



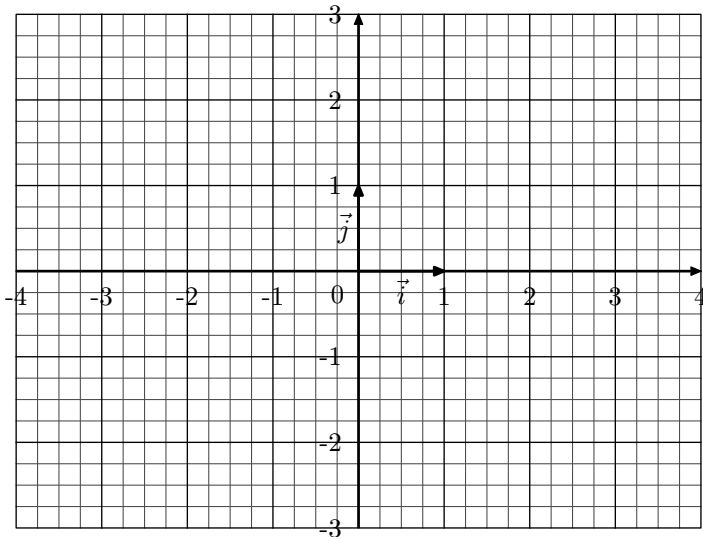
1. Rappels: Vecteurs directeurs

E.9706 Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les quatre droites ci-dessous définies par leur équation cartésienne:

$$(d_1): 2x - 3y + 3 = 0 \quad ; \quad (d_2): -2x - y + 1 = 0$$

$$(d_3): 4x + 8y - 10 = 0 \quad ; \quad (d_4): -3x + y + 4 = 0$$

- 1 Pour chacune des droites, donner un point et un vecteur directeur de cette droite.
- 2 Tracer chacune de ces droites dans le repère ci-dessous:



E.9707

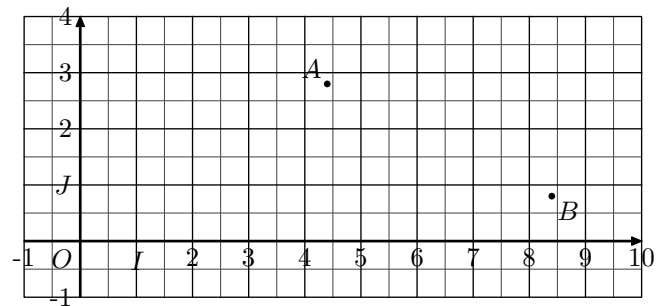
Proposition: dans le plan muni d'un repère, on considère une droite admettant pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Cette droite admet une équation cartésienne de la forme:
 $-b \cdot x + a \cdot y + c = 0$

On considère le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Pour chaque question, déterminer une équation cartésienne

de la droite (d) passant par le point A et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$:

- a $A(2; 1)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b $A(3; -2)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
 c $A(0; 3)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ d $A(-2; \frac{1}{2})$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

E.9708 Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points A et B de coordonnées:
 $A \left(\frac{22}{5}; \frac{14}{5} \right)$; $B \left(\frac{42}{5}; \frac{4}{5} \right)$



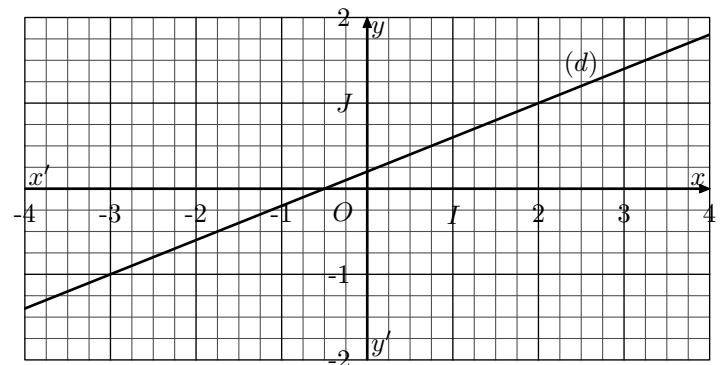
On considère également la droite (d) admettant pour équation cartésienne:

$$(d): 3 \cdot x + 6 \cdot y - 12 = 0$$

- 1 a Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
 b Justifier que le segment $[AB]$ a pour mesure $\sqrt{20}$.
- 2 Justifier que les droites (AB) et (d) sont parallèles.
- 3 a Déterminer les points C et D intersection de la droite (d) respectivement avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
 b Justifier que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

2. Rappels: équations cartésiennes et intersection de droites

E.9709 Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère la droite (d) représentée ci-dessous:



- 1 Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) .
- 2 On considère la droite (Δ) ayant pour équation cartésienne :
 $(\Delta) : 5x + 6y - 6 = 0$
 - a Donner les coordonnées de deux points appartenant à la droite (Δ) .
 - b Effectuer le tracé dans le repère ci-dessous de la droite (Δ) .
- 3 Algébriquement, déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (Δ) .

