



1. Variations des premiers termes de suites arithmétiques et géométriques

E.6015

Définition : soit (u_n) une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- la suite (u_n) est dite **strictement croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} > u_n$
- la suite (u_n) est dite **strictement décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} < u_n$
- la suite (u_n) est dite **constante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = u_n$

On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme 5 et de raison 2.

- 1 Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
- 2 Exprimer la valeur du terme u_n en fonction de son rang n .
- 3 Quelle conjecture peut-on émettre quant à la variation des termes de la suite (u_n) ?

E.6016 On considère la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme 24 et de raison $\frac{1}{2}$.

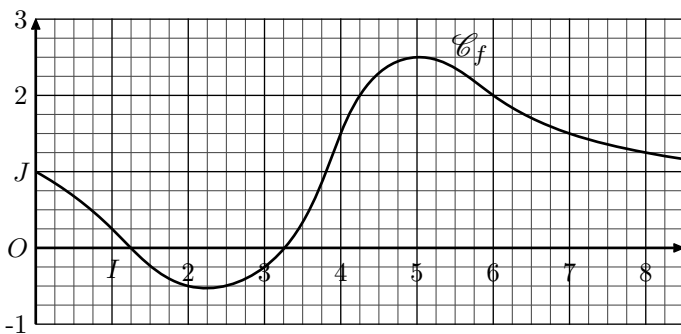
- 1 Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
- 2 Donner l'expression du terme général de la suite (u_n) en fonction de son rang n .
- 3 Quelle conjecture peut-on émettre quant à la variation des termes de la suite (u_n) ?

E.6653 Dans chaque cas, préciser, si possible, le sens de variation des suites :

- 1 (u_n) est une suite arithmétique dont le premier terme est positif et la raison négative.
- 2 (v_n) est une suite géométrique dont le premier terme est négatif et la raison est strictement supérieure à 1.
- 3 (w_n) est une suite géométrique dont le premier terme est positif et la raison est négative.

2. Variations et conjecture : suite définie explicitement

E.5089 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée dans le repère orthonormé $(O; I; J)$ ci-dessous :



On définit la suite (u_n) par la relation :
 $u_n = f(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

- 1 Justifier que le terme u_4 a pour valeur $\frac{3}{2}$.
- 2 a) Déterminer la valeur des termes :
 u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5 ; u_6
- b) Dire si les affirmations ci-dessous sont exactes ou non :

- "Les termes de la suite (u_n) pour $i \in \{0; 1; 2\}$ sont ordonnés dans l'ordre décroissant."
- "Les termes de la suite (u_n) pour $i \in \{3; 4; 5\}$ sont ordonnés dans l'ordre croissant."

E.1585 On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$):
 $u_n = 2 \cdot n^2 - n + 1$; $v_n = \frac{4 - n}{1 + n}$.

- 1 Déterminer les 5 premiers termes de ces deux suites.
- 2 Conjecturer le sens de variations de la suite (u_n) et (v_n) .

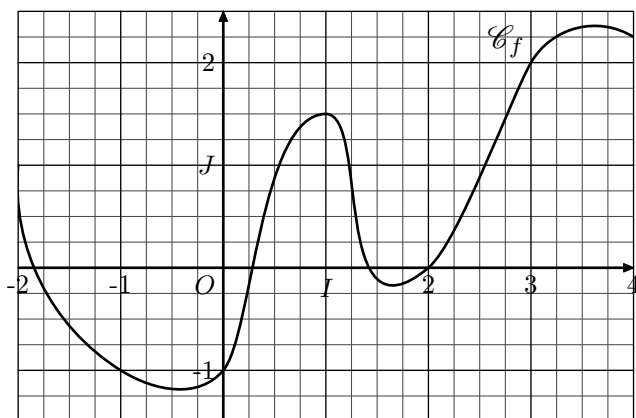
E.8477 On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout nombre entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$) par :

$$u_n = n^3 - 3 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 2 \quad ; \quad v_n = 3 \cdot [1 + (-1)^n] + 2$$

- 1 Déterminer les 5 premiers termes des suites (u_n) et (v_n) .
- 2 Pour chacune des conjectures, dire si elles sont probables ou non :
 - "la suite (u_n) est constante."
 - "la suite (v_n) est constante."

