



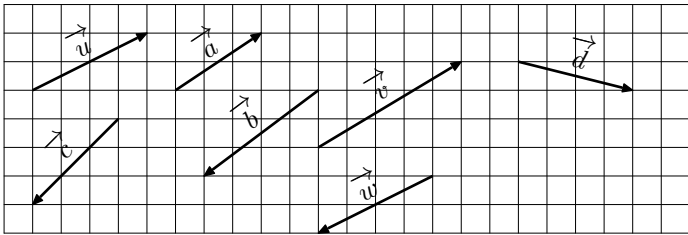
1. Vectores opuestos y restas

E.8530

Definición: Sea $\vec{u}$ un vector. Se denomina vector opuesto al vector $\vec{u}$ al vector denotado por $-\vec{u}$ definido por:

- la misma dirección que el vector $\vec{u}$
- el sentido opuesto al vector $\vec{u}$
- la misma longitud que $\vec{u}$

En el plano, consideramos los vectores 7 siguientes:



- 1 Nombra el vector o vectores opuestos al vector $\vec{u}$.
- 2 Traza un vector $\vec{e}$ opuesto al vector $\vec{d}$.

E.524

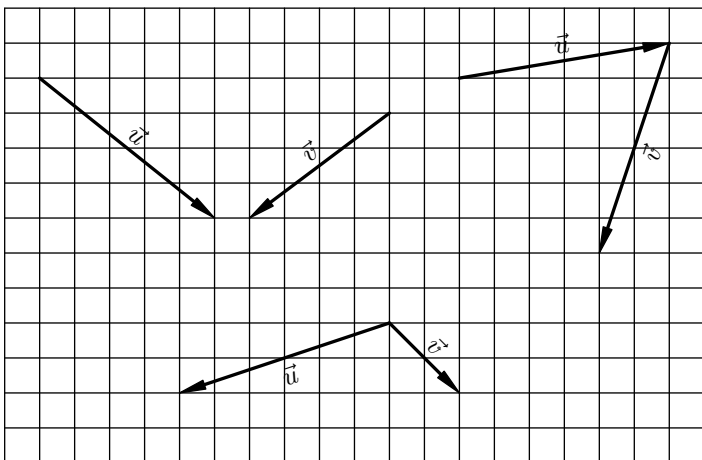
Definición: Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores. Se define la sustracción del vector $\vec{u}$ por el vector $\vec{v}$ mediante la relación:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

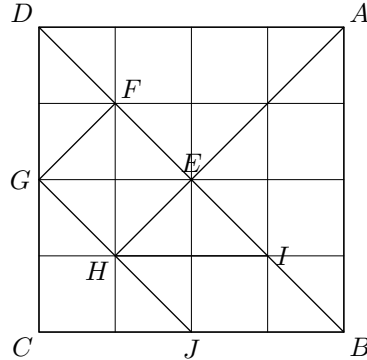
En otras palabras, nunca se realiza la sustracción por un vector, sino que se suma su opuesto

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores del plano.

- 1 ¿Qué se puede decir de la diferencia: $\vec{u} - \vec{u}$?
- 2 Para cada uno de los tres casos representados a continuación, dibuja una representación de la resta: $\vec{u} - \vec{v}$



E.495



Determina un representante de cada una de las sumas siguientes:

- 1 $\vec{EI} - \vec{GF}$
- 2 $\vec{HE} + \vec{BI} - \vec{JF}$
- 3 $\vec{FG} - \vec{IF} - \vec{GE}$

E.9342

Sea $ABCD$ un paralelogramo. Se anota:

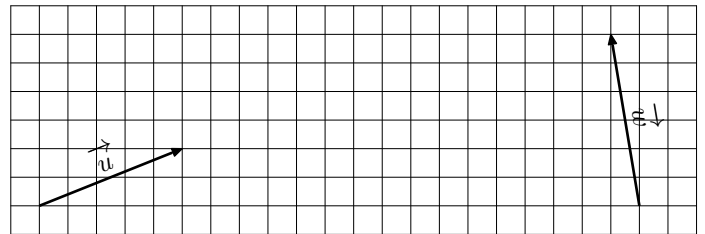
- I el punto medio del segmento $[AB]$;
- J el punto medio del segmento $[DC]$.

Determinar en cada caso un representante del vector resultante:

- a $\vec{AC} - \vec{AJ}$
- b $\vec{AB} + \vec{IJ} - \vec{DJ}$
- c $-\vec{DJ} - \vec{JB}$

E.8531

En el plano, considere los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ que se muestran a continuación.



Dibuja el vector $\vec{v}$ que cumple la relación:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$$

E.6488

Se marca el plano con una referencia (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) y los tres puntos:

$A(1+\sqrt{2}; 2-\sqrt{2})$; $B(\sqrt{2}-1; \sqrt{2}+1)$; $C(\sqrt{2}+3; 3-3\sqrt{2})$

- 1 Demuestre que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ son opuestos.
- 2 ¿Qué se puede decir del punto A en relación con el segmento $[BC]$?

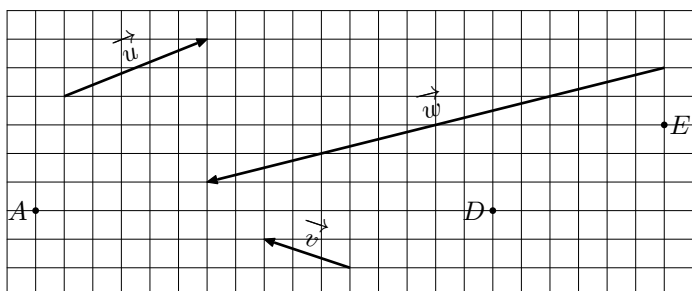
2. Multiplicación por un número entero

E.9713   

Proposición: en el plano, consideremos un vector $\vec{u}$ y un entero $n \in \mathbb{N}^*$. El vector $n \cdot \vec{u}$ se define como

$$n \cdot \vec{u} = \underbrace{\vec{u} + \vec{u} + \dots + \vec{u}}_{n \text{ fois}}$$

En el plano, considera los tres vectores y los tres puntos que se muestran a continuación:

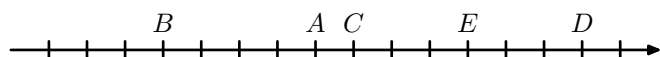


1) Sitúa el punto B tal que: $\vec{AB} = 3 \cdot \vec{u}$

2) Coloca el punto C tal que: $\vec{CD} = 2 \cdot \vec{v}$

3) Coloca el punto F tal que: $\vec{w} = 4 \cdot \vec{EF}$

E.515    Sobre una recta graduada, se sitúan los puntos A, B, C, D, E :



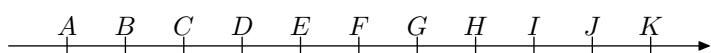
Para cada pregunta, completa correctamente las líneas de puntos:

a) $\vec{BC} = \dots \times \vec{AC}$ b) $\vec{ED} = \dots \times \vec{AC}$

c) $\vec{AC} = \dots \times \vec{CA}$ d) $\vec{ED} = \dots \times \vec{CA}$

e) $\vec{EA} = \dots \times \vec{AB}$ f) $\vec{BA} = \dots \times \vec{BE}$

E.9716    El siguiente dibujo muestra una línea recta con una escala regular.

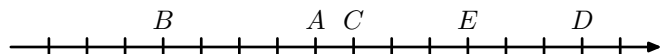


Completa las líneas de puntos con el número que falta:

a) $\vec{DG} = \dots \vec{DE}$ b) $\vec{CE} = \dots \vec{GI}$

c) $\vec{DB} = \dots \vec{DF}$ d) $\vec{EI} = \dots \vec{AC}$

E.5287    Sobre una recta graduada, situamos los puntos A, B, C, D, E :



Para cada pregunta, determina el valor del número k verificando la igualdad:

a) $\vec{BC} = k \cdot \vec{AC}$ b) $\vec{ED} = k \cdot \vec{AC}$

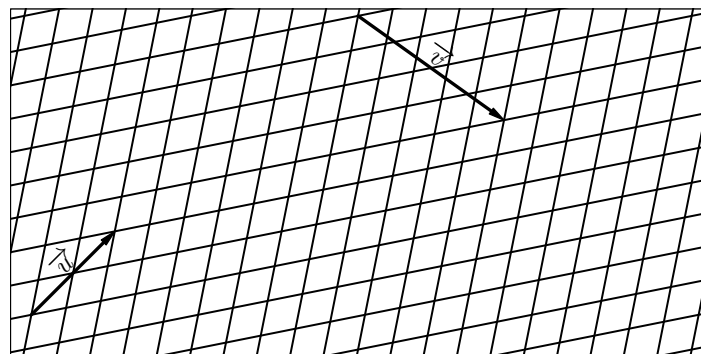
c) $\vec{AC} = k \cdot \vec{CA}$ d) $\vec{ED} = k \cdot \vec{CA}$

e) $\vec{EA} = k \cdot \vec{AB}$ f) $\vec{AC} = k \cdot \vec{BA}$

E.9811    Sean A, B, C tres puntos del plano no alineados:

Simplifique la expresión: $2 \cdot \vec{AB} - \vec{BA}$

E.2077    Consideremos, en el plano, los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a continuación:

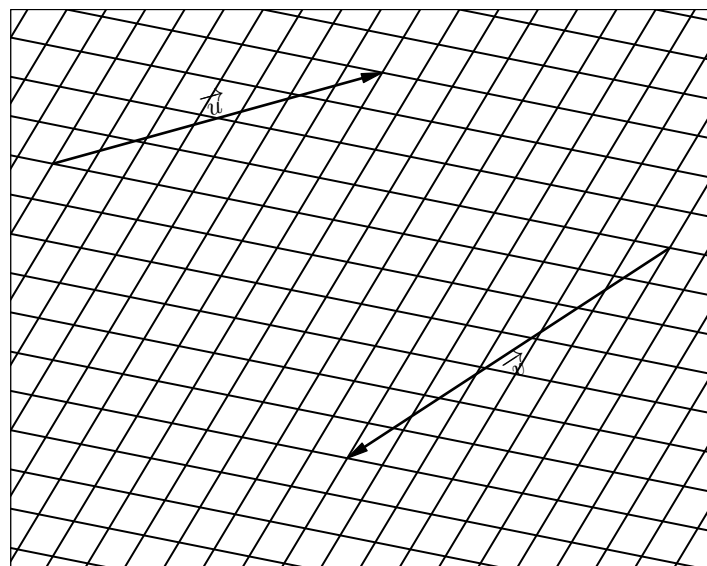


Dibuja en la cuadrícula un representante del vector $\vec{w}$ definido por: $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

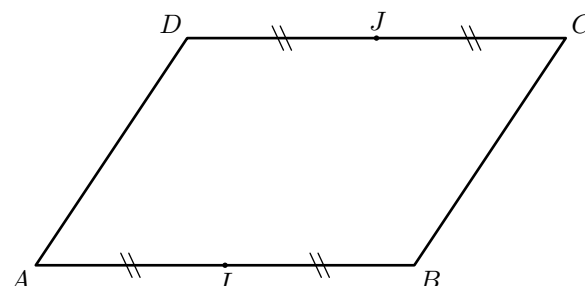
E.2106    Consideremos el siguiente plano con una cuadrícula regular. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores del plano:

1) Dibuja un $\vec{w}$ representativo del vector $\vec{v} - \vec{u}$.