E.9710    Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y = 8 \\ 4x + y = -7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 5x + 10y = 20 \end{cases}$$

E.9711    Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 3x + y + 2z = -1 \\ x - y + 3z = 3 \end{cases}$$

(On montrera que ce système admet un unique triplet solution).

3. Vecteurs normaux et équations de droites

E.2591   

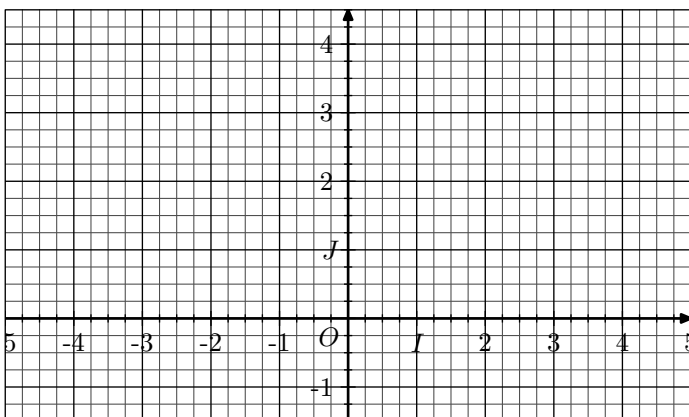
Définition : on appelle **vecteur normal** d'une droite, tout vecteur orthogonal aux vecteurs directeurs de cette droite.

Proposition : dans le plan muni d'un repère, on considère une droite (d) admettant le vecteur $\vec{u}(a; b)$ pour vecteur normal. Alors la droite (d) admet pour équation cartésienne :

$$(d) : a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \quad \text{où } c \in \mathbb{R}$$

On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé.

- 1 Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne passant par le point A et admettant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur normal :
 - a $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $A(1; 0)$
 - b $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A(-2; 1)$
- 2 Tracer la représentation de chacune de ces droites dans le repère ci-dessous ainsi qu'un représentant de chaque vecteur $\vec{u}$ au point A correspondant :



E.9704   

Proposition : dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère la droite (d) admettant le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal alors l'équation cartésienne de la droite (d) est de la forme : $(d) : a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \quad c \in \mathbb{R}$

On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé. Pour chaque question, déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) admettant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur normal et passant par le point A où :

$$\text{a) } \vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} ; A(1; 1) \quad \text{b) } \vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; A(4; -1)$$

E.9746    On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé. Pour chaque question, déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) admettant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur normal et passant par le point A où :

$$\text{a) } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} ; A(-5; 2) \quad \text{b) } \vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} ; A(-1; 3)$$

E.8552    On munit le plan d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé.

- 1 On considère la droite (d) admettant le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal et passant par le point $A(4; 1)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) .
- 2 On considère la droite (d') admettant l'équation cartésienne : $x - 4y + 3 = 0$. Donner un vecteur $\vec{v}$ normal de (d') , un vecteur $\vec{u}$ directeur de (d') et un point B appartenant à (d') .

E.9705   

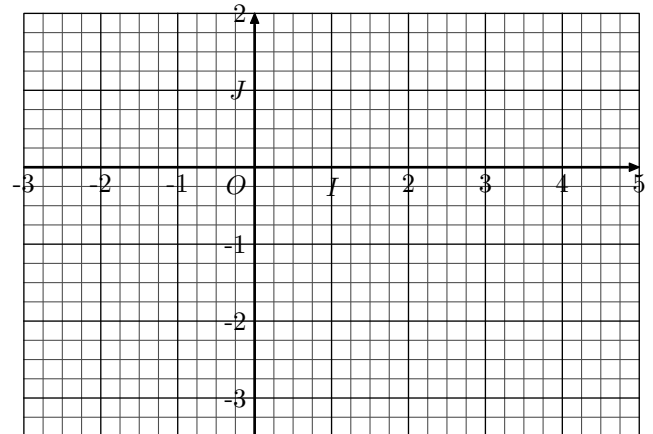
Proposition : on considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé. Si une droite (d) admet pour équation cartésienne : $(d) : a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$ alors la droite (d) admet le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

Soit $(O; I; J)$ un repère orthonormé.

- 1 On considère la droite (d) ayant pour équation cartésienne : $2 \cdot x + 3 \cdot y + 5 = 0$
Donner un vecteur normal à la droite (d) et déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) avec l'axe des abscisses.
- 2 On considère la droite (d') ayant pour équation cartésienne : $-x + 2 \cdot y - 2 = 0$
Donner un vecteur normal à la droite (d') et déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (d') avec l'axe des ordonnées.

