



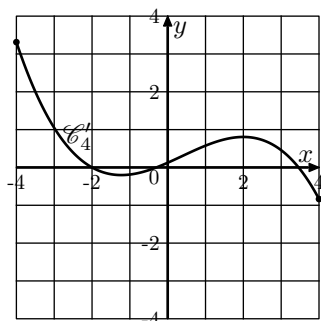
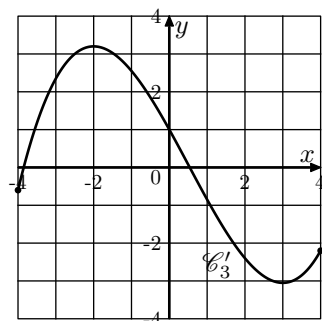
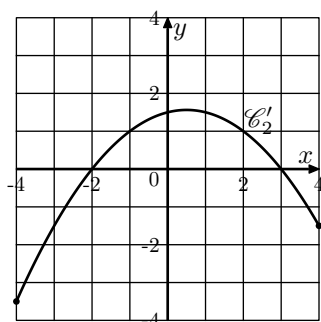
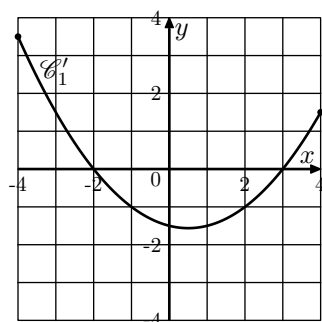
ChingQuizz : 5 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM :

1. Fonction dérivée : relation graphique

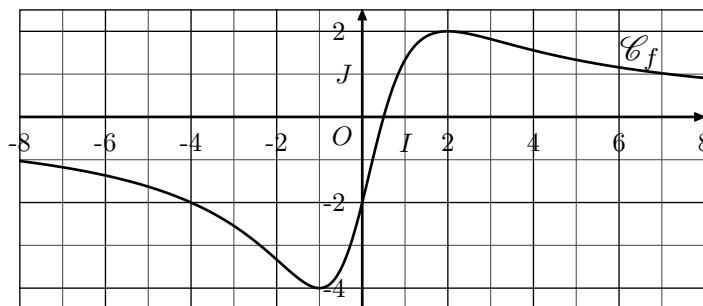
E.7748 On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$ et dont on connaît les propriétés suivantes :

- la fonction f admet un maximum en -2 sur l'intervalle $[-3; 0]$.
- la fonction f admet un minimum en 3 sur l'intervalle $[1; 4]$.

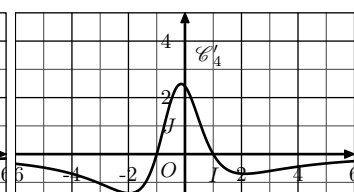
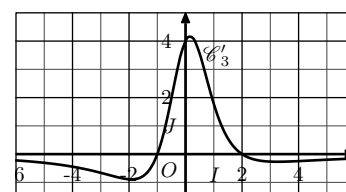
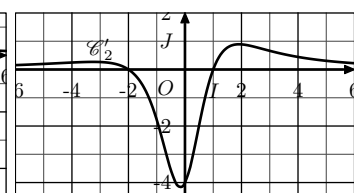
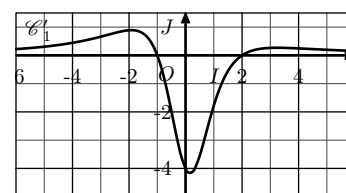
Parmi les quatre courbes représentatives ci-dessous, une seule est la courbe représentative de la fonction f' dérivée de la fonction f .



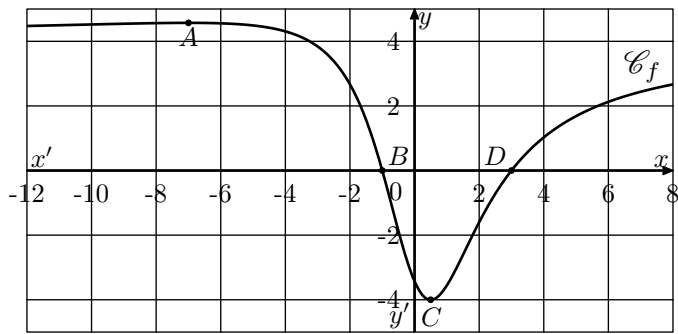
E.5020 On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui admet dans le repère $(O; I; J)$ la courbe $\mathcal{C}_f$ pour représentation :