2) Dibuja un $\vec{x}$ representativo del vector $4\vec{u} + 3\vec{v}$.



E.4813    Considera el paralelogramo $ABCD$ que se muestra a continuación donde los puntos I y J son los respectivos puntos medios de los segmentos $[AB]$ y $[CD]$.



Para cada pregunta, da sin justificar un vector igual a la expresión propuesta:

a) $2 \times \vec{DJ} + \vec{BD}$ b) $3 \cdot \vec{DJ} + 2 \cdot \vec{IA}$ c) $2 \cdot \vec{AJ} - \vec{BC}$

3. Multiplicación por un real

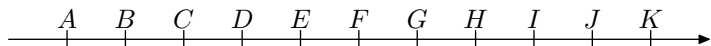
E.523



Definición: En el plano, se consideran un vector $\vec{u}$ y un número $k \in \mathbb{R}$. Los vectores $\vec{u}$ y $k \cdot \vec{u}$ son colineales y:

	$\vec{u}$ et $k \cdot \vec{u}$	$\ \vec{v}\ $
$k < 0$	sentido opuesto	$-k \times \ \vec{u}\ $
$k = 0$	$\times$	0
$k > 0$	mismo sentido	$k \times \ \vec{u}\ $

El dibujo siguiente representa una recta con una graduación regular.



Completa los puntos con el número que falta:

- a) $\vec{EF} = \dots\dots \vec{GJ}$ b) $\vec{BD} = \dots\dots \vec{CF}$
 c) $\vec{JI} = \dots\dots \vec{AC}$ d) $\vec{EF} = \dots\dots \vec{JG}$
 e) $\vec{AE} = \dots\dots \vec{FC}$ f) $\vec{CG} = \dots\dots \vec{KA}$

E.484 Si A y B son dos puntos del plano, sea I el punto medio del segmento $[AB]$

- Completa las líneas de puntos para comprobar la siguiente relación vectorial: $\vec{AI} + \vec{AI} = A \dots\dots$
- Copia y completa con las palabras “doble” y “mitad” las siguientes frases:

a) $\vec{AI}$ es ... de $\vec{AB}$ b) $\vec{AB}$ es ... de $\vec{AI}$
- En relación con la pregunta anterior, completa las líneas de puntos con el número que corresponda:

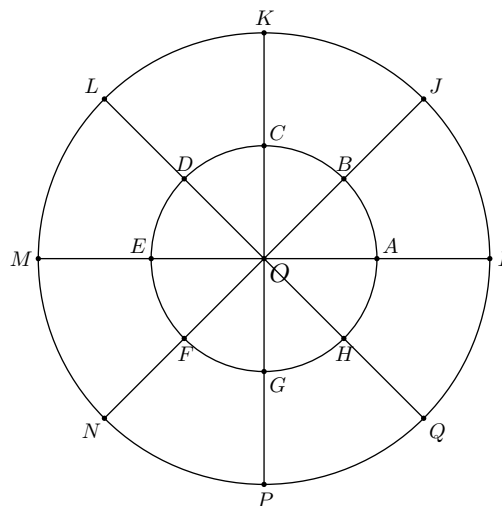
a) $\vec{AI} = \dots\dots \vec{AB}$ b) $\vec{AB} = \dots\dots \vec{AI}$

E.485 Sea ABC un triángulo cualquiera. Sitúa los puntos D y E verificando las siguientes relaciones vectoriales:

$$\vec{AD} = 2 \cdot \vec{AB} \quad ; \quad \vec{AE} = 2 \cdot \vec{AC}$$

Compara $\vec{BC}$ y $\vec{DE}$. Justifica.

E.6544 Consideremos dos círculos concéntricos con centro O y cuyo radio es el doble del otro:



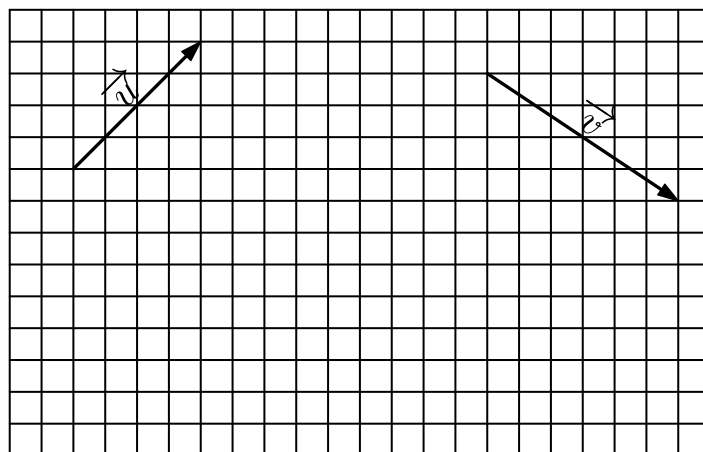
1 Justifique la igualdad vectorial: $\vec{LJ} = 2 \cdot \vec{DB}$

2 Sin justificación, complete las igualdades:

a) $\vec{ED} = \dots\dots = \frac{1}{2} \cdot \dots\dots = \frac{1}{2} \cdot \dots\dots$
 b) $\vec{FB} = 2 \cdot \dots\dots = 2 \cdot \dots\dots = \frac{1}{2} \cdot \dots\dots$

E.509 Consideremos a continuación los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

- Dibuja un vector $\vec{w}$ que represente desde: $3 \cdot \vec{u} + 1,5 \cdot \vec{v}$
- Dibuja un vector $\vec{y}$ que represente desde: $\vec{v} - 1,5 \cdot \vec{u}$



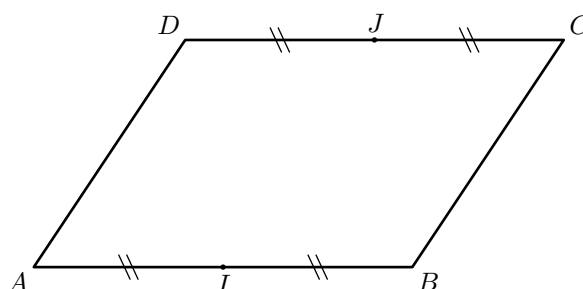
4. Simplificación y manipulación algebraica

E.9809 En el plano, considera los tres puntos A, B, C y define los dos vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$ por:

$$\vec{r} = 5 \cdot \vec{AC} - 2 \cdot \vec{BC} \quad ; \quad \vec{s} = 2 \cdot \vec{AB} + 3 \cdot \vec{AC}$$

Demuestra que los dos vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$ son iguales.

E.8532 Consideremos el paralelogramo $ABCD$ que se muestra a continuación, donde los puntos I y J son los respectivos puntos medios de los segmentos $[AB]$ y $[CD]$.



Utilizando los puntos de la figura, da un representante de la suma: $2 \cdot \overrightarrow{AJ} + 2 \cdot \overrightarrow{CB}$

E.8533 En el plano, considera A, B, C tres puntos no alineados en el plano.

5. Vectores y distributividad

E.2047

Proposición: en el plano, consideremos los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y un real k . Tenemos las dos identidades siguientes:
 $k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$ $k \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = k \cdot \vec{u} - k \cdot \vec{v}$

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores. Simplifica cada una de las siguientes sumas de vectores:

- (a) $3\vec{u} - 2\vec{v} + 2\vec{u} - \vec{v}$ (b) $2 \cdot (\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u}$
 (d) $-(\vec{u} + \vec{v}) + 2 \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ (e) $\frac{2}{3} \cdot (2 \cdot \vec{u} - \frac{3}{2} \cdot \vec{v}) - \frac{1}{6} \vec{u}$

E.2947 Sean A, B, C tres puntos no alineados en el plano:

Para cada pregunta, determina el valor del real k verificando la relación propuesta:

- (a) $2 \cdot \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ (b) $3 \cdot \overrightarrow{AB} - 3 \cdot \overrightarrow{CB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$

Para cada pregunta, determina el valor del real k que verifica la igualdad:

- (a) $3 \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = k \cdot \overrightarrow{AB}$
 (b) $3 \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} + 2 \cdot \overrightarrow{BA} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

E.2048

1 (a) Colocar tres puntos A, B y C no alineados en el plano.

(b) Trazar una representación de la suma:
 $\vec{u} = -\overrightarrow{AB} - 2 \cdot \overrightarrow{BC} + 2 \cdot \overrightarrow{AC}$

(c) ¿Qué conjetura se puede formular?

2 Establecer que: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

Indicación: Se utilizará la relación de Chasles:
 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

E.9720 En el plano, considera A, B, C tres puntos no alineados del plano.

Para cada pregunta, determina el valor del real k verificando la igualdad:

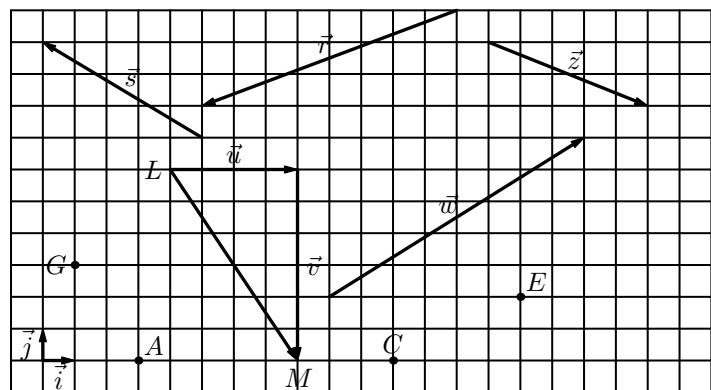
- (a) $2 \cdot \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AC}$
 (b) $\overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{AC} + 4 \cdot \overrightarrow{BC} = k \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})$

6. Descomposición en una base vectorial

E.937

Definición: vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ se dice que forman una base vectorial si tienen direcciones diferentes.

El gráfico siguiente muestra dos vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ con direcciones diferentes. El objetivo de este ejercicio es descomponer cualquier vector en el plano en función de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$.



1 (a) Dibuje un representante del vector $\vec{y}$ definido por:
 $\vec{y} = 4 \times \vec{i}$

(b) Localice el punto B tal que: $\overrightarrow{AB} = \vec{y}$

2 (a) Coloque el punto D tal que: $\overrightarrow{CD} = -\vec{i}$.