E.8446    Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère les points $A(-2; -3)$ et $B(4; 1)$. On note (d) la médiatrice du segment $[AB]$.

- 1 Déterminer les coordonnées du point K milieu du segment $[AB]$.
- 2 Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ normal à la droite (d) .
- 3 Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) .
- 4 Tracer dans le repère ci-dessous la droite (d) .



4. Parallélisme et orthogonalité de droites

E.8449   

Définition : dans le plan muni d'un repère, on appelle **déterminant** des deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le nombre, noté $\det(\vec{u}; \vec{v})$, définie par :
 $\det(\vec{u}; \vec{v}) = x \cdot y' - x' \cdot y$

Proposition : dans le plan muni d'un repère, on considère les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non-nuls. On a :
 • $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff \det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$
 • $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé :

- 1 On considère les deux droites (d_1) et (d_2) admettant pour équation cartésienne :
 $(d_1) : x + 2 \cdot y - 1 = 0 \quad ; \quad (d_2) : 4 \cdot x + 8 \cdot y + 2 = 0$
 - a Donner deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ normaux respectivement aux droites (d_1) et (d_2) .
 - b Justifier que les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.
- 2 On considère les deux droites (Δ_1) et (Δ_2) admettant pour équation cartésienne :
 $(\Delta_1) : 4 \cdot x + 3 \cdot y - 1 = 0 \quad ; \quad (\Delta_2) : -6 \cdot x + 8 \cdot y + 5 = 0$
 - a Donner deux vecteurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ normaux respectivement aux droites (Δ_1) et (Δ_2) .
 - b Justifier que les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendicu-

laire.

E.9712    Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère la droite (d) admettant pour équation cartésienne :

$$(d) : 2x - y + 1 = 0$$

- 1 La droite (d') est parallèle à la droite (d) et son équation cartésienne est : $(d') : 5x + b \cdot y + 4 = 0 \quad \text{où } b \in \mathbb{R}$
Déterminer la valeur de b .
- 2 La droite (Δ) est perpendiculaire à la droite (d) et son équation cartésienne est :
 $(\Delta) : a \cdot x + 3 \cdot y - 2 = 0 \quad \text{où } a \in \mathbb{R}$
Déterminer la valeur de a .

E.9779    Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère la droite (d) d'équation cartésienne :
 $-3 \cdot x + y + 7 = 0$

- 1 Donner un vecteur $\vec{u}$ directeur de la droite (d) .
- 2 Déterminer l'équation cartésienne de la droite (Δ) parallèle à la droite (d) et passant par le point de coordonnées $A(-2; 2)$.
- 3 Soit (d') la droite perpendiculaire à la droite (d) et passant par le point $B(3; -1)$.
 - a Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ normal à la droite (d') .
 - b Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d') .

5. Intersection de droites

E.6484 Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère la droite (d) (resp. (d')) passe par le point $A(-2; 1)$ (resp. $B(3; 2)$) et admet le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (resp. $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$) pour vecteur normal.

- 1 Déterminer les équations cartésiennes des droites (d) et (d') .
- 2 a Justifier que les droites (d) et (d') sont sécantes.
b Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (d') .

E.9780 On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$.

- 1 On note (d) la droite admettant le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur et passant par le point $B(1; 1)$. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) .
- 2 On note (d') la droite admettant le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal et passant par le point $C(2; 2)$. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d') .
- 3 a Justifier que les droites (d) et (d') sont sécantes.
b Déterminer les coordonnées du point A , intersection des droites (d) et (d') .

E.9755 Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère la droite (d) ayant pour équation cartésienne :

$$(d): 3x + 4y - 5 = 0$$

- 1 On considère la droite (Δ) admettant le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal et passant par le point $A \left(-\frac{1}{3}; 1 \right)$
 - a Déterminer l'équation cartésienne de la droite (Δ) .
 - b Justifier que les droites (d) et (Δ) sont sécantes.
- 2 a Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} 3x + 4y - 5 = 0 \\ 6x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$$
 - b En déduire les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (Δ) .

E.3036 Dans le plan $(O; I; J)$, on considère les points A, B, C, D de coordonnées :