3. Variations et conjecture : suite définie par récurrence

E.2378    On considère la fonction f définie sur $[-2; 4]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous :



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 Compléter le tableau suivant avec les premiers termes de la suite (u_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n										

- 2 Pour chacune des affirmations ci-dessous, préciser si elles

sont vraies ou fausses :

- “la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.”
- “la suite (u_n) est constante à partir du rang 3.”

E.8478   

- 1 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$) par : $u_0 = 2$; $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot u_n - \frac{1}{4}$

- a Déterminer les 4 premiers termes de la suite (u_n) .
- b Conjecturer la variation de la suite (u_n)

- 2 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$) par : $v_0 = -1$; $v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n - \frac{1}{4}$

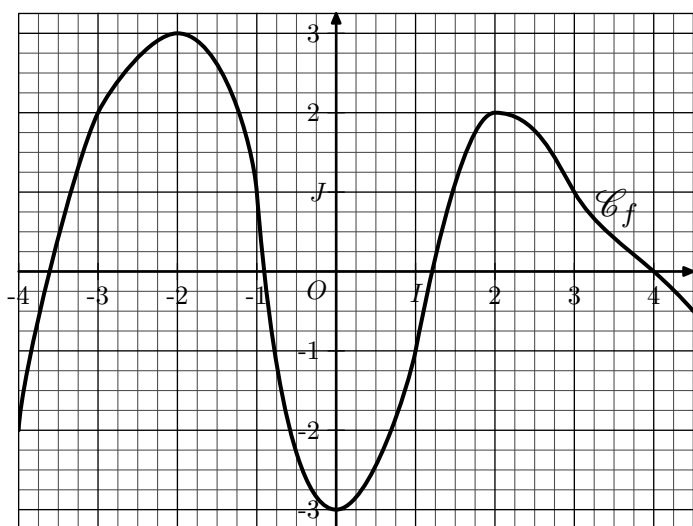
- a Justifier les comparaisons : $v_0 < v_1 < v_2 < v_3$
- b Conjecturer la variation de la suite (v_n)

E.8479    On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$) par : $u_0 = 1$; $u_{n+1} = \frac{2}{1 + \frac{2}{u_n}}$

- 1 Déterminer les 5 premiers termes de la suite (u_n) .
- 2 Conjecturer le sens de variations de la suite (u_n) .
- 3 Conjecturer l'expression explicite du terme général de la suite (u_n) en fonction de son rang n .

4. Variations et conjecture : suites périodiques

E.2978    Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère la représentation $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 4]$:



- 1 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$) définie par : $u_0 = 4$; $u_{n+1} = f(u_n)$

- a Déterminer la valeur des 6 premiers termes de la suite (u_n) .
- b Déterminer la valeur du terme u_{100} .

- 2 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$) définie par : $v_0 = -2$; $v_{n+1} = f(v_n)$
Déterminer la valeur du terme v_{100} .

E.2953    On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1 - u_n}{1 + u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
- 2 Montrer qu'on a la relation suivante : $u_{n+2} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- 3 Que peut-on dire des termes de cette suite?
- 4 On admet que le terme de rang n de la suite (u_n) admet une expression de la forme : $u_n = a \cdot [1 - (-1)^n] + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où a et b sont deux nombres réels ($a, b \in \mathbb{R}$). Déterminer les valeurs de a et de b .

5. Variations : suites explicites

E.8485     La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$u_n = -2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Étudier la monotonie de chacune des suites ci-dessous, en étudiant la fonction f vérifiant la relation :

$$u_n = f(n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

E.2386    On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme de rang n est donné par la formule : $u_n = n^2 - 7 \cdot n + 1$

① À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-

dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n											

② Après avoir donné le tableau de variations de la fonction f dont l'image de x est définie par :

$$f(x) = x^2 - 7 \cdot x + 1$$

Établir que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

6. Variations : suites explicites avec dérivées

E.2382     La suite (u_n) est définie par :

$$u_n = \frac{2 \cdot n^2 + 1}{2 \cdot n + 5} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2 \cdot x^2 + 1}{2 \cdot x + 5}$

- ① Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f .
- ② Établir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression sur $\mathcal{D}_f$: $f'(x) = \frac{4 \cdot x^2 + 20 \cdot x - 2}{(2 \cdot x + 5)^2}$

③ Dresser le tableau de variations de la fonction f .