(b) Coloque el punto F tal que: $\overrightarrow{EF} = -3 \cdot \vec{j}$

3 (a) Coloque el punto H tal que: $\overrightarrow{GH} = 2 \cdot \vec{i}$.

(b) Coloque el punto K tal que: $\overrightarrow{HK} = 4 \cdot \vec{j}$.

(c) Complete la siguiente igualdad:
 $\overrightarrow{GK} = \dots \cdot \vec{i} + \dots \cdot \vec{j}$

4 Complete las siguientes líneas de puntos:

$$\vec{u} = \dots \cdot \vec{i} ; \vec{v} = \dots \cdot \vec{j}$$

$$\overrightarrow{LM} = \dots \cdot \vec{i} + \dots \cdot \vec{j}$$

5 Complete las siguientes líneas de puntos:

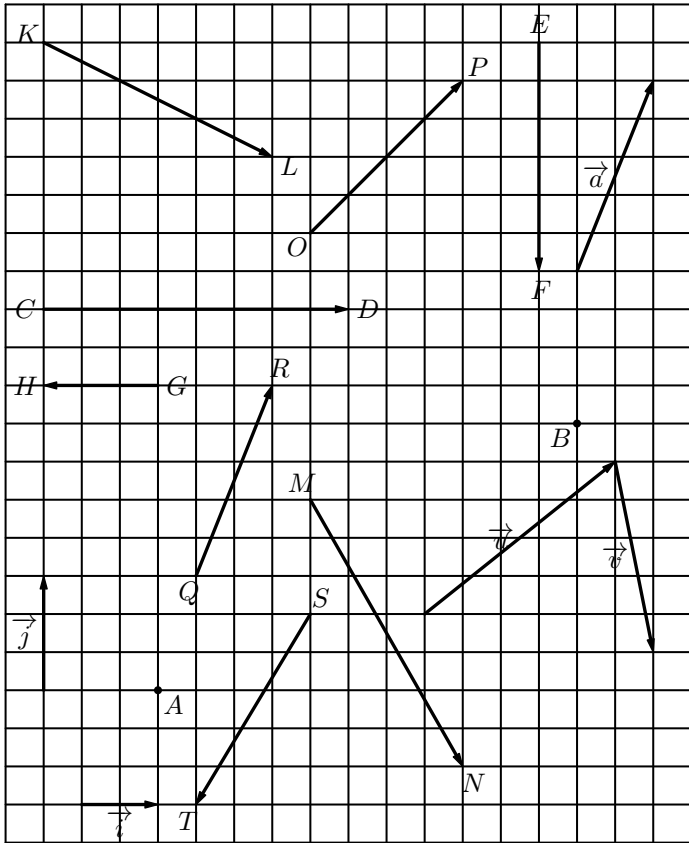
(a) $\vec{w} = \dots \cdot \vec{i} + \dots \cdot \vec{j}$

(b) $\vec{z} = \dots \cdot \vec{i} + \dots \cdot \vec{j}$

(c) $\vec{r} = \dots \cdot \vec{i} + \dots \cdot \vec{j}$

(d) $\vec{s} = \dots \cdot \vec{i} + \dots \cdot \vec{j}$

E.486



- 1 Coloca el punto W tal que: $\overrightarrow{AW} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.
Coloca el punto Z tal que: $\overrightarrow{BZ} = -2\vec{i} + \frac{5}{3}\vec{j}$

Los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son dos vectores de direcciones diferentes. Para cualquier vector $\vec{u}$ del plano, existen dos reales α y β que realizan la igualdad:

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{i} + \beta \cdot \vec{j}$$

Esta descomposición se denomina “combinación lineal”.

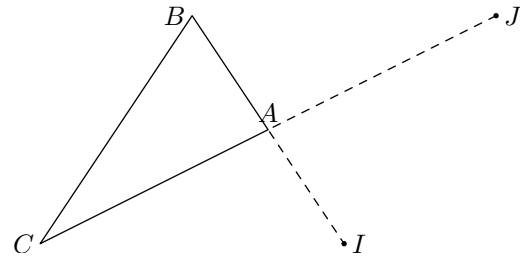
- 2 a Determine la combinación lineal de cada uno de los vectores representados en la gráfica en función de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$.
b ¿Deduce la igualdad de los vectores $\overrightarrow{QR}$ y $\vec{a}$?
3 a Dibuja un representante del vector $\vec{u} + \vec{v}$.
b Expresa gráficamente el vector $\vec{u} + \vec{v}$ utilizando los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$.

- c Encuentre esta descomposición utilizando las descomposiciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ obtenidas en la pregunta 2.

E.5290



En el plano, considere cualquier triángulo ABC . Sean I y J las imágenes respectivas de B y C por la simetría de centro A :



En el sistema de referencia $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$, dar las coordenadas de los siguientes vectores:

- a $\overrightarrow{IA}$ b $\overrightarrow{AJ}$ c $\overrightarrow{BC}$
d $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{IJ}$ f $\overrightarrow{IC}$

E.9808



En el plano, consideramos los tres puntos A, B, C . Consideramos el vector $\vec{u}$ definido por:

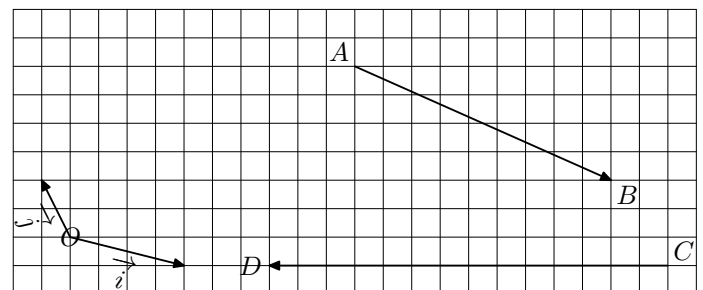
$$\vec{u} = \frac{5}{6} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CA}$$

- 1 Expresar el vector $\vec{u}$ en función de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:
2 En el sistema de coordenadas $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$, dar las coordenadas del vector $\vec{u}$.

E.7215



En el plano, consideramos el punto de referencia $(O; \vec{i}; \vec{j})$ y los dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ no colineales representados a continuación:



Sin justificación, dé las descomposiciones de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ en la base $(\vec{i}; \vec{j})$.

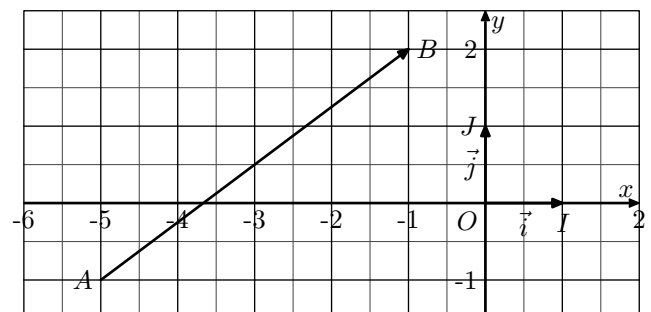
7. Base vectorial e introducción a las operaciones de coordenadas

E.8534



Definición: en el plano provisto de un sistema de coordenadas $(O; I; J)$, se denomina vector unitario de abscisas (resp. de ordenadas), notado $\vec{i}$ (resp. $\vec{j}$), el vector $\overrightarrow{OI}$ (resp. $\overrightarrow{OJ}$).

En el plano provisto de un sistema de coordenadas $(O; I; J)$, consideramos los dos puntos A y B representados a continuación:

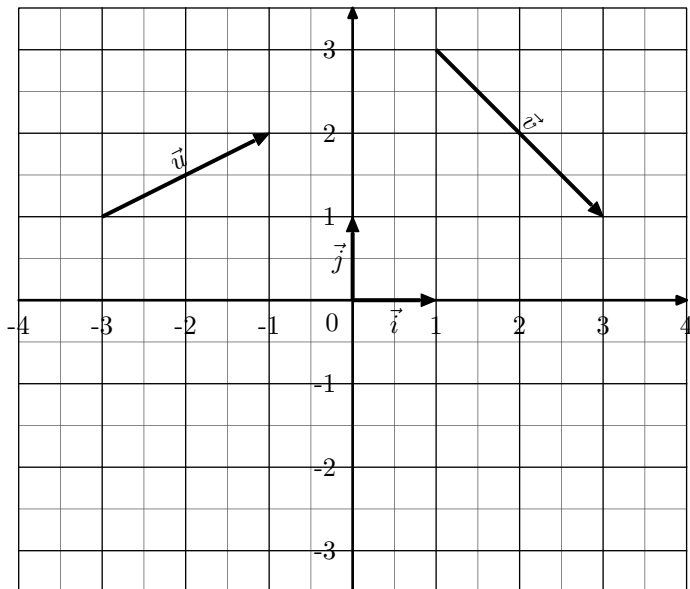


- 1 Descomponer el vector $\overrightarrow{AB}$ en la base vectorial $(\vec{i}; \vec{j})$.

Es decir, completar los puntos suspensivos de la igualdad: $\vec{AB} = \dots \times \vec{i} + \dots \times \vec{j}$

- 2 a Dar las coordenadas de los puntos A y B .
- b Determinar las coordenadas del vector $\vec{AB}$.
- 3 ¿Qué comparación se puede hacer entre las coordenadas de un vector y su descomposición en la base vectorial de los vectores unitarios del sistema de coordenadas?

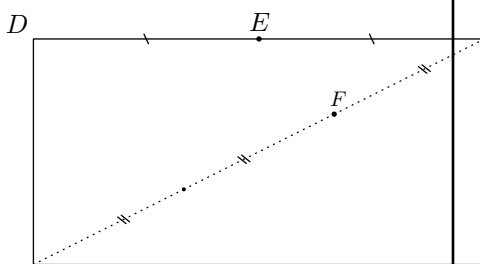
E.527 Se dota al plano de un sistema de coordenadas ortonormado $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



- 1 Indica, sin justificación, las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- 2 a Traza una representación del vector $\vec{w}$ definido por: $\vec{w} = 3 \cdot \vec{u}$.
- b Indica gráficamente las coordenadas de $\vec{w}$.
- c Compara las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$.
- 3 a Traza una representación del vector $\vec{z}$ definido por: $\vec{z} = \vec{u} + \vec{v}$.
- b Representa gráficamente y da las coordenadas de $\vec{z}$.
- c Compara las coordenadas del vector $\vec{z}$ con respecto a las de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

8. Coordenadas de los puntos

E.9814 Considera el rectángulo $ABCD$ que



se muestra a continuación A

Consideremos el plano provisto del sistema de referencia

$(A; \vec{AB}; \vec{AD})$.