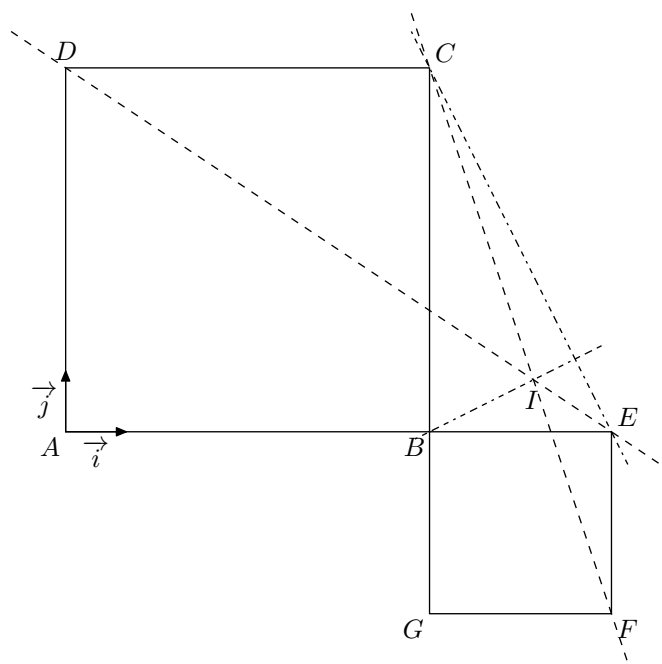
$$A(-1; -1) ; B(2; -4) ; C\left(\frac{22}{5}; \frac{4}{5}\right) ; D\left(\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right)$$

- 1 Soit K le milieu du segment $[AB]$. On considère

l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points $M(x; y)$ du plan qui vérifie la relation : $\vec{AB} \cdot \vec{KM} = 0$

- a Montrer que tout point $M(x; y)$, appartenant à l'ensemble $(\mathcal{E})$, a ses coordonnées qui vérifient l'équation : $x - y - 3 = 0$
 - b Comment s'appelle l'ensemble $(\mathcal{E})$ relativement au segment $[AB]$.
- 2 a Déterminer les coordonnées d'un vecteur orthogonal à la droite (CD) .
b En déduire l'équation de la droite (CD) .
 - 3 Déterminer les coordonnées du point d'intersection de l'ensemble $\mathcal{E}$ et de la droite (CD) .

E.3082 Dans le plan, on considère les deux carrés $ABCD$ et $BEFG$ représentés ci-dessous :



On munit le plan du repère orthonormé $(A; \vec{i}; \vec{j})$ où :
 $\|\vec{AB}\| = 6$; $\|\vec{BE}\| = 3$

- 1 a Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{DE}$ et $\vec{CF}$.
b En déduire les équations cartésiennes des droites (DE) et (CF) dans le plan $(A; \vec{i}; \vec{j})$.
- 2 Déterminer les coordonnées du point I .
- 3 Justifier que les droites (BI) et (CE) sont perpendiculaires.

6. Projeté orthogonal

E.8447

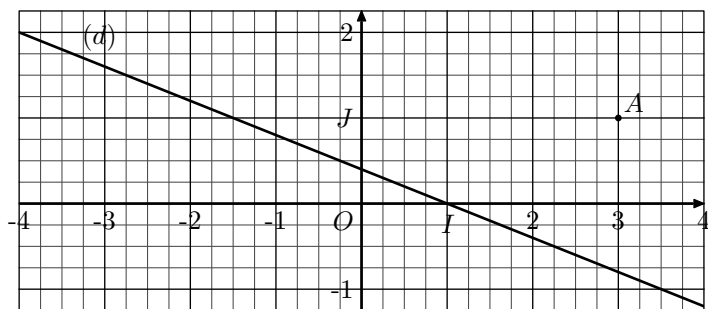
Proposition-définition : dans le plan, on considère une droite (d) et un point A n'appartenant pas à (d) . Il existe un unique point H tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite (d) .

Le point H s'appelle le **projeté orthogonal du point A sur la droite (d)** .

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère les points $A(-1; 1)$, $B(3; 5; -2)$, $M(4; 2)$.

- 1 Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .
- 2 Montrer que le point $H(2; -1)$ est le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB) .

E.8553 Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère le point $A(3; 1)$ et la droite (d) représentée ci-dessous d'équation cartésienne: $2 \cdot x + 5 \cdot y - 2 = 0$



On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) .

- 1 Construire le point H dans le repère.
- 2 Justifier que la droite (Δ) passant par le point A et perpendiculaire à la droite (d) a pour équation:
 $(\Delta): -5 \cdot x + 2 \cdot y + 13 = 0$

7. Projeté orthogonal et aire

E.9758 Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère les trois points: $A(-3; 2)$; $B(3; 5)$; $C(2; 2)$

- 1 Soit (d) la droite passant par le point C est orthogonale à la droite (AB) :
 - a Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ normal à la droite (d) .
 - b Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) .
 - c Déterminer les coordonnées du pied H de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C .
- 2 Déterminer l'aire du triangle ABC .

E.9781 Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère les trois points: $A(-1; -1)$; $B(3; 3)$; $C(4; 1)$

- 1 Déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB) .
- 2 Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB) .
- 3 Déterminer les coordonnées du point M , intersection de la droite (AB) et de la droite (d) .
- 4 En déduire l'aire du triangle ABC .