Parmi les quatre courbes $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{C}'_2$, $\mathcal{C}'_3$ et $\mathcal{C}'_4$ présentées ci-dessous, déterminer la courbe représentative de la fonction f' , dérivée de la fonction f . Justifier votre choix :



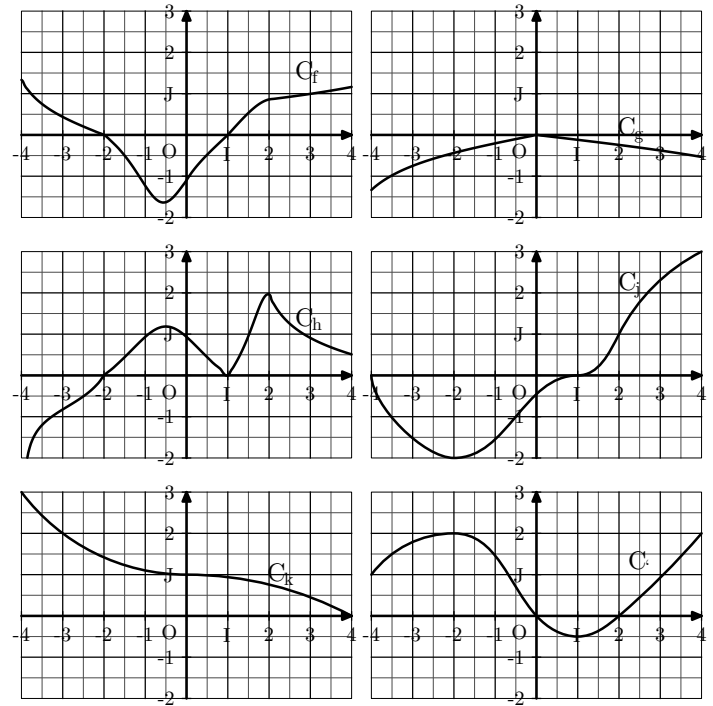
E.5731 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé :



- La courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux tangentes horizontales aux points A et C d'abscisses respectives -7 et $\frac{1}{2}$;
 - La courbe $\mathcal{C}_f$ intercepte l'axe des abscisses aux points B et D de coordonnées respectives $(-1; 0)$ et $(3; 0)$.
- On considère la fonction g qui admet pour dérivée la fonction f ($g' = f$). Dresser le tableau de variations de la fonction g .
 - On considère la fonction h qui est la dérivée de la fonction f ($f' = h$). Dresser le tableau de signes de la fonction h .

E.2926 On considère les six fonctions $f, g,$

h, j, k, l définies sur $[-4; 4]$ dont les courbes représentatives sont données ci-dessous :



Associer à trois de ces fonctions leurs trois dérivées respectives.

2. Dérivés de produits : fonction polynôme

E.7511 On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$u(x) = 3 \cdot x - 2 \quad ; \quad v(x) = 2 - x$$

On définit la fonction f définie par la relation $f = u \cdot v$. Déterminer les images ci-dessous par la fonction f :

- a) $f(1)$ b) $f(3)$ c) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$

E.105

Proposition : pour deux fonctions u et v définies sur un intervalle I , la fonction produit $u \cdot v$ admet pour dérivée la fonction notée $(u \cdot v)'$ définie pour tout $x \in I$ par :

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- Compléter le tableau ci-dessous, où la fonction u' (resp. v') est la fonction dérivée de la fonction u (resp. v) :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3 \cdot x^2 + 3 \cdot x$	$2 \cdot x + 2$		
x^8	$3 - x$		

- Pour chacune des lignes du tableau, montrer que la fonction f admet la fonction f' pour fonction dérivée :

$f(x)$	$f'(x)$
$(3 \cdot x^2 + 3 \cdot x)(2 \cdot x + 2)$	$18 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 6$
$x^8 \cdot (3 - x)$	$x^7 \cdot (24 - 9 \cdot x)$

E.4686   

- ① Pour chacune des fonctions u (resp. v), donner l'expression de sa fonction dérivée u' (resp. v'):

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3 \cdot x^2 - 2$	$8 - x$		

- ② Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f définie par:
 $f: x \mapsto (3 \cdot x^2 - 2)(8 - x)$

3. Dérivés de produits: fonction inverse

E.10466   

Proposition: pour deux fonctions u et v définies sur un intervalle I , la fonction produit $u \cdot v$ admet pour dérivée la fonction notée $(u \cdot v)'$ définie pour tout $x \in I$ par:

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- ① Compléter le tableau ci-dessous, où la fonction u' (resp. v') est la fonction dérivée de la fonction u (resp. v):

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$\frac{1}{x}$	$x^5 + 1$		
$\frac{1}{x}$	$3 - x^2$		

- ② Pour chacune des lignes du tableau, montrer que la fonction f admet la fonction f' pour fonction dérivée:

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{x} \cdot (x^5 + 1)$	$\frac{4x^5 - 1}{x^2}$
$\frac{1}{x} \cdot (3 - x^2)$	$\frac{-x^2 - 3}{x^2}$

E.7736    On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ dont les expressions sont données dans le

E.4689    Déterminer, pour chaque fonction, l'expression de sa fonction dérivée:

① $f: x \mapsto (x^2 - 3 \cdot x + 1)(1 - 2 \cdot x)$

② $g: x \mapsto (-x^3 + 2 \cdot x + 3) \cdot (x^2 + 1)$

E.7085    Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes:

① $f: x \mapsto x^5 \cdot (x^2 - 1)$ ② $g: x \mapsto (2 \cdot x^2 - 5x + 1)(1 - x^2)$

tableau ci-dessous. Établir les expressions de leurs fonctions dérivées données dans le tableau:

$f(x) = (x^2 - 1) \cdot \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$
$g(x) = (2 - 3 \cdot x^2) \cdot \frac{1}{x}$	$g'(x) = \frac{-3 \cdot x^2 - 2}{x^2}$

E.10463   

- ① Pour chacune des fonctions u (resp. v), donner l'expression de sa fonction dérivée u' (resp. v'):

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$\frac{1}{x}$	$x^2 - 1$		
$5 \cdot x + \frac{2}{x}$	$3 - 2 \cdot x^3$		

- ② Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer l'expression de sa fonction dérivée:

a) $f: x \mapsto \frac{1}{x} \cdot (x^2 - 1)$ c) $g: x \mapsto \left(5 \cdot x + \frac{2}{x}\right)(3 - 2 \cdot x^3)$

E.5226    Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes:

① $f: x \mapsto (3 - x) \cdot \frac{1}{x}$ ② $g: x \mapsto x \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)$

On donnera l'expression des fonctions dérivées sous la forme d'un **quotient simplifié**.

4. Dérivés de produits: fonction racine carrée

E.10465   

Proposition: pour deux fonctions u et v définies sur un intervalle I , la fonction produit $u \cdot v$ admet pour dérivée la fonction notée $(u \cdot v)'$ définie pour tout $x \in I$ par:

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- ① Compléter le tableau ci-dessous, où la fonction u' (resp. v') est la fonction dérivée de la fonction u (resp. v):

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$2 \cdot x^2 + 1$	$\sqrt{x}$		
$\frac{2}{x}$	$\sqrt{x}$		

- ② Pour chacune des lignes du tableau, montrer que la fonction f admet la fonction f' pour fonction dérivée:

$f(x)$	$f'(x)$
$(2 \cdot x^2 + 1)\sqrt{x}$	$\frac{10 \cdot x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{2}{x} \cdot \sqrt{x}$	$-\frac{1}{x \cdot \sqrt{x}}$

E.10464

- 1 Pour chacune des fonctions u (resp. v), donner l'expression de sa fonction dérivée u' (resp. v'):

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
x	$\sqrt{x}$		
$x^2 + 1$	$\sqrt{x}$		

- 2 Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer l'expression de sa fonction dérivée:

a $f : x \mapsto x \cdot \sqrt{x}$ b $g : x \mapsto (x^2 + 1) \cdot \sqrt{x}$

E.10462 Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction g définie ci-dessous:

$$g : x \mapsto (x^2 - 3) \cdot \sqrt{x}$$

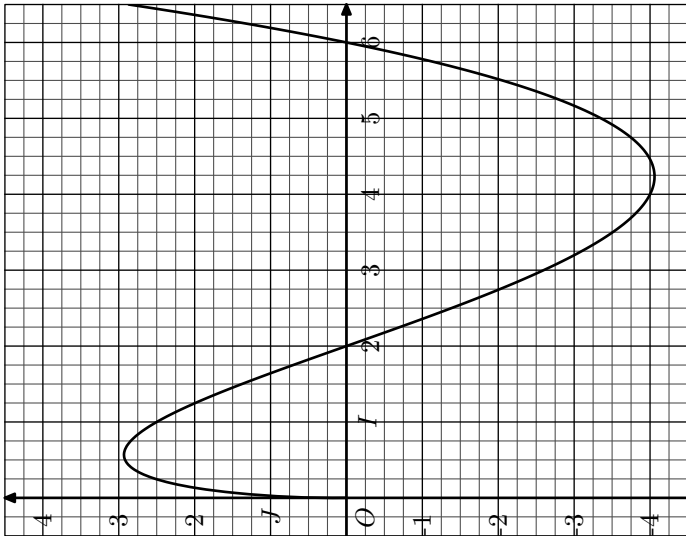
On donnera l'expression de la fonction dérivée g' sous la forme d'un **quotient simplifié**.

5. Produits: fonctions dérivées vers tangentes

E.4715 On considère la fonction f définie par la relation est:

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 - 4x + 6 \right)$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :



- 1 a Effectuer le tracé de la droite (d) dont l'équation est:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot x - 2$$

- b Effectuer le tracé de la droite (Δ) dont l'équation est:

$$y = -\frac{7}{4} \cdot x + \frac{17}{4}$$

- 2 a Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction f .

- b Donner les valeurs des nombres dérivés de la fonction f en 1 et 4.

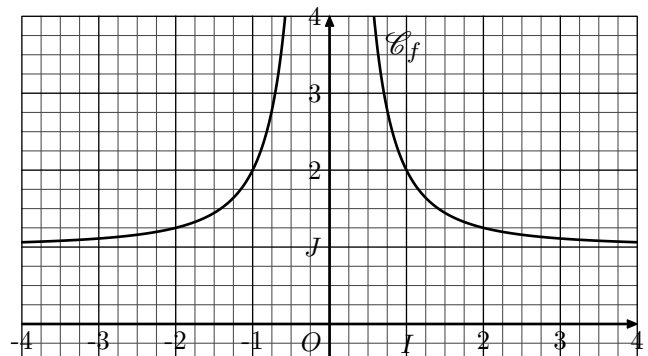
6. Produits: tangentes

E.7719 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par:

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

- 1 Établir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

- 2 On donne la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère $(O; I; J)$:

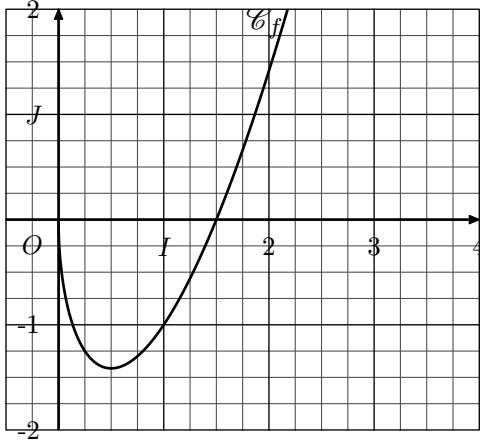


- a) Donner la valeur des nombres $f(2)$ et $f'(2)$.
 b) En déduire l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.
 c) Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

E.8193 🔑 🍷 📖 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = (2x - 3) \cdot \sqrt{x}$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé :



- 1) Établir que la fonction f' , dérivée de la fonction f , admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{6x - 3}{2\sqrt{x}}$$

- 2) a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
 b) Tracer dans le repère ci-dessus la tangente (T) .

E.10643 🔑 🍷 📖 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = (3 - x) \cdot \sqrt{x}$$

- 1) Établir que : $f'(9) = -4$
 2) On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
 En déduire l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 9.

E.10642 🔑 🍷 📖 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = (2x + 2) \cdot \sqrt{x}$$

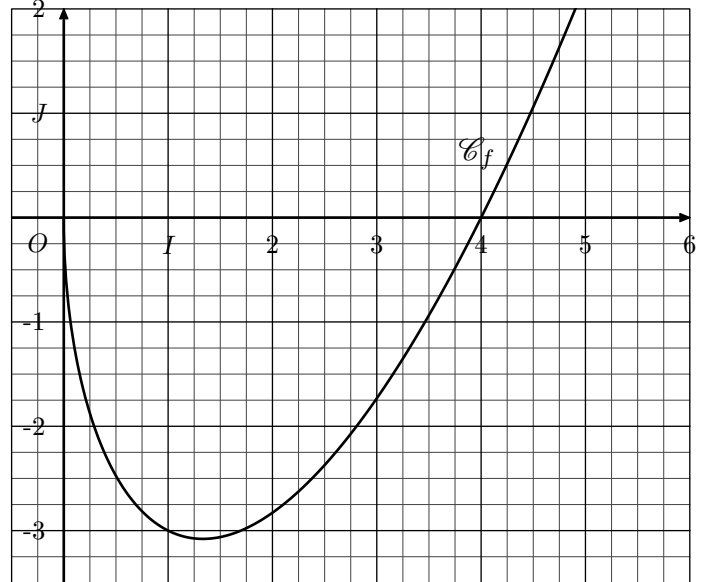
- 1) Établir que : $f'(4) = \frac{13}{2}$

- 2) On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
 En déduire l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.

