



1. Encuadre mediante una función afín

E.9403 Sea x un número real con marco $2 \leq x \leq 4$.

Para cada pregunta, determine un marco para la expresión literal propuesta :

- (a) $2x + 1$ (b) $-x + 3$ (c) $2x$ (d) $3x - 5$

E.4975 Sea x un número real con marco $-1 < x \leq 3$.

Para cada pregunta, determine un marco para la expresión

literal propuesta :

- (a) $3x + 1$ (b) $-2x - 5$

E.9407 Sea x un número real con marco $-1 < x \leq 3$.

Para cada pregunta, determine un marco para la expresión literal propuesta :

- (a) $3x + 1$ (b) $-2x - 5$ (c) $x + 2$ (d) $1 - 2 \cdot x$

2. Encuadre mediante una función de segundo grado

E.8283 Sea x un número real con el siguiente marco :

$$2 \leq x \leq 4.$$

Para cada pregunta, determine un marco para la expresión literal propuesta :

- (a) x^2 (b) $2 - x^2$ (c) $(x - 4)^2$ (d) $(x + 1)^2 + 1$

E.8282 Sea x un número real con marco :

$$1 < x \leq 4.$$

Para cada pregunta, determine un marco para la expresión literal propuesta :

- (a) $(x - 5)^2 - 2$ (b) $(x + 1)^2 + 1$

E.338 Sea x un número real tal que $0 < x \leq 2$.
Da las tramas de los siguientes números :

- (a) $(x - 2)^2$ (b) $-2 \cdot x^2 - 1$ (c) $(x + 1)^2 + 1$

E.9371 Sea x un número real que cumple la relación $2 \leq x < 5$.

Para cada pregunta, determine un rango de la expresión literal propuesta :

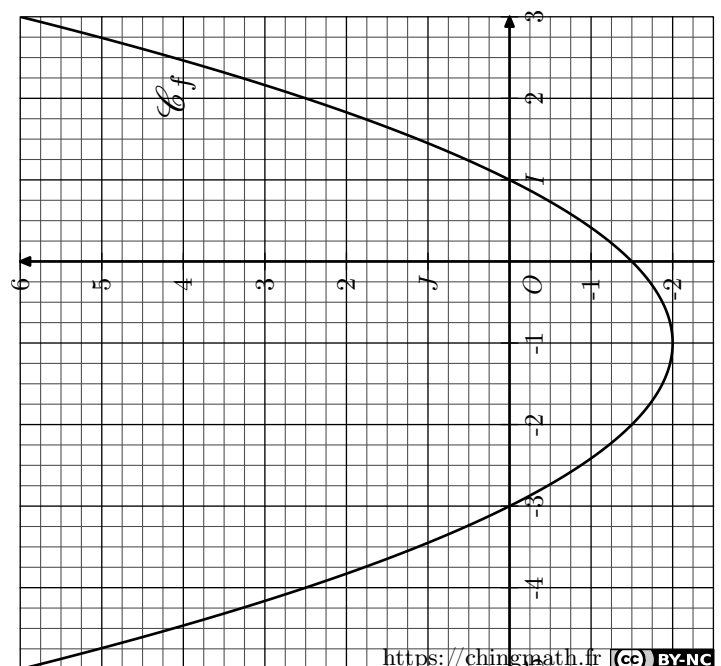
- (a) $(1 - x)^2$ (b) $(x - 4)^2$

E.412 A partir del marco $2 \leq x \leq 4$, deduce los marcos de las siguientes expresiones algebraicas :

- (a) $3(x - 4)^2 + 2$ (b) $x^2 + 1$ (d) $(2x - 6)^2$

3. Función cuadrada: estudio de funciones de segundo grado

E.2846 Consideremos la función f definida en $[-5; 3]$ cuya representación se da a continuación :



Las siguientes preguntas deben responderse gráficamente y sin justificar.

- 1 Elaborar la tabla de variaciones de la función f .
- 2 Elaborar la tabla de signos de la función f .