④ Justifier que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

⑤ Peut-on dire que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$?

E.2410    Établir la monotonie sur $\mathbb{N}$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la formule explicite :

$$u_n = \frac{n^2 - 1}{\sqrt{n}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

7. Variations des suites arithmétiques

E.10424    On considère la suite (u_n) arithmétique, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, de premier terme de 2 et de raison 3 :

- ① Donner l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction de leur rang n .
- ② Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression $u_{n+1} - u_n$
- ③ En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Proposition : soit (u_n) une suite arithmétique :

- (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, sa raison est strictement négative ;
- (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, sa raison est strictement positive ;
- (u_n) est constante si, et seulement si, sa raison est nulle ;

E.10425   Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

① Relier les assertions correspondantes :

- | | |
|----------------------------|------------------------|
| (u_n) est croissante • | • $u_0 > 0$ et $r > 0$ |
| | • $u_0 > 0$ et $r < 0$ |
| | • $u_0 < 0$ et $r > 0$ |
| (u_n) est décroissante • | • $u_0 < 0$ et $r < 0$ |

② À quelle(s) condition(s) une suite arithmétique est constante?

E.8495    Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 3. Justifier que la suite (u_n) est une suite croissante sur $\mathbb{N}$.

E.10423   Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$) et dont le terme de rang n admet l'expression :

$$v_n = 4 - n$$

Justifier que la suite (v_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

E.2380    Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$u_n = -32n + 102 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que cette suite est décroissante.

8. Variations des suites géométriques

E.10427   On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ géométrique de premier terme 3 et de raison 0,1.

- 1 Exprimer en fonction de n le terme de la suite (u_n) de rang n .
- 2 Simplifier et factoriser l'expression $u_{n+1} - u_n$.
- 3 En déduire le sens de variations de la suite (u_n) .

Proposition : soit (u_n) géométrique de raison q .

- Si $u_0 > 0$ et $q > 1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante.
- Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

E.9846   On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique de premier terme u_0 et de raison q .

Indiquer, si possible, dans le tableau ci-dessous le sens de variation de la suite (u_n) en fonction de la valeur de ses éléments caractéristiques :

	$0 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$u_0 < 0$			
$u_0 = 0$			
$u_0 > 0$			

E.10426   Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison r .

- 1 Relier les assertions correspondantes :

- | | |
|----------------------------|--|
| (u_n) est croissante • | <ul style="list-style-type: none"> • $u_0 > 0$ et $q > 1$ • $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$ • $u_0 > 0$ et $-1 < q < 0$ • $u_0 > 0$ et $q < -1$ • $u_0 < 0$ et $q > 1$ |
| (u_n) est décroissante • | <ul style="list-style-type: none"> • $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$ • $u_0 < 0$ et $-1 < q < 0$ • $u_0 < 0$ et $q < -1$ |

- 2 À quelle(s) condition(s) une suite géométrique est constante?

9. Variations : différence de termes consécutifs (suites explicites)

E.8480   On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1-n}{1+n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 Déterminer une expression simplifiée de $u_{n+1} - u_n$.
- 2 En déduire les variations de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$.

E.8482   On considère la suite (u_n) définie par la relation :

$$u_n = n^3 - 4n^2 + n - 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 Établir l'identité ci-dessous pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = 3n^2 - 5n - 2.$$
- 2 En déduire que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 2.

E.8481   Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation explicite :

$$u_n = n^3 - 2n^2 - 3n$$

- 1 Donner l'expression réduite de : $u_{n+1} - u_n$.
- 2 En déduire que la suite (u_n) est croissante pour n supérieur à 2.

E.3401   On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{n^2 + 10}{2n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Justifier que (u_n) est croissante à partir du rang 3.