E.5227 🔑 🍷 📖 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = (x - 4) \cdot \sqrt{x}$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé :



- 1) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T_1) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4. Tracer la tangente (T_1) dans le repère.
 2) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T_2) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1. Tracer la tangente (T_2) dans le repère.

E.10644 🔑 🍷 📖 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = (4 - x) \cdot \sqrt{x}$$

- 1) Établir que : $f'(8) = -\frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}$
 2) On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
 En déduire l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 8.

7. Produits : variations

E.2668 🔑 🍷 📖 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par l'expression :

$$f(x) = (5x^2 + 5x - 4) \cdot \sqrt{x}$$

- 1) Établir que la fonction f' , dérivée de la fonction f , admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{25x^2 + 15x - 4}{2\sqrt{x}}$$

 2) Dresser le tableau de signes de la fonction f' sur $\mathbb{R}_+^*$.

- 3) En admettant les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

 Dresser le tableau de variations de la fonction f .

E.2842    On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par l'expression :

$$f: x \mapsto \sqrt{x} \cdot (-5x^2 - 5x - 1) + \frac{1}{2}$$

- 1 Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de f .
- 2 Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .

On admet la limite suivante: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

- 3  Justifier que la fonction f s'annule une seule fois sur son ensemble de définition. On notera α cette valeur.
-  Déterminer les images de $\frac{1}{10}$ et $\frac{15}{100}$ par la fonction f , arrondie au dix-millièmes près.
En déduire un encadrement de α au

8. Produits: tangentes et variations

E.10520    On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = (x^2 - x) \cdot \sqrt{x}$$

- 1 Établir que la fonction f' , dérivée de la fonction f , admet pour expression: $f'(x) = \frac{5 \cdot x^2 - 3x}{2 \cdot \sqrt{x}}$
- 2 Dans le repère $(O; I; J)$, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .
Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
- 3  Dresser le tableau de signes de la fonction f' .
 Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

E.10521    On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = (3 \cdot x^2 - 5 \cdot x) \cdot \sqrt{x}$$

- 1 Établir que la fonction f' , dérivée de la fonction f , admet pour expression: $f'(x) = \frac{15x \cdot (x - 1)}{2 \cdot \sqrt{x}}$
- 2 Dans le repère $(O; I; J)$, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .
Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
- 3 Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

9. Quotients: dérivée de fonctions rationnelles

E.10461    On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$u(x) = 3 \cdot x - 2 \quad ; \quad v(x) = 2 - x$$

On définit la fonction g définie par la relation $g = \frac{u}{v}$.
Déterminer, si possible, les images ci-dessous par la fonction g :

 $g(0)$  $g(2)$  $g\left(-\frac{1}{4}\right)$

E.4688   

Proposition :

Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I telles que v ne s'annule pas sur v . On considère la fonction f définie sur I par: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

La fonction f admet pour fonction dérivée la fonction f' définit par :

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

- 1 Pour chaque ligne, donner l'expression de la fonction u' (resp. v') dérivée de la fonction u (resp. u') :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$5 \cdot x + 2$	$3 \cdot x - 2$		
$x^2 - 3$	$x + 1$		

- 2 Pour chacune des fonctions f ci-dessous, on établira l'expression proposée de sa fonction dérivée f' :

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{5 \cdot x + 2}{3 \cdot x - 2}$	$\frac{-16}{(3 \cdot x - 2)^2}$
$\frac{x^2 - 3}{x + 1}$	$\frac{x^2 + 2 \cdot x + 3}{(x + 1)^2}$

E.5225   

① Pour chaque ligne, donner l'expression de la fonction u' (resp. v') dérivée de la fonction u (resp. v'):

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3 - 2x$	$x + 1$		
x^2	$2x + 1$		

② Pour chacune des lignes ci-dessous, établir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{3 - 2x}{x + 1}$	$-\frac{5}{(x + 1)^2}$
$\frac{x^2}{2 \cdot x + 1}$	$\frac{2 \cdot x^2 + 2 \cdot x}{(2 \cdot x + 1)^2}$

E.4691    On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{3 \cdot x + 1}{2 \cdot x - 1}$$

Établir l'égalité suivante: $f'(x) = \frac{-5}{(2 \cdot x - 1)^2}$

E.8398    On considère la fonction f définie par: $f(x) = \frac{3}{2 - x}$

Déterminer l'expression de la fonction f' , dérivée de la fonction f .