3 Resuelve la inecuación: $f(x) > \frac{5}{2}$

4 Determina las imágenes de los siguientes intervalos:

a $[1; 3[$ b $[-4; -2[$ c $\left[-\frac{15}{4}; 1\right[$

4. Encuadre mediante una función racional

E.7375    Sea x un número real que verifica el marco:

$$2 \leq x < 5.$$

Para cada pregunta, determine un marco para la expresión literal propuesta:

a $\frac{3}{2x-3}$

E.9369    Sea x un número real tal que:

$$1 < x \leq 4.$$

Para cada pregunta, determine un marco para la expresión literal propuesta:

a $\frac{1}{x}$ b $\frac{1}{x} + 2$ c $1 - \frac{1}{x+2}$

E.9370    Sea x un número real tal que:

$$-1 < x \leq 3.$$

Para cada pregunta, determine un marco para la expresión literal propuesta:

a $\frac{1}{x+2}$ b $\frac{1}{x^2+1}$ c $\frac{2}{(x-1)^2+1}$

E.350    Sea x un número real con marco

$$-1 < x \leq 3.$$

Para cada pregunta, determine un marco para la expresión literal propuesta:

a $\frac{1}{x+2}$ b $\frac{1}{x^2+1}$ c $\frac{2}{(x-1)^2+1}$

E.9408    A partir del marco $2 \leq x \leq 4$, deduce los marcos de las siguientes expresiones algebraicas:

a $\frac{1}{x+2}$ b $\left(\frac{1}{x}\right)^2$ c $\frac{x^2}{2x+1}$

5. Función inversa: estudio de una función homográfica

E.7862    Consideremos la función f definida por:

$$f: x \mapsto \frac{3x+1}{x-3}$$

1 Demuestra que, para cualquier $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, tenemos:

$$\frac{3x+1}{x-3} = 3 + \frac{10}{x-3}$$

2 Determina el sentido de variación de la función f en el intervalo $]-\infty; 3[$.

E.4984    Consideremos la función g definida en $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ por:

$$g(x) = \frac{x+1}{2-x}$$

1 Determinar los reales a y b realizando la identidad:

$$g(x) = a + \frac{b}{2-x}$$

2 Elaborar la tabla de variaciones de la función g

E.9406    Sea f la función definida en $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ por la relación:

$$f(x) = \frac{8x-11}{2x-3}$$

1 Determina los reales a y b realizando la identidad:

$$f(x) = a + \frac{b}{2x-3}$$

2 Elaborar la tabla de variaciones de la función f .

E.8163    Consideremos la función f definida por:

$$f(x) = \frac{8-5x}{x-2}$$

1 Determine los valores de los números reales a y b realizando la siguiente identidad:

$$f(x) = a + \frac{b}{x-2}$$

2 Establecer que la función f es creciente en el intervalo $]-\infty; 2[$.

E.6573    Consideremos la función f definida en $\mathbb{R}$ por la expresión:

$$f(x) = \frac{2x^2+4x+1}{x^2+2x+2}$$

1 Determina los dos reales a y b verifica la identidad:

$$f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2+1}$$

2 a Determina el sentido de variación de la función f en el intervalo $[-1; +\infty[$.

b Demostrar que la función f es decreciente en el intervalo $]-\infty; -1]$.

E.4877 Consideremos la función f definida en $\mathbb{R}$ por la relación:

$$f(x) = \frac{-4 \cdot x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

- 1 Demuestra la siguiente igualdad: $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} - 4$
- 2 a Demuestre que la función f es estrictamente creciente en el intervalo $]-\infty; 0[$.
- b Establezca la dirección de variación en el intervalo

6. Raíz cuadrada: utilizar

E.4973 Sea f la función cuya imagen de un número x viene definida por la relación:

$$f(x) = -2\sqrt{x+1} + 3$$

- 1 Justifique que el conjunto de definición de la función f es:
 $\mathcal{D}_f = [-1; +\infty[$
- 2 Establecer que la función f es decreciente en su conjunto definidor.

E.4974 Consideremos la función f definida por la relación:

$$f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x} + 3}$$

- 1 Justifique que el conjunto definidor de f es $\mathbb{R}_+$.
- 2 Establecer que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_+$.

E.8166 Consideremos la función f definida por:

$$f(x) = \sqrt{-x^2 - 2 \cdot x + \frac{7}{9}}$$

- 1 a Determinar el conjunto de definición de la función f .
- b Elaborar la tabla de variaciones de la función f .
- 2 En el plano provisto de un sistema de referencia $(O; I; J)$, consideremos la curva $\mathcal{C}_f$ representativa de la función f y el círculo $\mathcal{C}'$ con centro $A(-1; 0)$ y radio $\frac{4}{3}$.
- a Demuestra que cualquier punto M de la curva $\mathcal{C}_f$ pertenece a la circunferencia $\mathcal{C}'$.

$]0; +\infty[$ de la función f .

