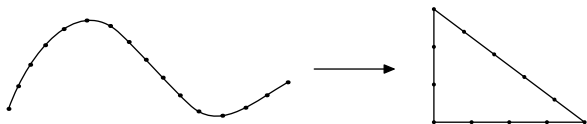


Tríadas pitagóricas

Se da una unidad de longitud en el plano. Un triángulo ABC tiene los siguientes lados:

$$AB = 15 \quad ; \quad AC = 8 \quad ; \quad BC = 17$$

- 1 Demuestra que este triángulo es rectángulo, indicando qué punto es el vértice del ángulo recto.



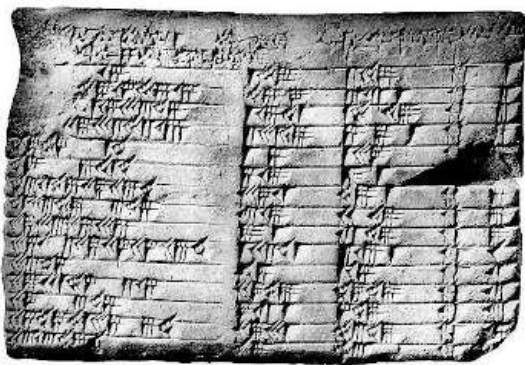
Corde à 13 noeuds et triangle égyptien

De manera más general, nos interesan los triángulos rectángulos cuyos lados tienen longitudes enteras. Se establece:

$$AB = m \quad ; \quad AC = n \quad ; \quad BC = p.$$

Supongamos que $m < n < p$ y digamos que el trío $(m; n; p)$ es pitagórico.

- 2 a Si $(m; n; p)$ es un triplete pitagórico, ¿qué punto es el vértice del ángulo recto del triángulo rectángulo ABC asociado?
- b Demuestra que $(3; 4; 5)$ es un triplete pitagórico. Los triángulos asociados son los “triángulos egipcios”.
- c Demuestra que, si el triplete $(m; n; 5)$ es pitagórico, entonces $m=3$ y $n=4$.



La tablilla Plimpton 322 (Universidad de Columbia, Nueva York) da testimonio de las investigaciones realizadas por los babilonios.

- 4 Se supone que el triplete $(5; n; p)$ es pitagórico.

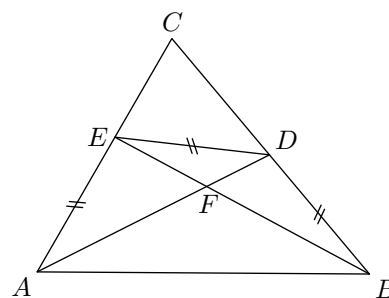
- a Demostrar que: $(p-n)(p+n) = 25$
- b Comparar $p+n$ y $p-n$ y deducir sus valores y, finalmente, los valores de p y n . El triángulo asociado se denomina “babilónico”.

- 5 ¿Existen números enteros m y p tales que el triplete $(m; 5; p)$ sea pitagórico?

E.9750



Ángulo desconocido



El ángulo en C del triángulo ABC mide 70° . Se ha colocado en el lado $[BC]$ el punto D y en el lado $[AC]$ el punto E , de modo que:

$$BD = DE = EA.$$

Los segmentos $[BE]$ y $[AD]$ se cortan en F .

¿Cuál es la medida del ángulo $\widehat{AFB}$?