E.8393    Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées à chacun des fonctions suivantes:

$$\textcircled{1} f(x) = \frac{1}{x^5 + 1} \quad \textcircled{2} g(x) = \frac{5 \cdot x - 2}{3 \cdot x + 1}$$

E.10468    On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x + 3}$$

Établir que la fonction f' , dérivée de la fonction f , admet pour expression: $f'(x) = \frac{-8x + 8}{(x^2 - 2x + 3)^2}$

E.10491    On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2 \cdot x + 1}$$

Déterminer l'expression de la fonction f' , dérivée de la fonction f .

E.10490    On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4 \cdot x - 1}{2 \cdot x - 1}$$

Montrer que la fonction f' , dérivée de la fonction f , admet pour expression: $f'(x) = \frac{2 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 2}{(2 \cdot x - 1)^2}$

E.10493    On considère la fonction f est définie par:

$$f(x) = \frac{2 \cdot x - 1}{x^2 + x}$$

Montrer que la fonction f' , dérivée de la fonction f , admet pour expression: $f'(x) = -\frac{2 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 1}{x^2 \cdot (x + 1)^2}$

E.7106    On considère la fonction f définie par:

$$f: x \mapsto \frac{x^2 - 3x}{2x - 4}$$

Déterminer la dérivée de la fonction f .

E.7108    On considère la fonction f définie par la relation:

$$f(x) = 5 \cdot x - \frac{2 \cdot x^2 + x - 2}{4 \cdot x - 3}$$

On note f' la dérivée de la fonction f . Déterminer les solutions de l'équation: $f'(x) = 0$

E.10467    On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2 \cdot x^2 - 1}$$

Établir que la fonction f' , dérivée de la fonction f , admet pour expression: $f'(x) = \frac{-2 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 1}{(2 \cdot x^2 - 1)^2}$

E.10489    On considère la fonction g définie par:

$$g(x) = \frac{5 \cdot x - x^2}{3 - x^2}$$

Établir l'égalité suivante: $g'(x) = \frac{5 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 15}{(3 - x^2)^2}$

E.10494    On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{4 \cdot x^2 + x - 3}{3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1}$$

Montrer que la fonction f' , dérivée de la fonction f admet pour expression: $f'(x) = \frac{5}{(3 \cdot x - 1)^2}$

E.8397    On considère la fonction f définie par: $f(x) = \frac{2x^2 - 2}{2x^2 - 3x + 1}$

Établir que la fonction f' dérivée de la fonction f a pour expression: $f'(x) = \frac{-6}{(2x - 1)^2}$

E.10492    On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{4 \cdot x^2 + x}{3 \cdot x^2 - x}$$

Montrer que la fonction f' , dérivée de la fonction f , admet pour expression: $f'(x) = \frac{-7}{(3 \cdot x - 1)^2}$

E.11404 🔑 🍷 📖 On considère la fonction g définie par :

$$g : x \mapsto \frac{-2 \cdot x^2 + x - 3}{4 \cdot x^2 + 3 \cdot x}$$

Déterminer l'expression de la dérivée de la fonction g .

E.4828 🔑 🍷 📖 On considère la fonction h dont

l'image de x est défini par la relation : $h(x) = \frac{x^2 - 2 \cdot x + 1}{x^2 - 5 \cdot x + 6}$

- ① Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h .
- ② Montrer que le nombre dérivé de h en x s'exprime par :

$$h'(x) = \frac{-3 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 7}{(x^2 - 5 \cdot x + 6)^2}$$

10. Quotients : fonctions dérivées et racines carrées

E.2320 🔑 🍷 📖 Le tableau ci-dessous vous présente, pour chaque ligne, l'expression de l'image de x par une fonction et l'expression du nombre dérivé en x de cette fonction. Vérifier l'exactitude de l'expression du nombre dérivé en x :