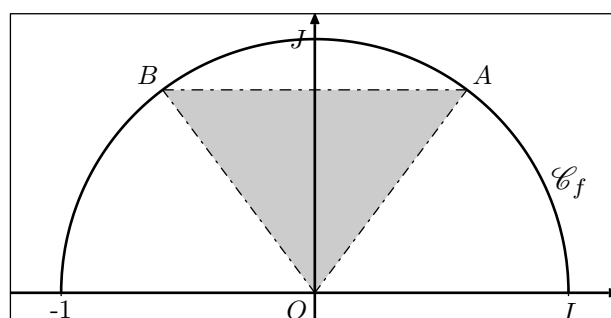
- c Elabora la tabla de variaciones de la función f (deben darse los valores de los extremos locales).
- 3 Deduce de la pregunta anterior, el valor máximo de la función f .
- 4 a Determine algebraicamente, los antecedentes del número -3 por la función f .
- b Resuelve la siguiente ecuación: $f(x) = -x - 2$

- b Consideremos el semicírculo $\mathcal{E}$ formado por el conjunto de puntos de la circunferencia $\mathcal{C}'$ cuya ordenada es positiva o cero. Este subconjunto puede escribirse como:
 $\mathcal{E} = \{M(x; y) \in \mathcal{C}' \mid y > 0\}$
A la inversa, justifica que cada punto de $\mathcal{E}$ pertenece a la curva $\mathcal{C}_f$ representativa de la función f .

E.7380 Consideremos la función f definida en el intervalo $[-1; 1]$ por la relación:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

cuya curva representativa $\mathcal{C}_f$ se da a continuación en un sistema de referencia $(O; I; J)$ a continuación:



Sea x un número real perteneciente al intervalo $]0; 1[$. Observa A y B respectivamente, los puntos de la curva $\mathcal{C}_f$ con abscisas x y $-x$ respectivamente.

Determina la abscisa del punto A para que el área del triángulo OAB sea máxima.

Pista: podemos establecer la identidad:

$$x^2 - x^4 = \frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$$

7. Función cubo: utilizar

E.8281 Consideremos la función f definida en $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = x^3 + 6 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 12$$

- 1 Establecer que para cualquier número real x , tenemos:
 $f(x) = (x + 2)^3 + 4$
- 2 Establecer que la función f es creciente en $\mathbb{R}$.

8. Estudio algebraico de las variaciones

E.7335    Consideremos la función f definida en $\mathbb{R}$ por la relación:

$$f(x) = x^3 + x + 2$$

- 1 Sean a y b dos números reales cualesquiera. Determinar la identidad:

$$f(a) - f(b) = (a - b) \cdot (b^2 + a \cdot b + a^2 + 1)$$
- 2 Establecer que la función f es estrictamente creciente en $] -\infty; 0]$

E.8312    Consideremos la función f definida en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ por la relación:

$$f(x) = \frac{1}{x - 1}$$

- 1 Demuestre que la función f es decreciente en $]1; +\infty[$
- 2  Sean a y b dos números reales distintos de 1. Mostrar que:

$$f(a) - f(b) = \frac{b - a}{(a - 1)(b - 1)}$$

 Deduce que la función f es decreciente en $] -\infty; 1[$

E.8164    Consideremos la función f definida

por la expresión:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

- 1 Determina el conjunto de definición de la función f .
- 2  Para todos los números reales a y b , establecer la siguiente identidad:

$$f(b) - f(a) = \frac{(a - b)(a + b)}{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}$$
-  Deduce que la función f es creciente en el intervalo $\mathbb{R}_-$.

E.7376    Consideremos la función f definida por la relación:

$$f(x) = \sqrt{2 \cdot x^2 + x + 1}$$

- 1 Justifica que la función f está definida en $\mathbb{R}$.
- 2  Sean a y b dos números reales, establezca la identidad:

$$f(b) - f(a) = \frac{(b - a) \cdot (2 \cdot b + 2 \cdot a + 1)}{\sqrt{2 \cdot b^2 + b + 1} + \sqrt{2 \cdot a^2 + a + 1}}$$
-  Deduce que la función f es creciente en el intervalo $] -\frac{1}{4}; +\infty[$

9. Un poco más adelante - juego de definiciones

E.2141    Consideremos las dos funciones siguientes:

$$f: x \mapsto \sqrt{2x - 1} \cdot \sqrt{4x + 3} \quad ; \quad g: x \mapsto \sqrt{(2x - 1)(4x + 3)}$$

- 1  Con ayuda de una calculadora gráfica, traza la curva representativa de la función f y, a continuación, la de la función g .
-  Gráficamente, indica el intervalo en el que estas dos funciones coinciden.
- 2 Determine el conjunto de definición de la función f .
- 3  Determine la tabla de signos de la expresión algebraica $(2x - 1)(4x + 3)$.
-  Deduzca el dominio de definición de la función g .