8. Cercle: caractérisation par le centre et le rayon

E.2592

Définition: le cercle de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M tels que: $AM = r$

On dit aussi qu'un cercle est l'ensemble des points équidistants au centre du cercle.

- 3 Déterminer les coordonnées du point H .

Questions subsidiaires: (autre méthode)

- 3 Justifier que le vecteur $\vec{AH}$ admet pour coordonnées:
 $\vec{AH} \left(\begin{matrix} x - 3 \\ -\frac{2}{5} \cdot x - \frac{3}{5} \end{matrix} \right)$
- 4 En déduire les coordonnées du point H .

E.8448 Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère les points:

$$A \left(1; -\frac{1}{5} \right) ; B(-2; 1) ; M \left(2; -\frac{7}{2} \right).$$

- 1 Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .
- 2 a Déterminer l'équation réduite de la droite (d) passant par le point M et perpendiculaire à la droite (AB) .
- b Déterminer les coordonnées du point E , intersection des droites (d) et (AB) .

E.8450 Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère les trois points: $A(-3; 2)$; $B(3; 5)$; $C(2; 2)$

- 1 Déterminer les coordonnées du pied H de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C .
- 2 Déterminer l'aire du triangle ABC .

E.8451 Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère les trois points: $A \left(-\frac{2}{3}; 2 \right)$; $B \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2} \right)$; $C \left(5; \frac{11}{3} \right)$

- 1 Déterminer les coordonnées du pied H de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C .
- 2 Déterminer l'aire du triangle ABC .

E.8456 On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ et des quatre points:

$$A(3; 2) ; B(-1; 3) ; C(2; -2) ; D(6; -3)$$

- 1 Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
- 2 Déterminer l'aire du parallélogramme $ABCD$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ dont l'unité est le centimètre.

On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre B et de rayon r . Pour chaque question, déterminer l'équation du cercle:

- a $B(1; 2)$ et $r = 3 \text{ cm}$
- b $B(-3; 1)$ et $r = 5 \text{ cm}$

E.8554    On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé et le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(2; 1)$ et de rayon 4.

Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

E.8457    Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $K(3; -1)$ et de rayon 5.

- ① Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.
- ② Parmi les points ci-dessous, lesquels appartiennent au cercle $\mathcal{C}$:

$$M(-1; 2) \quad ; \quad N\left(\frac{8}{5}; -\frac{29}{5}\right) \quad ; \quad P\left(\frac{9}{5}; \frac{2}{5}\right)$$

E.3035    Dans le plan $(O; I; J)$, on considère les points A, B, C, D de coordonnées :

$$A(-1; -1) \quad ; \quad B(2; -4) \quad ; \quad C\left(\frac{22}{5}; \frac{4}{5}\right) \quad ; \quad D\left(\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right)$$

- ① Déterminer s'il existe des réels a, b et c tels que l'équation :

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot a \cdot x - 2 \cdot b \cdot y + c = 0$$

soit vérifiée par les coordonnées des quatre points A, B, C et D .

- ② Que peut-on dire des points A, B, C et D ?

E.8458    On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé et des trois points suivants :

$$A(-1; 2) \quad ; \quad B(0; -5) \quad ; \quad C(3; 4)$$

- ①
 - a) Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.
 - b) Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AC]$.
- ②
 - a) En déduire le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC .
 - b) Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

9. Cercle : caractérisation par le diamètre

E.8455   

Proposition : Si un triangle ABC est inscrit dans un cercle et qu'un de ses côtés forme un diamètre alors ce triangle est rectangle et ce côté est son hypoténuse.

Conséquence : Pour un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ et pour tout point M de ce cercle : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ dont l'unité est le centimètre.

On considère le cercle $\mathcal{C}'$ dont les points A et B sont diamétralement opposés. Déterminer l'équation du cercle dans chacun des cas suivants :

- a) $A(-2; 0)$ et $B(4; 0)$
- b) $A(2; -3)$ et $B(-1; 2)$

E.8555    On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé et le cercle $\mathcal{C}$ dont les points $A(-2; 1)$ et $B(3; 0)$ sont diamétralement opposés.

Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

E.8459    On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé.

- ①
 - a) Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ admettant pour diamètre le segment $[AB]$ où : $A(-1; 2) \quad ; \quad B(7; -4)$
 - b) Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}'$ admettant pour diamètre le segment $[CD]$ où : $C\left(-\frac{9}{5}; \frac{2}{5}\right) \quad ; \quad D\left(\frac{39}{5}; -\frac{12}{5}\right)$
- ② Que peut-on dire des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$?