Fonction	Image de x	Nombre dérivé en x
f	$\frac{\sqrt{x}}{x+1}$	$\frac{-x+1}{2\sqrt{x} \cdot (x+1)^2}$
g	$(x^2 - 3) \cdot \sqrt{x}$	$\frac{5 \cdot x^2 - 3}{2 \cdot \sqrt{x}}$

E.5349 🔑 🍷 📖 On considère les deux fonctions f et g définies par les relations :

$$f(x) = (x^2 - 3 \cdot x) \cdot \sqrt{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

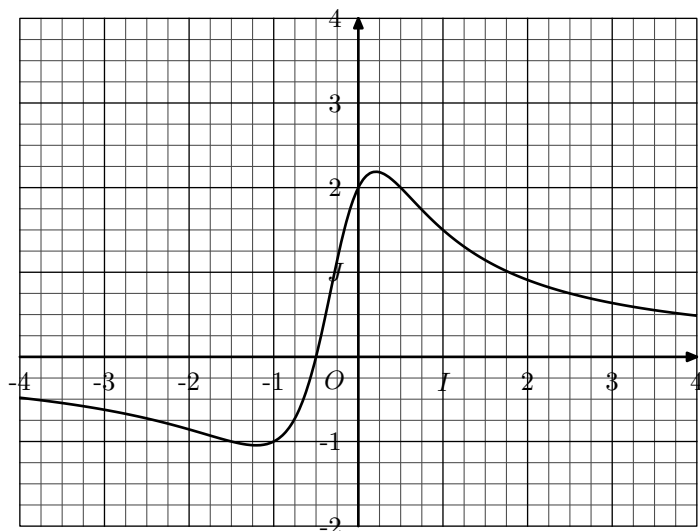
Déterminer les expressions des fonctions dérivées f' et g' sous la forme de quotients simplifiés.

11. Quotients : fonctions dérivées et tangentes

E.4717 🔑 🍷 📖 On considère la fonction f définie par la relation est :

$$f(x) = \frac{4 \cdot x + 2}{2 \cdot x^2 + x + 1}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :



- ①
 - a) Effectuer le tracé de la droite (d_1) dont l'équation est :

$$y = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2}$$
 - b) Effectuer le tracé de la droite (d_2) dont l'équation est :

$$y = 2 \cdot x + 2$$
 - c) Effectuer le tracé de la droite (d_3) dont l'équation est :

$$y = -x + \frac{5}{2}$$
- ②
 - a) Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction f .
 - b) Donner les valeurs des nombres dérivés de la fonction f en -1 , 0 et $\frac{1}{2}$.

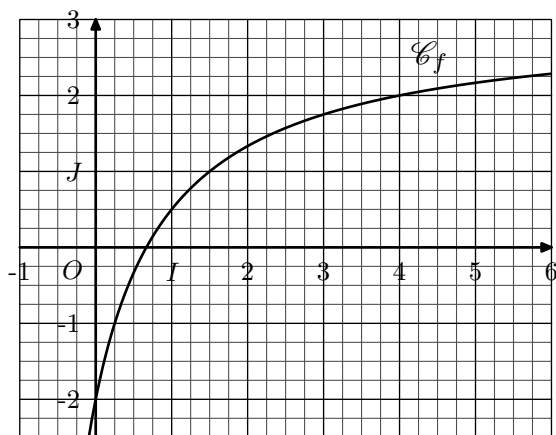
12. Quotients : tangentes

E.4830 🔑 🍷 📖 On considère la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ et dont l'image d'un nombre x est définie par

la relation :

$$f(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f :



On note (d) la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

- ① Déterminer l'équation réduite de la droite (d) .
- ② Tracer la tangente (d) dans le repère $(O; I; J)$.

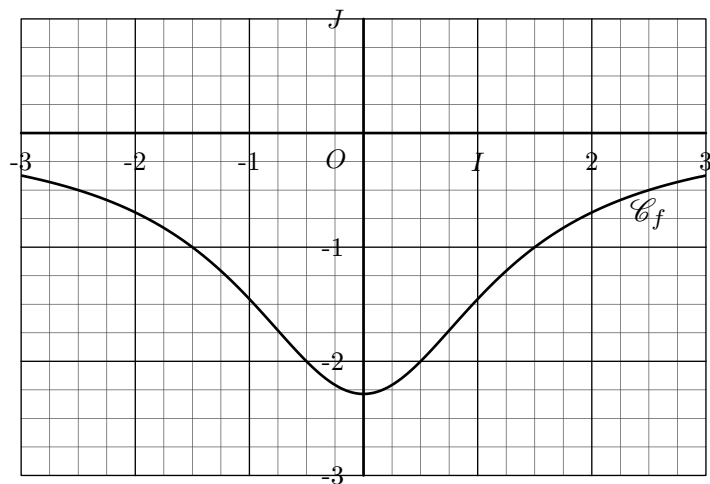
E.4699 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{-16}{4x^2 + 7}$$