E.6040   On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$u_n = \frac{5n-1}{(n+1)^2}$$

- 1 Donner la forme simplifiée et factorisée de la différence :

$$u_{n+1} - u_n$$
- 2 Justifier que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

E.8496    Soit (u_n) la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$u_n = \sqrt{2n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

- ① Établir l'identité ci-dessous pour tout entier naturel n strictement positif ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$$

- ② en déduire que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

E.8497    Soit (w_n) la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$w_n = 2n - \frac{25}{n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Montrer que la suite (w_n) est croissante.

E.8483    La suite (u_n) est définie par la formule explicite :

$$u_n = \frac{5+n}{n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Déterminer le sens de variations de la suite (u_n) .

10. Variations : différence de termes consécutifs (suites définies par récurrence)

E.5367    Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 ; \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2 - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- ① Compléter le tableau ci-dessous des premiers termes de la suite (u_n) :

n	0	1	2	3	4
u_n					

- ② En étudiant la différence de deux termes consécutifs, montrer que la suite (u_n) est décroissante.

E.10639   On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -3 ; \quad u_{n+1} = u_n - 3n + 7$$

- ① Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
② Déterminer à partir de quel rang la suite (u_n) est décroissante.

11. Variations : quotient de termes consécutifs

E.8494   

- ① Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme 2 et de raison 4. Justifier que la suite (u_n) est croissante.

- ② Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$) et dont le terme de rang n admet l'expression :
$$v_n = 3 \times 0,2^n$$

Justifier que la suite (v_n) est décroissante.

E.2381    On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{3^n}{4} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que (u_n) est strictement croissante.

E.2522    On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$) par :
$$u_n = \frac{5^n}{n+2}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante sur $\mathbb{N}$.

E.5491    On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{3^n}{2n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Déterminer les variations de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$.

E.10471   On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2^n}{n^2+1}$$

Déterminer à partir de quel rang la suite (u_n) est croissante.

E.2451    La suite (u_n) est définie par la formule explicite :

$$u_n = \frac{2^n}{3 \cdot n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Déterminer le sens de variations de la suite (u_n) .

12. Variations à partir d'un rang : quotient de termes consécutifs

E.2450    On considère la suite (u_n) définie par la formule explicite :

$$u_n = \frac{1,2^n}{n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

- ① Donner l'expression simplifiée de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

- ② Montrer que (u_n) est croissante à partir du rang 5.

E.2670    Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par la relation :
$$u_n = n \times (0,4)^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

E.8490    On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par la formule explicite: $u_n = \frac{1,2^n}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

① Établir l'identité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{n^2 - 10 \cdot n - 5}{5 \cdot (n+1)^2}$$

② En déduire que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 11.

E.8489    La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par:

$$u_n = \frac{n}{2^{n+1}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que (u_n) est strictement décroissante à partir du rang 2.

13. Lien entre formule récurrente et formule explicite

E.2383   

① On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme de rang n est définie par la relation de récurrence:

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n) .

② On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie explicitement par:

$$v_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}$$

a) Calculer les 4 premiers termes de la suite (v_n)

b) Établir que pour tout entier naturel n , on a:

$$v_{n+1} - \frac{1}{3} \cdot v_n = 1$$

③ En déduire l'égalité des suites (u_n) et (v_n) .

E.2384   

① Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la suite définie par la relation de récurrence et la condition initiale:

$$u_1 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{u_n}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Calculer les 4 premiers termes de la suite.

② Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n a pour valeur: $v_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

a) Donner la valeur de v_1 .

b) Établir l'identité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + \frac{1}{v_n} = n + 1$$

c) En déduire que la suite (v_n) suit la relation de récurrence ci-dessous pour tout entier naturel non-nul:

$$v_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{v_n}}$$

③ Que pouvez-vous dire des suites (u_n) et (v_n) ?

E.5136    On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par:

$$\bullet u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = 3 \cdot u_n - 2 \cdot n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet v_n = 3^n + n - 1$$

① a) Établir que les deux suites (u_n) et (v_n) ont le même premier terme.

b) Montrer que les termes de la suite (v_n) vérifient la relation de récurrence:

$$v_{n+1} = 3 \cdot v_n - 2 \cdot n + 3$$

② Justifier l'égalité des deux suites (u_n) et (v_n) .