- 1 a Completa las líneas de puntos en la igualdad: $\vec{AC} = \dots \vec{AB} + \dots \vec{AD}$
Deduce las coordenadas del punto C .
- b Dar las coordenadas de los puntos A , B , D .
- 2 El punto E es el punto medio del segmento $[CD]$. Determina las coordenadas del punto E .
- 3 El F queda definido por la igualdad: $\vec{CF} = \frac{1}{3} \vec{CA}$
Determina las coordenadas del punto F .

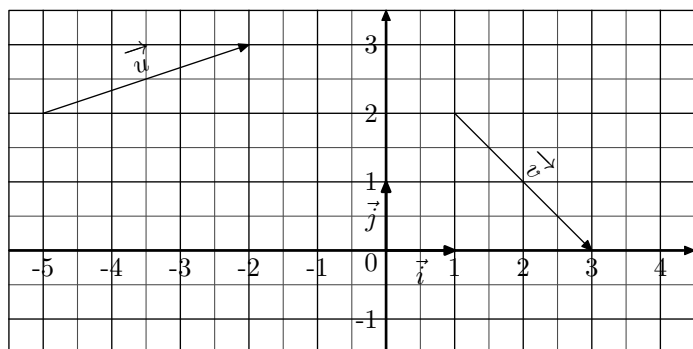
9. Operaciones sobre coordenadas

E.8535

Propuesta: Sean $\vec{u}(x; y)$ y $\vec{v}(x'; y')$ dos vectores y k un número real ($k \in \mathbb{R}$).

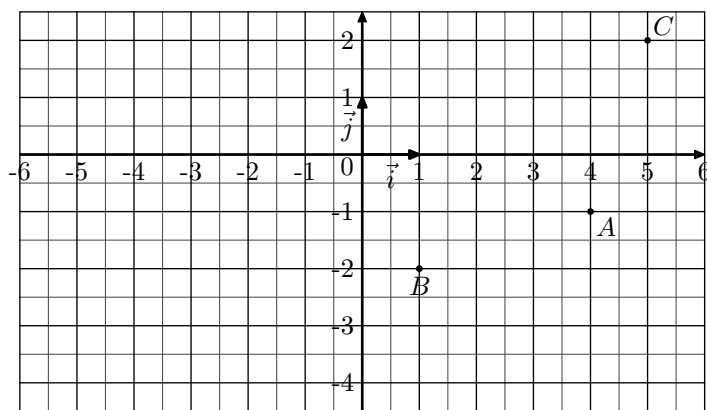
- El vector $-\vec{u}$, opuesto al vector $\vec{u}$, tiene como coordenadas: $-\vec{u} = (-x; -y)$
- La suma $\vec{u} + \vec{v}$ tiene como coordenadas: $\vec{u} + \vec{v} (x + x'; y + y')$
- El vector $k \times \vec{u}$ tiene como coordenadas: $k \times \vec{u} (k \times x; k \times y)$

En el plano provisto del sistema de coordenadas $(O; \vec{i}; \vec{j})$, consideramos los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ representados a continuación:



- 1 Da las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- 2 Sea $\vec{w}$ el vector definido por: $\vec{w} = \vec{u} + 2 \cdot \vec{v}$
 - a Da las coordenadas del vector $\vec{w}$.
 - b Traza el vector $\vec{w}$.
- 3 Sea $\vec{z}$ el vector definido por: $\vec{z} = \vec{u} - \vec{v}$
 - a Da las coordenadas del vector $\vec{z}$.
 - b Traza el vector $\vec{z}$.

E.8536 Consideremos el sistema de coordenadas ortonormales $(O; \vec{i}; \vec{j})$ y los tres puntos A, B, C representados a continuación:



- 1 Indique, sin justificación, las coordenadas de los vectores: $\vec{AB}$; $\vec{BC}$; $\vec{AC}$
 - a
 - b Determine las coordenadas del vector $\vec{u}$ definido por: $\vec{u} = 3 \cdot \vec{AB} - \vec{CB} + \vec{CA}$
- 2 Determinar el único número real k ($k \in \mathbb{R}$) que verifica: $\vec{u} = k \times \vec{AB}$

E.8537 En el plano provisto de una referencia $(O; \vec{i}; \vec{j})$, consideramos los tres puntos A, B, C definidos por:

$$A(2; -3) ; B(-4; 2) ; C(0; -1)$$

- 1 Determinar las coordenadas del vector $\vec{u}$ definido por: $\vec{u} = 2 \times \vec{AB} + 2 \times \vec{BC} + \vec{AC}$
- 2 ¿Qué expresión simplificada admite el vector $\vec{u}$?

10. Operaciones y hallar las coordenadas de un punto

E.516 Consideremos un plano provisto de un sistema de coordenadas $(O; \vec{i}; \vec{j})$ cualquiera y los tres puntos siguientes, determinados por sus coordenadas: $A(2; 1)$; $B(3; 2)$

- 1 Determina las coordenadas del vector $3 \cdot \vec{AB}$.
- 2 Determina las coordenadas del punto D tal que: $\vec{AD} = 3 \cdot \vec{AB}$.

E.307 En el plano provisto de un sistema de coordenadas $(O; \vec{i}; \vec{j})$, se consideran los tres puntos A, B y C con coordenadas:

$$A(2; 1) ; B(-1; 3) ; C(0; -2)$$

Determina las coordenadas del punto M que cumple la siguiente relación vectorial: $\vec{CM} = 2 \cdot \vec{AB}$

E.8539 Considera el plano provisto de un sistema de referencia $(O; \vec{i}; \vec{j})$ cualquiera y los tres puntos siguientes determinados por sus coordenadas: $A(2; 1)$; $B(3; 2)$; $C(-1; -1)$

- 1 Determine las coordenadas del vector definido por la expresión: $2 \cdot \vec{AB} - 4 \cdot \vec{AC}$
- 2 Determina las coordenadas del punto E verificando la relación: $\vec{AE} = 2 \cdot \vec{AB} - 4 \cdot \vec{AC}$

E.8201 Consideremos el plano provisto de un sistema de referencia $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Considera los tres puntos A, B, C verificando las siguientes relaciones: $2 \vec{OA}(4; 6)$; $3 \vec{AB}(9; 3)$; $2 \vec{BC} - \vec{OB} = \vec{u}$ donde el vector $\vec{u}$ tiene las coordenadas: $\vec{u}(3; 3)$

Determina las coordenadas de los puntos A, B y C .

E.8538    En el plano provisto de un sistema de referencia $(O; \vec{i}; \vec{j})$, considera los tres puntos A , B y C de coordenadas:

$$A(2;1) \quad ; \quad B(-1;3) \quad ; \quad C(0;-2)$$

Determina las coordenadas del punto N verificando la siguiente relación vectorial: $4\vec{AN} - \vec{BN} - 2\vec{CN} = \vec{0}$

E.518    Consideremos un plano provisto de un sistema de coordenadas $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ortonormado y los tres puntos A , B y C , cuyas coordenadas son, respectivamente, $(-2;1)$, $(0;3)$ y $(3;0)$.

- 1
 - a) Determina las coordenadas de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.
 - b) Determina las coordenadas del vector $\vec{AB} + \vec{AC}$.

11. Colinealidad vectorial

E.8543   

Definición: Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores distintos de cero del plano.

Dos vectores se denominan **colineales** si existe un número real k tal que: $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$

El número real k se denomina **coeficiente de colinealidad** de $\vec{u}$ con respecto a $\vec{v}$.

- 1 Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que: $2\vec{u} = 3\vec{v}$
Justifique que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales y que su coeficiente de colinealidad es $\frac{3}{2}$.
- 2 Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.
Justifique que estos dos vectores son colineales.
- 3 Para cada una de las preguntas siguientes, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales. Determinar el valor del coeficiente de colinealidad de $\vec{u}$ con respecto a $\vec{v}$:
 - a) $\frac{1}{2} \cdot \vec{u} = \frac{3}{4} \cdot \vec{v}$
 - b) $3 \cdot \vec{u} - 2 \cdot \vec{v} = \vec{0}$

- 2 Se considera el punto D que cumple la relación:
 $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$

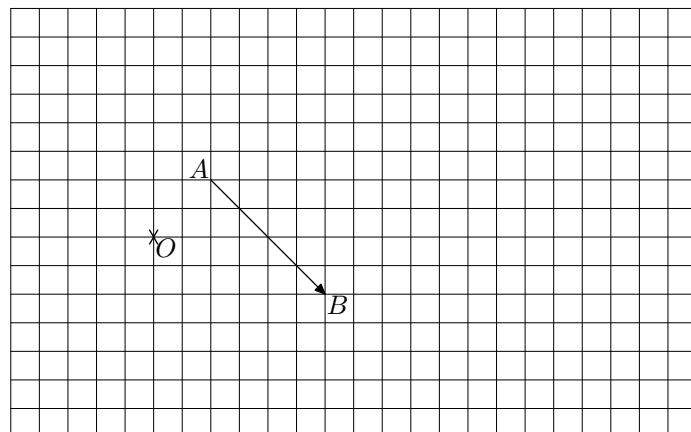
- a) Denotando por $(x_D; y_D)$ las coordenadas del punto D , justifica que se cumplen las dos igualdades:

$$\begin{cases} x_D + 2 = 7 \\ y_D - 1 = 1 \end{cases}$$
- b) A partir de ahí, deducir las coordenadas del punto D .

E.11715   Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère les trois points A , B , C :
 $A(5; -2) \quad ; \quad B(-3; 1) \quad ; \quad C(4; 4)$

Déterminer les coordonnées du point M tel que:
 $\vec{CM} = 4 \cdot \vec{AB}$

E.6998    En el plano, consideramos los tres puntos O , A , B siguientes y el vector $\vec{AB}$:



- 1
 - a) Traza el vector $\vec{A'B'}$, imagen del vector $\vec{AB}$, mediante la homotecia con centro O y relación 3.
 - b) Traza el vector $\vec{A''B''}$ imagen del vector $\vec{AB}$ mediante la homotecia de centro O y relación $-\frac{1}{2}$.
- 2 ¿Qué se puede decir de los vectores $\vec{AB}$, $\vec{A'B'}$ y $\vec{A''B''}$?