E.536   

- 1 Expande la expresión: $(x + 1)(3 - 2x)(x - 1)$.
- 2 Consideremos las dos funciones f y g cuyas imágenes del número x se definen como sigue:

$$f(x) = \frac{-2x^3 + 3x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} \quad ; \quad g(x) = 3 - 2x$$
-  Determina el conjunto de definición de cada una de estas funciones.
-  Establecer que las dos funciones f y g son iguales sobre un conjunto a especificar.

E.2194   

- 1 Consideremos las dos funciones f y g cuya imagen de x viene definida por las relaciones:

$$f(x) = \frac{-x^2 - 3x + 4}{(3x - 2)(-x + 1)} \quad ; \quad g(x) = \frac{x + 4}{3x - 2}$$
-  Simplifica la expresión: $g(x) - f(x)$.
-  Compara las funciones f y g .
- 2 Consideremos las dos funciones j y ℓ definidas por:

$$j(x) = \frac{1}{\sqrt{3x + 1} + \sqrt{4 - x}} \quad ; \quad \ell(x) = \frac{\sqrt{3x + 1} - \sqrt{4 - x}}{4x - 3}$$
-  Determina el conjunto de definición de estas dos funciones.
-  Expande la siguiente expresión:

$$A = (\sqrt{3x + 1} + \sqrt{4 - x})(\sqrt{3x + 1} - \sqrt{4 - x})$$
-  Demuestre que las dos funciones j y ℓ son iguales en el conjunto $[-\frac{1}{3}; 4] \setminus \{\frac{3}{4}\}$

E.2694   

1 Considera las dos funciones:

$$f: x \mapsto 3x - 2 \quad ; \quad g: x \mapsto \frac{14x + 7}{2x + 1}$$

a Establece la siguiente igualdad:

$$6x^2 + 13x + 5 = (2x + 1)(3x + 5)$$

b Considera la función $f+g$. Establece la igualdad:

$$(f + g)(x) = 3x + 5$$

c Dar el conjunto sobre el que está definida la función $f+g$.

2 Consideremos las dos funciones siguientes:

$$f: x \mapsto \frac{2x + 1}{x^2 + x} \quad ; \quad g: x \mapsto (x + 1)(-3x + x^2)$$

a Considera la función $f \cdot g$. Establezca la siguiente igualdad:

$$(f \cdot g)(x) = 2x^2 - 5x - 3$$

b Da el conjunto sobre el que está definida la función $f \cdot g$.

3 Considera las dos funciones f y g definidas por:

$$f: x \mapsto x^2 - x \quad ; \quad g: x \mapsto x + \sqrt{x}$$

a Establecer la siguiente igualdad:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - \sqrt{x}$$

b Dar el conjunto sobre el que está definida la función $\frac{f}{g}$.

10. Encuadre y dirección de la variación

E.1904    Sea x un número real:

1 Supongamos $1 < x \leq 3$. Da un marco para cada uno de los siguientes números:

a x^2 b $1 - \frac{1}{x}$ c $3 - 2x$

2 Supongamos $-4 < x < 1$ y consideremos y un número real que verifique el marco $2 < y < 4$.

a Dar un marco para las siguientes expresiones:

$$x + y \quad ; \quad (x + 4) \cdot y$$

b Justifique, con un contraejemplo, que el encuadre siguiente es falso:

$$-8 < x \cdot y < 4$$

E.2832    Sea x un número que verifica el marco: $3 < x \leq 5$

Determina un marco para cada una de estas expresiones:

a $2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x - 3\right)^2 - 2$ b $\frac{1}{(2 - x)^2}$

11. Ejercicios no clasificados

E.1941   

1 Sean a y b dos números pertenecientes al intervalo $[-2; 0]$ tales que $a < b$.

Haz la siguiente comparación: $\frac{3}{a^2 + 1} < \frac{3}{b^2 + 1}$

2 Deduce la dirección de variación, en el intervalo $[-2; 0]$, de la función f definida por: $f: x \mapsto \frac{3}{x^2 + 1}$