E.2385   

① On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence suivante:

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = 2 \cdot u_n - 3 \cdot n + 2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

a) En étudiant la relation de récurrence précédente, montrer que $u_1 = 6$.

b) Déterminer la valeur des termes u_2 et u_3 .

② On définit les termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation:

$$v_n = 2^n + 3n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

a) Donner les 4 premiers termes de la suite (v_n) .

b) Pour tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$), établir l'égalité:

$$2 \cdot v_n - 3 \cdot n + 2 = 2^{n+1} + 3 \cdot (n+1) + 1$$

③ En déduire l'égalité des suites (u_n) et (v_n) .

14. Notions de limites: suites définies explicites

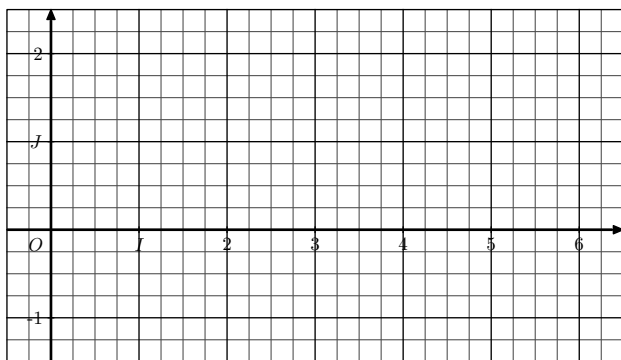
E.8502    On considère la suite (u_n) dont les termes sont définis pour tout entier naturel n par la relation:

$$u_n = \frac{10 \cdot n - 1}{5 \cdot n + 1}$$

① a) À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs ci-dessous avec des valeurs arrondies au centième près:

n	0	1	2	3	4	5
u_n						

b) Dans le repère ci-dessous et pour n , placer la suite des points (A_n) dont les coordonnées sont définies par: $A_n(n; u_n)$



- 2 a À l'aide de la calculatrice, observer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{10 \cdot x - 1}{5 \cdot x + 1}$$

- b Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

E.8504 🔑 📐 📅 À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de chacun des suites définies ci-dessous lorsque n tend vers $+\infty$:

- la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$) par : $u_n = \frac{4 \cdot n}{1 + 12 \cdot n}$
- la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$) par : $v_n = n^2 + 2 \cdot n - 3$
- la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$) par : $w_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

E.8503 🔑 📐 📅

- 1 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . Compléter le tableau à double entrée ci-dessous en y indiquant, dans chaque cas, la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

	$r > 0$	$r < 0$
$u_0 > 0$		
$u_0 < 0$		

- 2 Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q . Compléter le tableau à double entrée ci-dessous en y indiquant, dans chaque cas si possible, la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

	$v_0 > 0$	$v_0 < 0$
$q > 1$		
$0 < q < 1$		
$-1 < q < 0$		
$q < -1$		

15. Notions de limites : somme des termes d'une suite

E.6029 🔑 📐 📅 On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{2}{3}$.

On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n) : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$

- 1 Justifier que la suite (S_n) est croissante.
 2 Donner l'expression du terme S_n en fonction de n .
 3 a À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous en arrondissant les valeurs au millièmes près :

n	0	1	2	10	20	24
S_n						

- b Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

E.6013 🔑 📐 📅 Un coureur se lance un défi : il souhaite faire le tour de l'Europe.

Le premier jour, il parcourt 50 km. Par la fatigue, de jour en jour, sa distance parcourue quotidiennement se réduit de 1 %.

On note u_n la longueur parcourue par le coureur le n -ième jour. En supposant que le coureur poursuive indéfiniment sa course, on obtient une suite (u_n) définie pour tout entier naturel non-nul.