E.520    Consideremos el plano provisto de un sistema de coordenadas $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Para cada pregunta, determina si los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales. Si lo son, indica el coeficiente de colinealidad de $\vec{u}$ con respecto a $\vec{v}$:

- a) $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$
- b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$
- c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} 4,2 \\ 6,3 \end{pmatrix}$
- d) $\vec{u} \begin{pmatrix} 0,7 \\ 4,1 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} -2,8 \\ 16,4 \end{pmatrix}$

E.5295    Para cada pregunta, indique si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales y, en caso afirmativo, indique el coeficiente de colinealidad del vector $\vec{u}$ con respecto al vector $\vec{v}$:

- a) $\vec{u}(-2; -10)$ et $\vec{v}(4; 20)$
- b) $\vec{u}(0; 5)$ et $\vec{v}(-5; 0)$

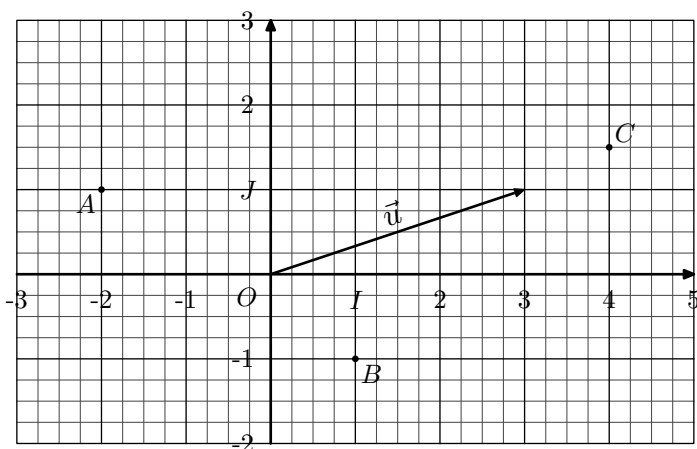
E.8202 🔑 🍷 📖 En el plano provisto de un sistema de referencia $(O; \vec{i}; \vec{j})$, considera los cinco puntos: $A(2; -2)$; $B(11; -14)$; $C(-3; 1)$; $D(5; 3)$; $E(12; -19)$. De los cuatro vectores anteriores, sólo uno es colineal con el vector $\vec{AB}$. ¿Cuál es? Justifica tu respuesta.

$$\vec{BC} ; \vec{CD} ; \vec{DE} ; \vec{CE}$$

E.9813 🔑 🍷 📖 Para cada pregunta, indique si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales y, en caso afirmativo, indique el coeficiente de colinealidad del vector $\vec{u}$ con respecto al vector $\vec{v}$:

- a) $\vec{u}(-6; 9)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ b) $\vec{u}\left(-\frac{4}{3}; 4\right)$ et $\vec{v}(3; -9)$
 c) $\vec{u}\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{5}\right)$ et $\vec{v}(5; 6)$ d) $\vec{u}(6; -5)$ et $\vec{v}\left(\frac{14}{5}; -2\right)$

E.6624 🔑 🍷 📖 Se da al plano un sistema de referencia $(O; I; J)$ y se consideran los puntos A , B y C siguientes:



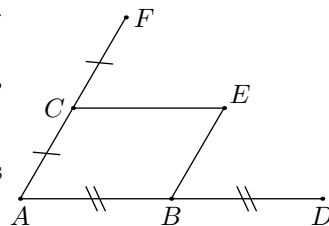
- 1 a) Dar las coordenadas de los puntos A , B y C .
 b) Determinar las coordenadas de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{BC}$.
 c) Deduce las coordenadas del vector $\vec{v}$ definido por:

$$\vec{v} = \vec{AB} + 2 \cdot \vec{BC}$$
- 2 Justifica que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales.

E.500 🔑 🍷 📖

En el plano, considera los puntos A , B , C , D y E tales que:

- C es el centro de $[AF]$; B es el centro de $[AD]$.
- El cuadrilátero $ABEC$ es un paralelogramo.



El plano se ajusta con el sistema de referencia $(A; B; C)$ cualquiera.

- 1 En el sistema de referencia $(A; B; C)$, da, sin justificar, las coordenadas de los seis puntos de este plano.
 2 Justifica que los puntos E , F y D están alineados.

12. Colinealidad y manipulación algebraica

E.9718 🔑 🍷 📖 Sean A , B , C y D cuatro puntos del plano que verifican la relación:

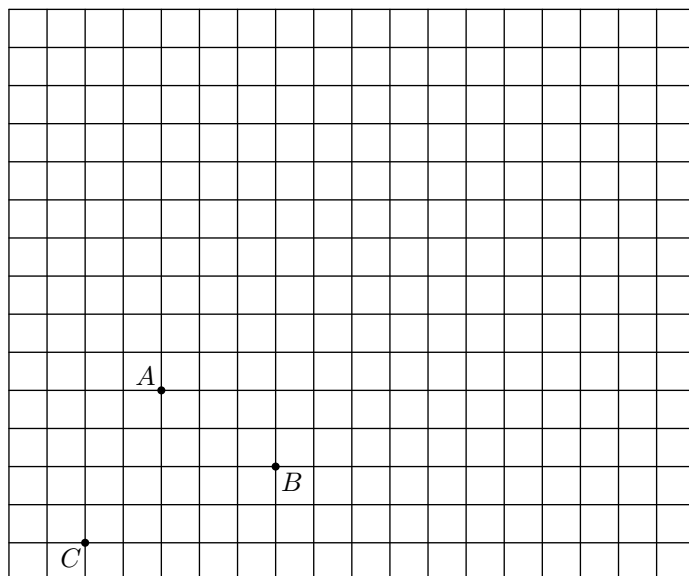
$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$$

Demostrar que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ son colineales.

E.9812 🔑 🍷 📖 En cada una de las preguntas siguientes, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales. Determine el valor del coeficiente de colinealidad de $\vec{u}$ con respecto a $\vec{v}$:

- a) $3 \cdot (\vec{u} - 2 \cdot \vec{v}) = \vec{0}$ b) $-2 \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 2 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v}$

E.4812 🔑 🍷 📖 Consideremos los tres puntos A , B y C que se muestran en la cuadrícula siguiente:



- 1 a) Coloca el punto M que cumpla la relación vectorial:

$$\vec{AM} = 2 \cdot \vec{CA}$$

(b) Colocar el punto N que verifica la relación vectorial:
 $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{CB}$

(c) ¿Qué conjetura se puede hacer sobre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{MN}$?

(2) Demostrar, mediante el cálculo vectorial, que se cumple la igualdad:
 $\overrightarrow{MN} = 3 \cdot \overrightarrow{AB}$

E.9717 Sean A, B, C y D cuatro puntos del plano tales que:
 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + 2 \cdot \overrightarrow{CB} = \vec{0}$

(1) Establezca la igualdad: $\overrightarrow{AB} = -2 \cdot \overrightarrow{CD}$

(2) ¿Qué se puede decir de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$?

E.510 Sean A, B, C y D cuatro puntos del plano que verifican la relación:

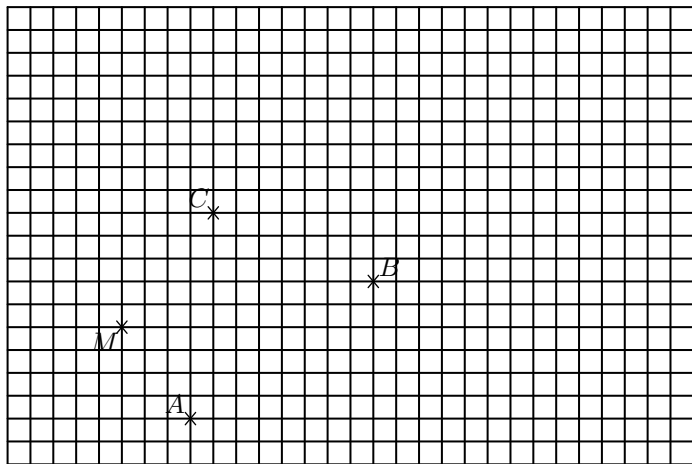
$$\overrightarrow{AC} - 3 \cdot \overrightarrow{BD} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

Demostrar que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son colineales.

E.501 Considera en cada caso tres puntos A, B, C del plano verificando una relación vectorial. Demuestra que en cada caso los puntos A, B y C están alineados:

(a) $3 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -2 \cdot \overrightarrow{AC}$ (b) $-2 \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$

E.2917 En el plano que se muestra a continuación con una cuadrícula, considera los puntos A, B, C, M :



Dar un representante del vector $\vec{u}$ definido por la relación:

$$\vec{u} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$$

(1) Coloca el punto N tal que: $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$.

(2) Definimos el vector $\vec{v}$ definido por: $\vec{v} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AC}$
 Demostrar que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales.

E.5293 Sean A, B, C y D cuatro puntos del plano tales que:
 $5 \cdot \overrightarrow{AD} = 2 \cdot \overrightarrow{AC} + 3 \cdot \overrightarrow{BD}$

Demostrar que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son colineales.

E.9719 Sean A, B, C y D cuatro puntos del plano tales que:
 $3 \cdot \overrightarrow{AD} + 4 \cdot \overrightarrow{BC} = 7 \cdot \overrightarrow{AC}$

Demuestre que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son colineales.

E.8122 Consideremos los cuatro puntos A, B, C y D verificando la relación vectorial:

$$2 \cdot \overrightarrow{DC} + 5 \cdot \overrightarrow{CB} + 5 \cdot \overrightarrow{AD} - 3 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

Demostrar que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son colineales.

E.2055 Sean A, B, C tres puntos del plano que verifican la relación:

$$-\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{5}{2} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

(1) Demuestre que estos tres puntos verifican: $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$

(2) ¿Qué se puede decir de los puntos A, B, C ?

E.5343 En el plano, considera un triángulo ABC no aplanado. Considera los tres puntos M, N y P definidos por:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{BA} ; \quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} ; \quad \overrightarrow{AP} = 2 \cdot \overrightarrow{AC}$$

Demuestra que los puntos M, N y P están alineados.

E.2903 Sean A, B, C tres puntos del plano. Demostrar que el vector $\vec{u}$ definido a continuación es colineal con el vector $\overrightarrow{AC}$ por:

$$\vec{u} = 3 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{5}{3} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{7}{3} \cdot \overrightarrow{BA}$$

E.5294 Consideremos un triángulo ABC y M un punto perteneciente al lado $[AB]$ verificando la relación: $AM = \frac{2}{3} \cdot AB$

P es el punto de intersección de la recta (BC) y la paralela a (AC) que pasa por el punto M . N es el punto de intersección de las rectas (AC) y la paralela a (AB) que pasa por el punto P

(1) Haz una representación de esta configuración.

(2) Demuestra que: $AN = \frac{1}{3} \cdot AC ; \quad CP = \frac{2}{3} \cdot CB$.