10. Reconnaissance de l'équation d'un cercle

E.8452   

Proposition : Dans le plan, considérons l'équation cartésienne $x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, On note $\rho = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$. L'ensemble $\mathcal{E}$ des points définis par cette équation cartésienne est :

- vide si $\rho < 0$
- un point si $\rho = 0$
- un cercle si $\rho > 0$ dont le rayon est $\sqrt{\rho}$ et le centre $\left(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2}\right)$

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère l'équation cartésienne :

$$(E) : x^2 + y^2 - 4 \cdot x - 3 \cdot y - 31 = 0$$

- ① Montrer que les points $A(-3; 5)$ et $B\left(\frac{11}{2}; \frac{13}{2}\right)$ appartiennent à l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions de (E) .
- ② En déduire la nature de l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation cartésienne (E)

E.3083    On considère les trois équations cartésiennes suivantes :

(a) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$

(b) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 9 = 0$

1 Écrire chacune des équations ci-dessus sous la forme :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c$$

où a, b, c sont des nombres réels à déterminer.

2 Pour chaque équation, en déduire la nature de l'ensemble des points défini par cette équation et en préciser les éléments caractéristiques

E.8556    Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère les trois équations cartésiennes :

(a) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$

(b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 5 = 0$

Déterminer la nature, et si besoin les éléments caractéristiques, de l'ensemble défini par chacune de ces équations cartésiennes.

E.9756    On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$.

1 On considère le cercle $\mathcal{C}$ admettant l'équation cartésienne : $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$

Déterminer les éléments caractéristiques du cercle $\mathcal{C}$.

2 On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ du plan dont les coordonnées

des points vérifient l'équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 17 = 0$$

Déterminer la nature de cet ensemble.

E.9782    Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les deux équations cartésiennes :

○ $x^2 + y^2 + 3x - y + 5 = 0$

○ $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 11 = 0$

Pour chacune de ces équations, déterminer la nature des ensembles qu'elles définissent et si possible, donner leurs éléments caractéristiques.

E.8453    Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère les deux points $A(0; -1)$ et $B(2; 1)$.

Pour tout nombre réel k , on considère l'équation cartésienne (E_k) définie par :

$$(E_k) : x^2 + y^2 - 2k \cdot x + (2k - 2) \cdot y + 2 \cdot k - 3$$

1 (a) Pour tout nombre réel k , montrer que les coordonnées des points A et B vérifient l'équation cartésienne (E_k) .

(b) Pour tout nombre réel k , donner et justifier de la nature de l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation (E_k) .

2 (a) Déterminer, en fonction de k , les coordonnées du centre et le rayon du cercle définie par l'équation (E_k) .

(b) Démontrer que l'ensemble des centres des cercles défini par (E_k) appartient à une droite dont on donnera l'équation cartésienne.

11. Etude de la parabole

E.6485    Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation cartésienne :

$$(E) : x^2 - 2x + y + 3 = 0$$

1 On considère les deux points $A(0; -3)$ et $B(2; -3)$.

(a) Montrer que les deux points A et B appartiennent à l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation cartésienne (E) .

(b) Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

2 Soit h un nombre strictement positif.

(a) Montrer qu'il existe un unique point, qu'on notera M

(resp. N), de l'ensemble (E) ayant pour abscisse $1+h$ (resp. $1-h$). On donnera les coordonnées de ces deux points en fonction de h .

(b) Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est la médiatrice du segment $[MN]$ pour tout réel h strictement positif.

E.8557    Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $y = 2x^2 + x + 3$

À tout point M de la parabole, différent du sommet de la parabole, on associe le point M' second point d'intersection de la parabole $\mathcal{P}$ avec la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point M .

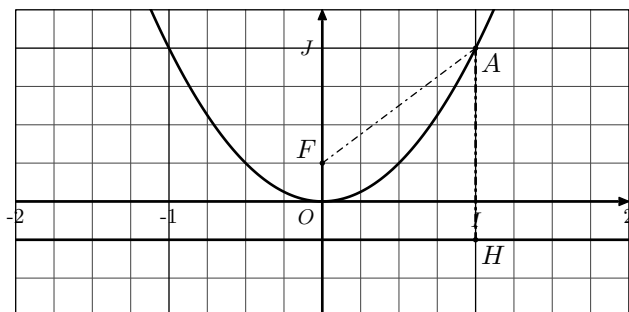
Déterminer les coordonnées du point M afin que $MM' = 2$.

12. Approfondissement: foyer et directrice d'une parabole

E.8460    Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points dont les coordonnées vérifient :

$$x^2 - y = 0$$

dont la représentation est donnée ci-dessous :



On note F le point de coordonnées $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$.

- 1 On considère le point $A(1; 1)$ et H son projeté orthogo-

nal sur la droite (d) dont l'équation cartésienne est :

$$y + \frac{1}{4} = 0$$

- Justifier que le point A appartient à l'ensemble $(\mathcal{E})$.
 - Déterminer la distance AF .
 - Donner les coordonnées du point H .
 - Déterminer la distance AH .
- 2 Soit x un nombre réel quelconque. On note M le point de l'ensemble $(\mathcal{E})$ ayant pour abscisse x .
- Donner les coordonnées du point M et de son projeté H' sur la droite (d) .
 - Déterminer la mesure de la distance FM et MH' .