- 1 Déterminer la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n) .
 2 a Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner les éléments caractéristiques de la suite (u_n) .
 b Exprimer le terme u_n en fonction du rang n .
 c Quelle distance sera parcourue par le coureur le 100^e jour? On arrondira la valeur au dixième de kilomètre.
 3 Pour tout entier naturel n , on note S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n) : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 a Exprimer la somme S_n en fonction du rang n .
 b Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième de kilomètres :

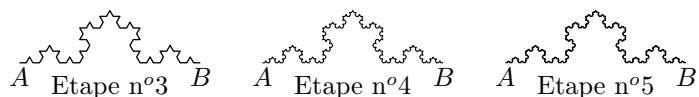
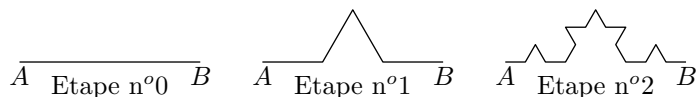
n	10	100	500	750	1000
u_n					

- c) Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite des termes de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

E.6014 🔥 🍷 📖 On construit le flocon de Heige Von Koch de la manière suivante :

- On part d'un segment $[AB]$ de longueur 9 cm .
- Pour passer d'une étape à la suivante, on découpe chaque segment de la figure en trois parties égales et on remplace le segment "central" par un triangle équilatéral.

Voici la représentation des 6 premières étapes de cette construction :



À chaque étape n , on note u_n la longueur de la "ligne brisée" ainsi obtenue. On construit ainsi une suite de nombres (u_n) définie pour tout entier naturel n .

- Déterminer la mesure des trois premiers termes de la suite (u_n) .
- a) À l'étape n , exprimer le nombre de segments s_n formant la "ligne brisée" en fonction de n .
b) À l'étape n , exprimer la longueur ℓ_n de chacun des segments formant la "ligne brisée" en fonction de n .
- On note L_n la longueur de la "ligne brisée" à l'étape n .

On obtient ainsi une suite (L_n) de termes numériques définie pour tout entier naturel n .

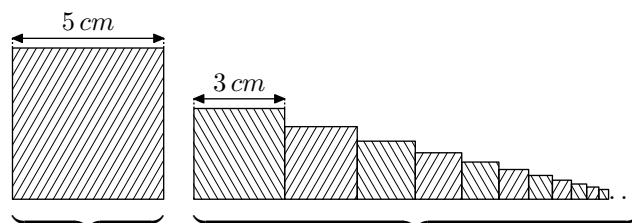
- Exprimer les termes de la suite (L_n) en fonction de leur rang n .
- Compléter le tableau ci-dessous en arrondissant les valeurs au centième de centimètre près :

n	0	1	10	20	30
L_n					

E.6039 🔥 🍷 📖

Indication : dans cet exercice, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. La qualité des justifications sera également prise en compte.

On considère les deux figures ci-dessous :



Première figure

Seconde figure

- La première figure est un carré dont les côtés mesurent 5 cm ;
- La seconde figure est composée d'un carré dont les côtés mesurent 3 cm , pour compléter la figure, on y ajoute un nouveau carré dont les dimensions ont été réduites par le coefficient $\frac{4}{5}$. On répète un certain nombre de fois cette figure sans pour autant savoir combien de fois !

De ces deux figures, laquelle possède la plus grande aire?

16. Approfondissement : suite arithmético-géométrique et variation

E.9844 🔥 🍷 📖 On considère la suite (u_n) définie par la relation :

$$u_0 = -2 \quad ; \quad u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 0,5 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- On définit la suite (v_n) définie par la relation :
 $v_n = u_n + 0,5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 - Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité : $v_{n+1} = 2 \cdot v_n$
 - Donner la nature et les éléments caractéristiques de la droite (v_n) .
 - Donner le sens de variation de la suite (v) sur $\mathbb{N}$. Justifier votre réponse.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir : $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n$
 - En déduire le sens de variations de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$.