(3) Descomponga los vectores siguientes según los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

(a) $\overrightarrow{AP}$ (b) $\overrightarrow{MC}$

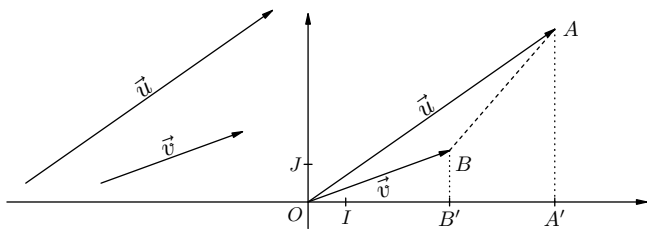
(4) Descompone los vectores de abajo en función de los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$:

(a) $\overrightarrow{AP}$ (b) $\overrightarrow{NM}$

13. Introducción al criterio de colinealidad

E.8364    En el plano provisto de una referencia $(O; I; J)$, consideramos dos vectores $\vec{u}(x; y)$ y $\vec{v}(x'; y')$ tales que:

$$0 < x' < x \quad ; \quad 0 < y' < y$$



Consideramos los dos puntos A y B tales que:

$$\vec{OA} = \vec{u} \quad ; \quad \vec{OB} = \vec{v}$$

- 1 **a** Expresar las áreas de las siguientes figuras en función de x, x', y y y' :
 $OB B'$; OAA' ; $AA'B'B$
- b** Deduzca la expresión del área del triángulo OAB en función de x, x', y y y' .
- 2 **a** ¿Qué se puede decir de los puntos O, A, B cuando:
 $x \times y' - x' \times y = 0$?
- b** ¿Es cierta la recíproca?

14. Criterios de colinealidad

E.8541   

Definición: sea $\vec{u}(x; y)$ y $\vec{v}(x'; y')$, se denomina **determinante de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$** , notado $\det(\vec{u}; \vec{v})$, definido por:

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = x \times y' - x' \times y$$

Para cada uno de los pares de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ definidos a continuación, determine el valor de $\det(\vec{u}; \vec{v})$:

- a** $\vec{u}(2; -1)$; $\vec{v}(3; 4)$ **b** $\vec{u}(-5; 1)$; $\vec{v}(2; -2)$

E.11689    Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points: $A(-3; 2)$; $B(1; 4)$; $C(5; -1)$

Déterminer la valeur de $\det(\vec{AB}; \vec{AC})$.

E.5288   

Proposition: En el plano provisto de un sistema de referencia, considerar los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales entre sí si, y sólo si, su determinante es cero.

Consideremos el plano con el punto de referencia $(O; \vec{i}; \vec{j})$ y los cuatro puntos:

$$A(3; -5) \quad ; \quad B(1; -1) \quad ; \quad C(13; 2) \quad ; \quad D(18; -8)$$

Establezcamos que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ son colineales.

E.504    Consideremos el plano provisto de un sistema de coordenadas $(O; \vec{i}; \vec{j})$ y de los dos vectores:

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1-2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}+\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 6-\sqrt{3} \\ -3-\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

15. Paralelismo y colinealidad

E.499    En el plano, se considera el sistema de coordenadas $(O; \vec{i}; \vec{j})$ y los puntos:

$$O(49; -100) \quad ; \quad P(14; 5) \quad ; \quad Q(1; -85) \quad ; \quad R(-58; 92)$$

Determina si las rectas (OP) y (QR) son paralelas.

Demostrar que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales.

E.512    En el plano provisto de un punto de referencia $(O; \vec{i}; \vec{j})$, se consideran los dos vectores:

$$\vec{u} \begin{pmatrix} (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \\ 1 - \sqrt{10} \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} \\ \sqrt{2} - 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Demostrar que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales.

E.8542    En el plano provisto de un sistema de referencia $(O; \vec{i}; \vec{j})$, considera los dos vectores colineales:

$$\vec{u}(x + y\sqrt{2}; 4) \quad ; \quad \vec{v}(2\sqrt{2} - 1; -2)$$

Donde x y y son dos enteros relativos.

Determina los valores de x y y .

E.7888    Dotamos al plano de un sistema de referencia $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ortonormal y consideramos los puntos:

$$A\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right) \quad ; \quad B\left(1; \frac{5}{6}\right) \quad ; \quad C\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{6}\right)$$

Demostrar que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ no son dos vectores colineales.

E.11716   Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère les trois points:
 $A(5; 1)$; $B(9; 3)$; $C(-9; -5)$

- 1 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
- 2 Est ce que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires? Justifier votre réponse.

E.5289    En el plano provisto de un sistema de referencia $(O; \vec{i}; \vec{j})$, considera los tres puntos:

$$A(-3; -1) \quad ; \quad B(1; 5) \quad ; \quad C(-1; 2)$$

Demuestra que los puntos A, B, C están alineados.

E.6507    En el plano provisto de un sistema de referencia $(O; \vec{i}; \vec{j})$, considera los cuatro puntos:

$$A(2; -5) ; B(-2; 2) ; C(-4; 5) ; D\left(2; -\frac{11}{2}\right)$$

Justifica que las rectas (AB) y (CD) son paralelas.

E.5296    En un plano con un sistema de coordenadas ortonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Considera los siguientes cuatro puntos del plano:

$$A(-\sqrt{2}; -\sqrt{6}) ; B(2\sqrt{2}; 0) ; C(-2\sqrt{3}; 3) ; D(0; 5)$$

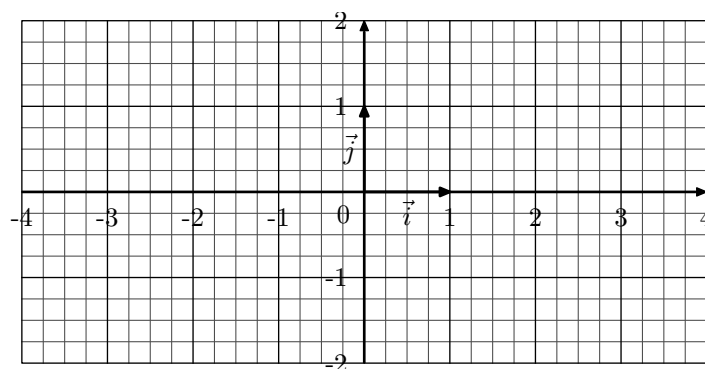
Demuestra que las rectas (AB) y (CD) son paralelas.

E.8540    Al plano se le da un sistema de coordenadas $(O; \vec{i}; \vec{j})$ y los tres puntos:

$$A(2\sqrt{2}+1; 3+2\sqrt{2}) ; B(\sqrt{2}-1; \sqrt{2}+1) ; C(\sqrt{2}+5; \sqrt{2}+7)$$

Demuestra que los puntos A , B y C están alineados.

E.5313    Consideremos el plano provisto del sistema de referencia $(O; \vec{i}; \vec{j})$ que se muestra a continuación:



Considera los cuatro vectores siguientes:

$$\vec{u}\left(\frac{9}{4}; -\frac{3}{4}\right) ; \vec{v}\left(\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right) ; \vec{w}\left(-\frac{15}{4}; \frac{5}{4}\right)$$

- 1 Representa los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ con el punto O como origen.
- 2 a Conjetura la colinealidad de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ entre sí.
- b Establece tu conjetura.

E.1144    En un plano con un sistema de coordenadas ortonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, considera los puntos:

$$D(5; -2) ; E(-3; 10) ; F(-3; -2) ; G(3; -11)$$

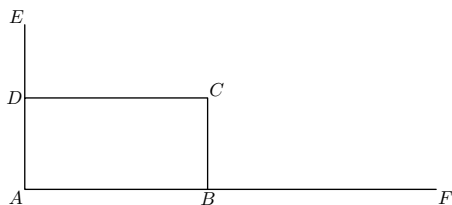
Demuestra que las rectas (DE) y (FG) son paralelas.

Pista: para demostrar que las rectas (DE) y (FG) son paralelas, basta con demostrar que los vectores $\vec{DE}$ y $\vec{FG}$ son colineales.

16. Modelización y colinealidad

E.9806    En el plano, consideramos el rectángulo $ABCD$ tal que $AB=4\text{ cm}$ y $AD=2\text{ cm}$ y los dos puntos E y F verifican:

- $F \in [AB]$ y $AF=9\text{ cm}$;
- $E \in [AD]$ y $AE=3,6\text{ cm}$.

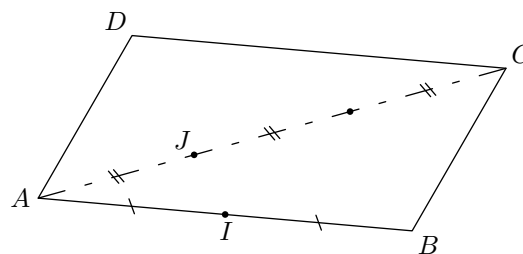


Se dota al plano de la referencia $(A; \vec{AB}; \vec{AD})$.

- 1 a Completa las siguientes igualdades:
 $\vec{AE} = \dots \vec{AD} ; \vec{AF} = \dots \vec{AB}$
- b En la referencia $(A; \vec{AB}; \vec{AD})$, dar las coordenadas de los seis puntos de este plano.
- 2 Determinar las coordenadas de los vectores $\vec{CE}$ y $\vec{CF}$.
- 3 Deduzca que los puntos C , E y F están alineados.

E.5824    En el plano, considera el paralelogramo $ABCD$. Sea I el punto medio del segmento $[AB]$ y J el punto del segmento $[AC]$ que satisface la relación:

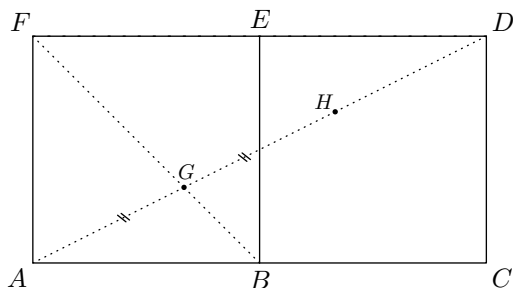
$$AJ = \frac{1}{3} \cdot AC$$



Se da al plano el sistema de referencia $(A; \vec{AB}; \vec{AD})$.

- 1 Determina las coordenadas de los puntos D , I y J .
- 2 Demostrar que los puntos D , I y J están alineados.

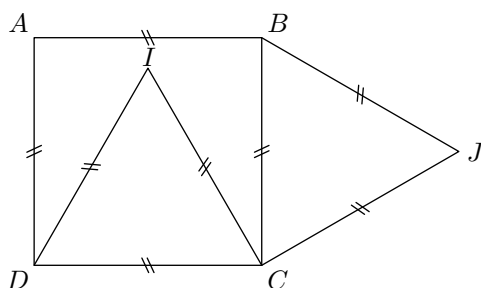
E.7214    Considera la siguiente figura formada por los dos cuadrados $ABEF$ y $BCDE$:



Sea G el punto de intersección de las rectas (AD) y (BF) y H el punto del plano que verifica la relación vectorial $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GH}$

- Utilizando el sistema de referencia $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AF})$, determine las coordenadas del punto G .
- Establece que los puntos E , H y C están alineados.