13. Approfondissement: intersection cercle, parabole avec une droite

E.2597 On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.

- Soit (d) la droite ayant pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passant par le point $A(0; -1)$. Déterminer l'équation cartésienne de cette droite.
 - Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A(1; 1)$ et de rayon 3. Déterminer l'équation cartésienne de ce cercle.
- Dans cette question, on s'intéresse au point d'intersection de (d) et de $\mathcal{C}$.

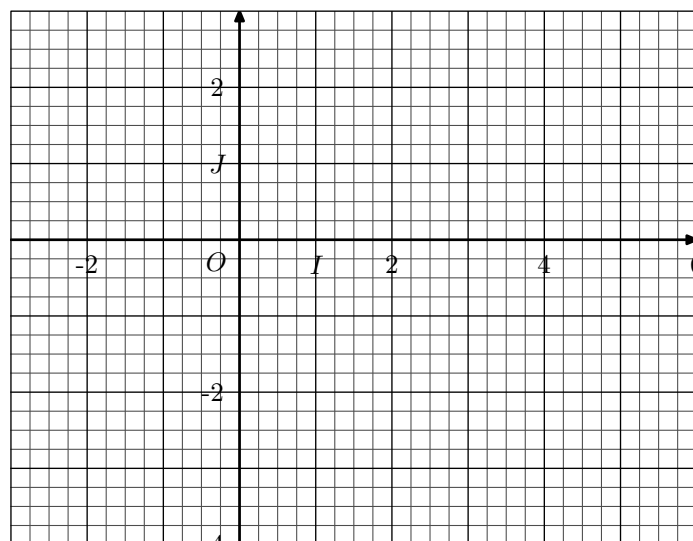
 - Justifier que si $M(x; y)$ est un point d'intersection de la droite et du cercle alors ses coordonnées vérifient le système d'équation :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0 \\ -2x + y + 1 = 0 \end{cases}$$
 - Par substitution, résoudre ce système d'équation.

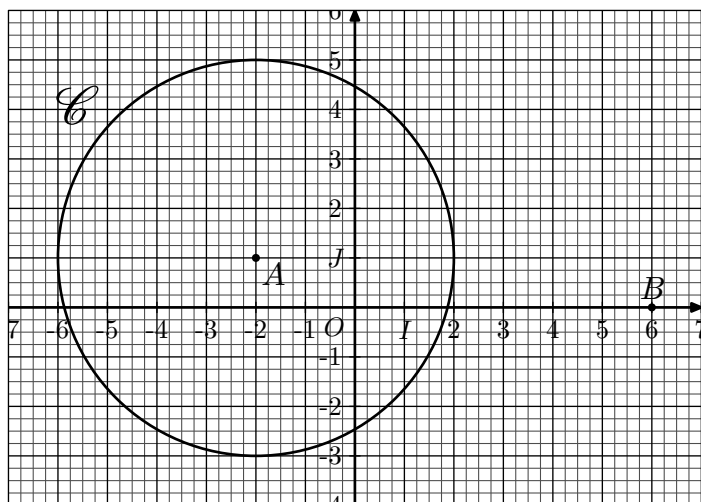
E.2660 On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ et l'ensemble des points $\mathcal{E}$ défini par l'équation cartésienne :

$$(E) : x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$$

- Écrire l'équation (E) sous la forme : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c$
 - Justifier que l'ensemble $\mathcal{E}$ est un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera les caractéristiques.
- Montrer que le point $A(3; 0)$ est un point du cercle $\mathcal{C}$.
 - Déterminer une équation cartésienne de la tangente (d) au cercle $\mathcal{C}$ passant par le point A .
- Après avoir montré que le point $B(-1; -2)$ est un point du cercle, donner une équation cartésienne de la droite (d') tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point B .
- Déterminer les coordonnées du point M , intersection des droites (d) et (d') .
- Tracer dans le repère ci-dessous le cercle $\mathcal{C}$ (ou une partie) et ses deux tangentes.