E.9845 🔥 🍷 📖 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_1 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = 0,2 \cdot u_n + 0,04 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

- On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}^*$ par la relation :
 $v_n = u_n - 0,05$

- Établir l'égalité pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} = 0,2 \cdot v_n$
 - Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la suite (v_n) .
- Établir l'égalité pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
 $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n$
 - En déduire le sens de variation de la suite (u_n)

E.6668 🔥 🍷 📖 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = (1 + \sqrt{2}) \cdot u_n - \sqrt{6} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et la suite (v_n) , définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $v_n = u_n - \sqrt{3}$

- Établir que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera les éléments caractéristiques et son sens de variations.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir l'égalité :
 $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n$
 - Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

17. Approfondissement: suite arithmético-géométrique et formule explicite

E.9843    On considère la suite (u_n) définie par la relation :

$$u_0 = 8 \quad ; \quad u_{n+1} = 0,95 \cdot u_n + 0,5 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 On définit la suite (v_n) définie par la relation :

$$v_n = u_n - 10 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
 - a Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95. On précisera la valeur de son premier terme.
 - b Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n .
- 2 En déduire une expression de la suite (u_n) en fonction de n .
- 3 Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

E.9842    On souhaite étudier la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On définit la suite (v_n) par : $v_n = u_n - 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- 1
 - a Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et sa raison.
 - b Exprimer v_n en fonction du rang n .
- 2
 - a En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
 - b Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir que : $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$
 - c En déduire le sens de variations de la suite (u_n) .

E.5368    On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{2} \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}$$

- 1 On considère la suite (v_n) définie par la relation suivante pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{1}{2} \cdot u_n - 1$$
 - a Établir l'égalité ci-dessous pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$$
 - b Donner le sens de variation de la suite (v_n) .
- 2 En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

18. Approfondissement: autres utilisations de suites auxiliaires

E.8487    On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 1 \quad ; \quad v_{n+1} = v_n + 2 \cdot n + 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n) .
- 2 Quelle conjecture peut-on émettre sur les termes de la suite (v_n) ?

On définit la suite (w_n) définie par :

$$w_n = v_{n+1} - v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 3 Justifier que la suite (w_n) est une suite arithmétique. On précisera les éléments caractéristiques de cette suite.
- 4 Déterminer l'expression de la somme S des n premiers termes de la suite (w_n) .
- 5 En remarquant l'égalité $\left(\sum_{k=0}^{n-1} w_k\right) + v_0 = v_n$, en déduire l'expression du terme v_n en fonction de n .
- 6 Confirmer la conjecture faite à la question 2.

19. Approfondissement: suites définies conjointement

E.8498    On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ v_0 = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{2 \cdot u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3 \cdot v_n}{3} \end{cases}$$

- 1 Déterminer les trois premiers termes des suites (u_n) et (v_n) .
- 2 On admet que les termes des suites (u_n) et (v_n) sont des nombres strictement positifs.
 Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont croissantes sur

$\mathbb{N}$.

E.4235    On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\bullet u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet v_0 = 12 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2 \cdot v_n}{3} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.
- 2 Montrer que la suite (u_n) est croissante puis, que la suite (v_n) est décroissante.

20. Exercices non-classés

E.5973



- 1 a On considère la suite (u_n) définie par la relation :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) .

- b On considère la suite (v_n) définie par la relation :

$$v_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n) .

- c Quelle conjecture peut-on faire à propos des suites (u_n) et (v_n) ?

- 2 a Simplifier l'expression suivante : $v_{n+1} \cdot (2 - v_n)$

- b Justifier que les deux suites (u_n) et (v_n) sont égales.

E.10569



On considère la construction de motif pas à pas dont les cinq premières étapes sont représentées ci-dessous :

Motif 0	Motif 1	Motif 2	Motif 3

- 1 Combien de carreaux faut-il pour construire le motif 4? le motif 5?

- 2 On note u_n le nombre de carreaux nécessaire pour construire le motif n .

- a Donner la formule de récurrence vérifiée par la suite (u_n) .

- b Établir que les termes de la suite (u_n) admettent pour formule explicite :

$$u_n = 2n^2 + 5n + 4$$

E.10570



On considère la construction de motif pas à pas dont les cinq premières étapes sont représentées ci-dessous :

Motif 0	Motif 1	Motif 2	Motif 3

- 1 Combien de carreaux faut-il pour construire le motif 4? le motif 5?

- 2 On note u_n le nombre de carreaux nécessaire pour construire le motif n .

- a Donner la formule de récurrence vérifiée par la suite (u_n) .

- b Établir que les termes de la suite (u_n) vérifient la formule explicite :

$$u_n = \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{3}{2} \cdot n^2 + \frac{13}{6} \cdot n + 1$$