E.5394    Considera la figura anterior compuesta por un cuadrado $ABCD$ y dos triángulos equiláteros DIC y BJC :



En esta pregunta se tendrá en cuenta en la evaluación cualquier prueba de investigación, por incompleta que sea, o iniciativa por fallida que sea.

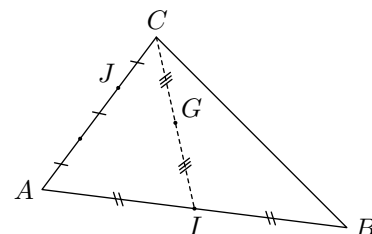
Demuestra que los puntos A , I , J están alineados.

(En un triángulo equilátero de lado a , supón que todas sus alturas tienen longitud $\frac{a\sqrt{3}}{2}$).

E.5393   

Consideremos el triángulo opuesto donde I y G son los respectivos puntos medios de los segmentos $[AB]$ y $[CI]$, el punto J viene definido por la relación:

$$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CA}$$



Consideremos la base vectorial $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

- Expresa los vectores $\overrightarrow{AI}$ y $\overrightarrow{AJ}$ en la base vectorial $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.
- Establecer que la descomposición vectorial del vector $\overrightarrow{AG}$:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$$
- Deducir la alineación de los puntos B , G , J .

17. Colinealidad y búsqueda de coordenadas

E.5291    Consideremos el plano provisto de un sistema de referencia $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$. Sean A , B , C y D cuatro puntos del plano con coordenadas:

$$A(-5; 1) ; B(2; 4) ; C(-1; -2) ; D(3; y_D)$$

Determina las coordenadas del punto D tal que las rectas (AB) y (CD) son paralelas y el punto D tiene como abscisa 3.

E.8200    Consideremos el plano provisto de un sistema de referencia $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$. Sean A , B y C tres puntos del plano con coordenadas respectivamente: $(4; -1)$; $(1; 3)$; $(1; -2)$

Determina las coordenadas del punto D tal que las rectas (AB) y (CD) son paralelas y el punto D tiene como abscisa 3.

E.5314    En un plano dotado de un sistema de referencia $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, considera los tres puntos A , B , C de coordenadas:

$$A(1; 2) ; B\left(-2; \frac{5}{2}\right) ; C(-1; 4)$$

Determinar el valor de x para que el punto D de coordenadas $(x; 3)$ es tal que las rectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son colineales.

E.5822    En el plano provisto de un sistema de referencia $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ ortonormal, considera los tres puntos siguientes:

$$A(-1; 1) ; B(-3; -1) ; C(2; 3)$$

- ¿Están alineados los puntos A , B y C ? Justifica tu respuesta.
- Determina las coordenadas del punto único D con abscisa -2 tal que las rectas (AB) y (CD) son paralelas.

E.5746    Consideremos el plano provisto de un sistema de referencia $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ y los cuatro puntos:

$$A(-3; 2) ; B(2; -1) ; C(1; 5) ; D(7; 2)$$

- ¿Son paralelas las rectas (AB) y (CD) ?
- Determina las coordenadas del punto E con abscisa 7 de forma que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CE}$ sean colineales.

E.2080    Considera el plano provisto de un sistema de referencia cualquiera $(O; \vec{i}; \vec{j})$ y los tres puntos siguientes del plano:

$$A(3;2) \quad ; \quad B(-1;3) \quad ; \quad D(-4;-1)$$

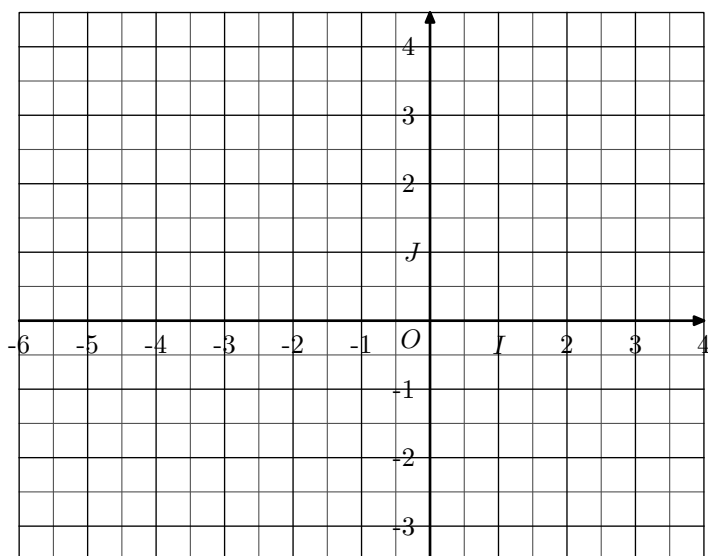
- 1 Determina las coordenadas del punto C tal que $ABCD$ es un paralelogramo.
- 2 Determina las coordenadas del punto E perteneciente al eje x tal que: $(BD) \parallel (AE)$.

E.507    Consideremos el plano provisto de un sistema de coordenadas $(O; \vec{i}; \vec{j})$ y los tres puntos:

$$A(4+4\sqrt{2}; 3+3\sqrt{2}); B(\sqrt{2}-2; 2\sqrt{2}+1); C(\sqrt{2}+1; y_C)$$

18. Geometría vectorial

E.2107    Consideremos el plano provisto de un sistema de coordenadas ortonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$:



- 1 Coloca los tres puntos A, B, C en el marco inferior:
 $A(3;-3) \quad ; \quad B(-4;3) \quad ; \quad C(-5;-1)$
- 2 Determina las coordenadas del punto medio M del segmento $[AB]$.
- 3
 - a Determina las longitudes AB y MC .
 - b Establece que el triángulo ABC es acutángulo en C .
- 4 Observamos N el punto de intersección del eje y con la recta paralela a (CM) que pasa por el punto B .
 - a Coloca el punto N en el marcador.
 - b Determina las coordenadas del punto N .

donde y_C es un número real.

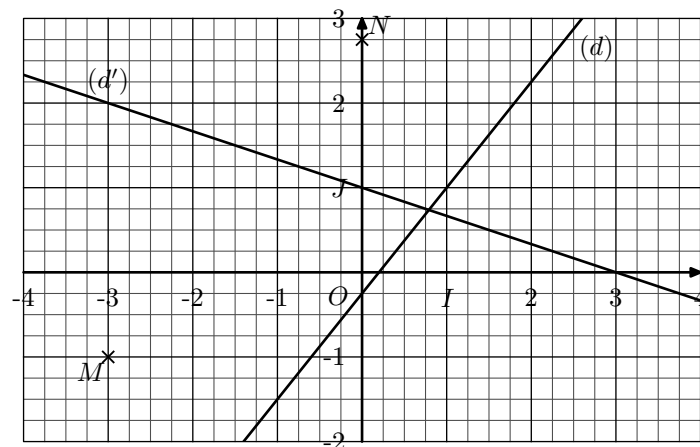
Sabiendo que los puntos A, B y C están alineados, determina la ordenada del punto C en la forma $a+b\sqrt{2}$, donde a y b son dos números reales.

E.6625    Consideremos el plano provisto de un sistema de referencia $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Sean A, B, C, D cuatro puntos del plano con coordenadas:
 $A\left(2; \frac{8}{3}\right); B\left(\frac{2}{3}; 2\right); C\left(\frac{4}{5}; 0\right); D\left(x_D; -\frac{1}{2}\right)$
 donde x_D es un número real.

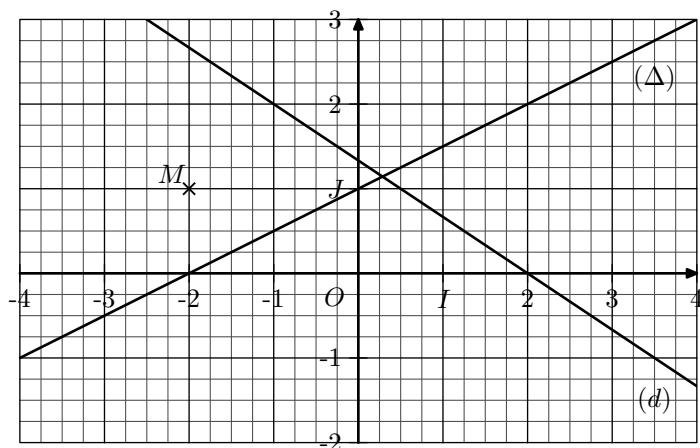
Dado que las rectas (AB) y (CD) son paralelas, determina las coordenadas del punto D .

E.2918    En el plano provisto del sistema de referencia $(O; \vec{i}; \vec{j})$, considera las rectas (d) y (d') a continuación:



- 1 Determina gráficamente las ecuaciones reducidas de las rectas (d) y (d') .
- 2
 - a Da gráficamente las coordenadas de los puntos M y N .
 - b Justifica que la recta (MN) es paralela a la recta (d) .
- 3 Sea Q un punto de la recta (d) tal que la recta (MQ) es paralela a (d') . Anotamos x la abscisa del punto Q .
 - a Justifica que los vectores $\overrightarrow{MQ}$ y $\vec{u}\left(1; -\frac{1}{3}\right)$ son colineales.
 - b Justificar que el vector $\overrightarrow{MQ}$ tiene coordenadas en función de x : $\overrightarrow{MQ}\left(x+3; \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}\right)$
 - c Resuelve la ecuación: $x+3 = -3 \cdot \left(\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}\right)$.
 - d Deduce las coordenadas del punto Q .

E.2902    En el plano provisto de un sistema de referencia $(O; I; J)$ ortonormal, considera la recta (d) que se muestra a continuación y el punto M de coordenadas $(-2; 1)$:



- 1 Determina la ecuación reducida de la recta (d) .
- 2
 - a Dibuja un representante del vector $\vec{u}(2; 1)$.
 - b Determina las coordenadas del punto P perteneciente a la recta (d) tal que los vectores $\vec{MP}$ y $\vec{u}$ sean colin-

eales.

- 3 Resuelve la siguiente ecuación:

$$(1 - 2x)(10x + 13) = (x + 2)(15x + 24)$$

- 4 Sea N el punto de coordenadas $\left(-\frac{13}{10}; \frac{1}{5}\right)$. Sea x un número real, consideremos los dos puntos R y S pertenecientes respectivamente a las rectas (d) y (Δ) teniendo cada una como abscisa el valor x

- a Se acepta que la ecuación reducida de la recta (Δ) es:

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

Expresa en función de x las coordenadas de los dos vectores $\vec{MR}$ y $\vec{NS}$.

Deseamos determinar un valor de x para el cual los vectores $\vec{MR}$ y $\vec{NS}$ sean colineales.