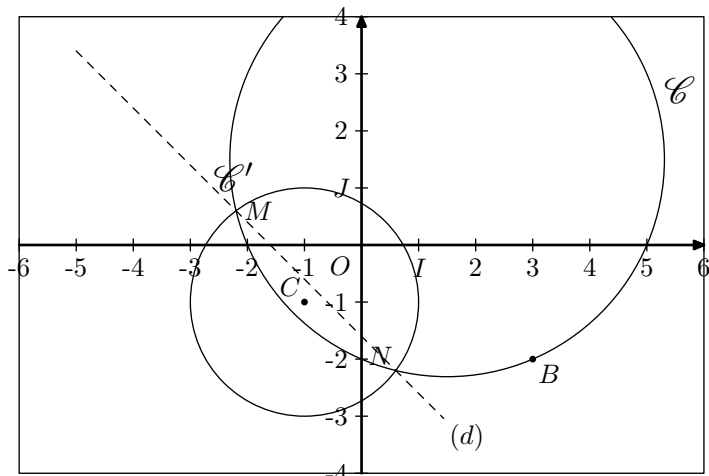
E.3039 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(-2; 1)$ et de rayon 4; le point B a pour coordonnée $(6; 0)$:



Le but de cet exercice est de déterminer l'équation des deux tangentes, (d) et (d') , au cercle $\mathcal{C}$ passant par le point B :

- 1 a) Déterminer l'équation du cercle $\mathcal{C}$.
- b) Déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$.
- 2 Déterminer les coordonnées des points de contact des droites (d) et (d') avec le cercle $\mathcal{C}$.
- 3 En déduire que les droites (d) et (d') admettent les équations cartésiennes:
 $35 \cdot x - 84 \cdot y - 210 = 0$; $-21 \cdot x - 28 \cdot y + 126 = 0$
- 4 Déterminer les coordonnées, pour chacune des droites, de leurs points d'abscisse 3; effectuer le tracé de ces droites.

E.9757 Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère les points $A(0; 5)$, $B(3; -2)$, $C(-1; -1)$; les points A et B sont diamétralement opposés dans le cercle $\mathcal{C}$; le cercle $\mathcal{C}'$ a pour centre C et a pour rayon 2. On note M et N les deux points d'intersection des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.



1 Déterminer les équations des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

2 Déterminer les coordonnées des points M et N .

E.9778 On considère les deux cercles:

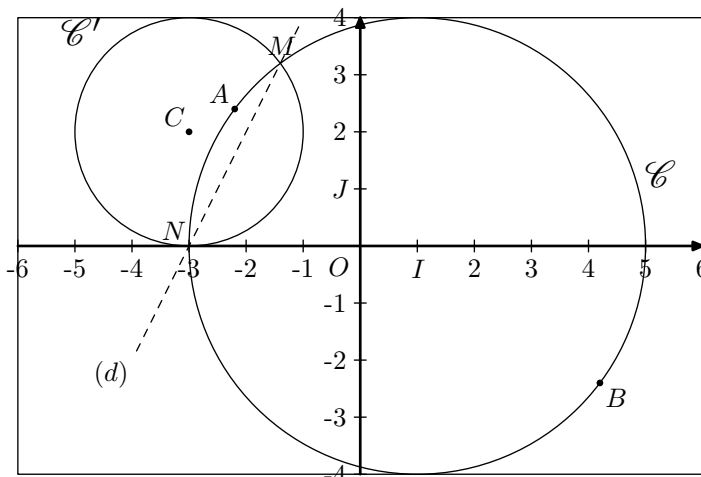
- $\mathcal{C}$ de centre $A(1; -2)$ et de rayon 2;
- $\mathcal{C}'$ admettant pour diamètre $[BC]$ où $B(3; 4)$ et $C(5; -2)$.

1 Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

2 Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}'$.

3 Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces deux cercles.

E.3088 Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère les points $A\left(-\frac{11}{5}; \frac{12}{5}\right)$, $B\left(\frac{21}{5}; -\frac{12}{5}\right)$, $C(-3; 2)$; les points A et B sont diamétralement opposés dans le cercle $\mathcal{C}$; le cercle $\mathcal{C}'$ a pour centre C et a pour rayon 2. On note M et N les deux points d'intersection des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.



1 Déterminer les équations des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

2 Déterminer les coordonnées des points M et N .

3 En déduire l'équation cartésienne de la droite (d) .

14. Exercices non-classés

E.3040 On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$; les points A et B ont pour coordonnées respectives $(2; -3)$ et $(-1; 1)$; on note I le milieu du seg-

ment $[AB]$; M représente un point quelconque du plan et ses coordonnées sont notées $(x; y)$:

1 On s'intéresse au lieu géométrique $\mathcal{E}$ défini par la rela-

tion: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$

- a Déterminer une relation entre x et y caractérisant l'ensemble $\mathcal{E}$.
- b Vérifier que le point de coordonnée $(2; \sqrt{6}-1)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.
- c Quelle est la nature géométrique de $\mathcal{E}$? Donner ses

éléments caractéristiques.

- 2 On s'intéresse au lieu géométrique $\mathcal{F}$ défini par la relation: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = -7,5$
 - a Déterminer une relation sur les coordonnées des points M appartenant à l'ensemble $\mathcal{F}$.
 - b Quelle est la nature géométrique de $\mathcal{F}$? Donner les éléments caractéristiques de $\mathcal{F}$.