Supongamos ahora que x verifica esta restricción:

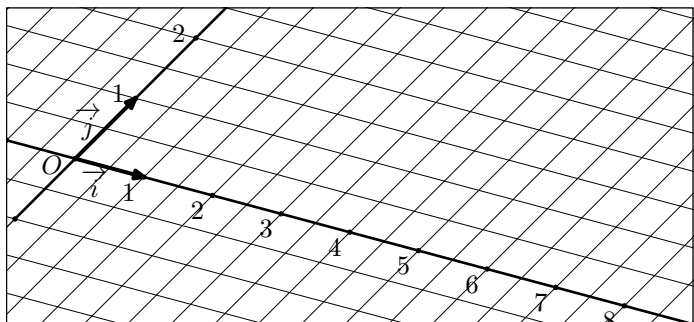
- b Justifica que x verifica la siguiente condición:

$$\left(x + \frac{13}{10}\right)\left(-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) = (x + 2)\left(\frac{1}{2}x + \frac{4}{5}\right)$$

- c Deduzca las coordenadas de los puntos R y S .

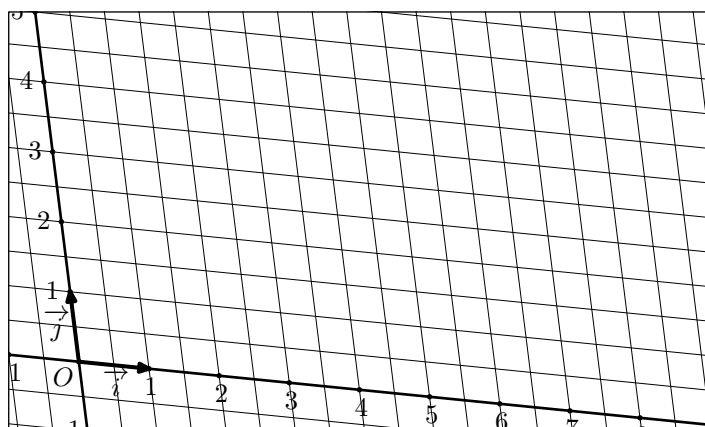
19. Estudio complementario: cualquier punto de referencia

E.4968    En el plano se da un punto de referencia cualquiera $(O; \vec{i}; \vec{j})$ que se muestra a continuación:



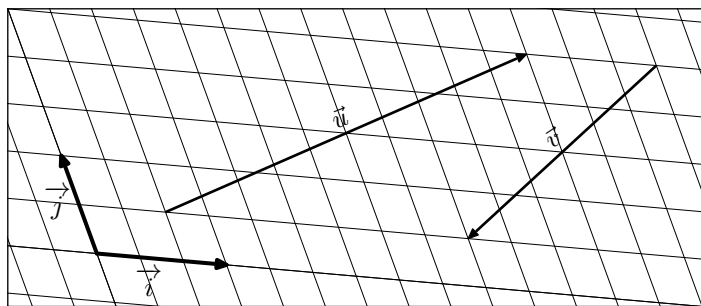
- 1
 - a Dans el punto de referencia de abajo, coloca los dos puntos:
 $A(-1; 2)$; $B(4; 1)$
 - b Justifier gráficamente que el vector $\vec{AB}$ tiene coordenadas $(5; -1)$.
 - 2 Considere los dos vectores siguientes:
 $\vec{u}(3; 2)$; $\vec{v}(-2; -2)$
- Dé una representación de su elección de cada uno de estos dos vectores en el marco de referencia anterior.

E.5339    Al plano se le da un sistema de referencia $(O; \vec{i}; \vec{j})$ cualquiera de los que se muestran a continuación:



- 1 Dibuja un representante de cada uno de los dos vectores:
 $\vec{u}(5; 2)$; $\vec{v}(-3; -2)$
- 2
 - a Dibuja un representante del vector $\vec{w}$ definido por:
 $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$
 - b Determina gráficamente las coordenadas del vector $\vec{w}$.
 - c Compara las coordenadas del vector $\vec{w}$ respecto a las de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

E.5744 En el plano, consideramos los dos vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ no colineales representados a continuación:



La representación de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ también se muestra arriba.

- 1 En la base vectorial de $(\vec{i}; \vec{j})$, indique las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- 2 Mediante el método que prefiera, determine las coordenadas del vector suma: $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.
- 3 Mediante el método que prefiera, determine las coordenadas del vector $\vec{t}$ que cumple la siguiente igualdad:

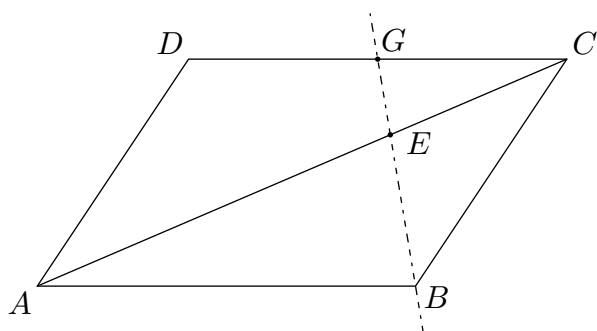
$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{t}$$

20. Estudio adicional: cualquier base y función afín

E.4592 Sea $ABCD$ un paralelogramo. Sea E el punto perteneciente al segmento $[AC]$ verificando:

$$AE = \frac{2}{3} \cdot AC$$

Las rectas (BE) y (CD) interceptan en el punto G .



El plano está provisto del sistema de referencia $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

- 1 Da, sin justificar, las coordenadas de los puntos:
 A ; B ; C ; D ; E
- 2 a Justifica que la recta (BE) tiene la ecuación:

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$
- b En Deduce las coordenadas del punto G .
- 3 ¿Qué representa el punto G para el segmento $[CD]$? Justifícalo.

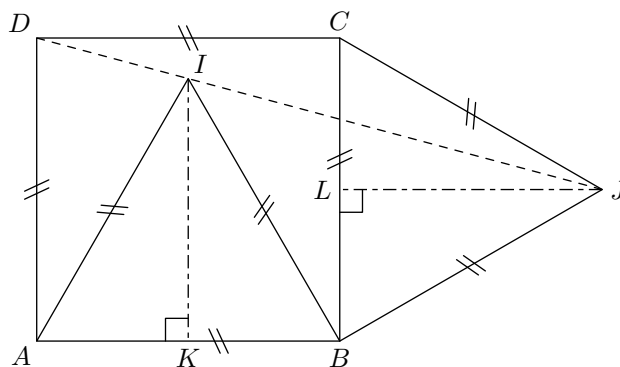
E.2074 Consideremos un cuadrado $ABCD$ con lado 1 cm .

- El punto I es el único punto tal que el triángulo AIB es equilátero y está contenido en el cuadrado $ABCD$;
- El punto J es el único punto tal que el triángulo BCJ es equilátero y está fuera del cuadrado $ABCD$.

Se anota:

- K es el pie de la altura que sale del vértice I en el triángulo AIB .
- L es el pie de la altura que sale de J en el triángulo BCJ .

Esta es la representación de esta configuración:



El objetivo del ejercicio es demostrar que los puntos D , I y J están alineados.

Consideramos el plano con la referencia $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$.

- 1 ¿Cuál es la naturaleza del sistema de coordenadas $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$?
- 2 a Determine la longitud del segmento $[KI]$.
 b Indique las coordenadas del punto I en el sistema de coordenadas considerado.
- 3 Suponiendo que la longitud LJ mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$, da las coordenadas del punto J .
- 4 Consideremos la recta (d) de ecuación:

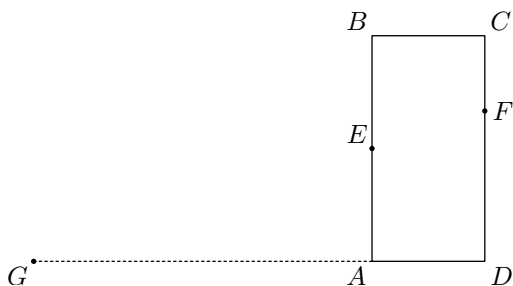
$$y = (\sqrt{3} - 2)x + 1$$

Demuestre que los tres puntos D , I y J pertenecen a la recta (d) .

21. Estudio en profundidad: descomposición de vectores en cualquier base

E.8112 Considera un rectángulo $ABCD$ y los tres puntos E , F , G definidos por:

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} ; \quad \overrightarrow{DF} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{DC} ; \quad \overrightarrow{DG} = 4 \cdot \overrightarrow{DA}$$



Consideremos los dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ que son no colineales y forman una base vectorial.

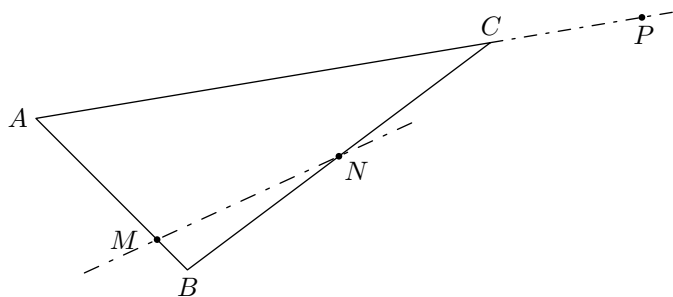
1 Determinar la descomposición del vector $\overrightarrow{EF}$ en la base $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$.

2 Determinar la descomposición del vector $\overrightarrow{EG}$ en la base $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$:

$$\overrightarrow{EG} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} - 3 \cdot \overrightarrow{AD}$$

3 Demuestra que los puntos E , F y G están alineados.

E.6664 🔑 🍷 📖 En el plano, considera el triángulo ABC que se muestra a continuación:



Los puntos M , N y P están definidos por las relaciones:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{AP} = \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{AC}$$

El estudio se realizará en el marco de referencia $(B; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$.

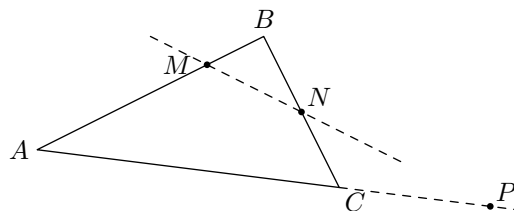
1 Dar las coordenadas de los puntos M y N .

2 a Determinar las coordenadas del vector $\overrightarrow{AC}$.

b Deduce las coordenadas del punto P .

3 Justifica que los puntos M , N y P están alineados.

E.5342 🔑 🍷 📖 En el plano, consideramos el triángulo ABC :



Consideramos los puntos M y N definidos por:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{BA} \quad ; \quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$$

Definimos el punto P mediante la relación vectorial:

$$\overrightarrow{AP} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC} \quad \text{donde } \alpha \in \mathbb{R}$$

1 Expresar $\overrightarrow{AC}$ en función de los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$.

2 Se dota al plano del sistema de coordenadas $(B; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$:

a Determinar las coordenadas del vector $\overrightarrow{MN}$ y del vector $\overrightarrow{MP}$ en función del real α .

b Determinar el valor de α para que los puntos M , N y P estén alineados.