- ① Établir que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

$$f'(x) = \frac{128x}{(4x^2 + 7)^2}$$

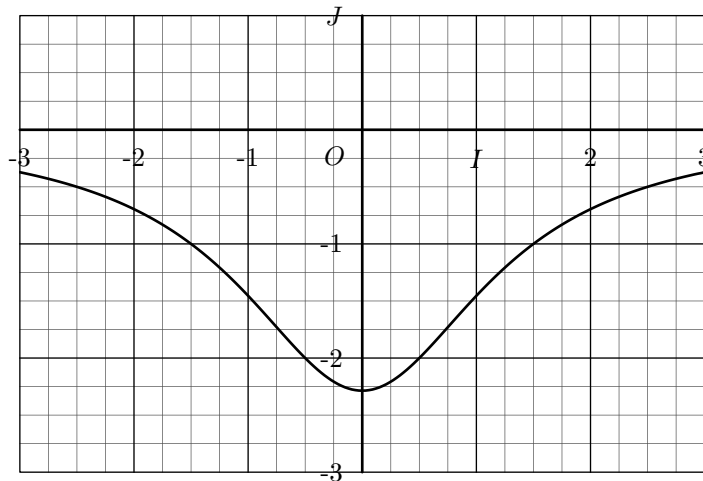
- ② Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.
- ③ Dans le repère orthonormé $(O; I; J)$, est représentée la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f . Tracer la représentation graphique de (T) .



E.7218 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = -\frac{16}{4x^2 + 7}$$

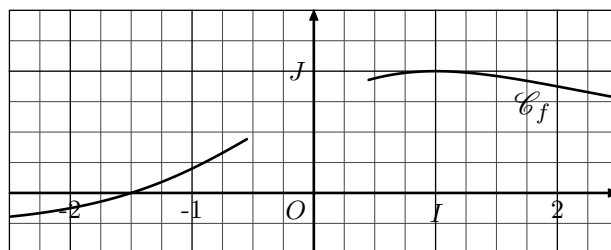
- ① Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.
- ② Le repère orthonormé $(O; I; J)$ ci-dessous représente la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f . Tracer la représentation graphique de (T) .



E.6665 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 4}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O; I; J)$. Ci-dessous est représentée une partie de la courbe $\mathcal{C}_f$.



- ① Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 et effectuer son tracé dans le repère ci-dessus. (on indiquera les coordonnées des deux points utilisés pour le tracé de la tangente).
- ② Déterminer le ou les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ où celle-ci admet une tangente horizontale.

E.4719 On munit le plan d'un repère $(O; I; J)$ et on considère la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{3x^2 - x + 2}{x + 1}$$

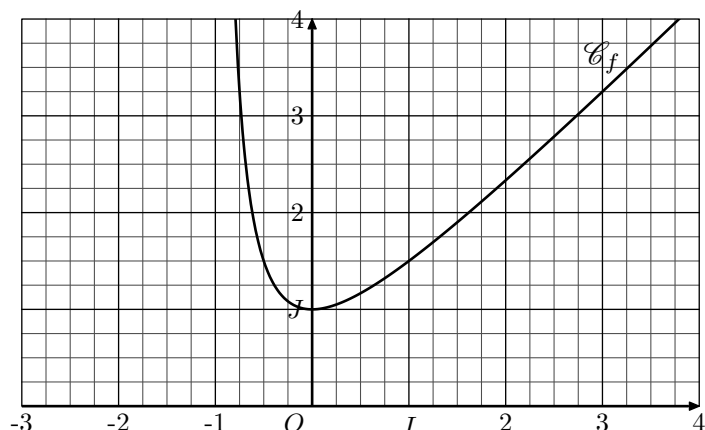
On note $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative dans le plan.

- ① Déterminer l'équation de la tangente (Δ) à la courbe $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse 2.
- ② Vérifier vos résultats à l'aide de la calculatrice

E.4883 🔑 🍷 📖 On considère la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ dont l'expression est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f :



1 Établir que la fonction f' dérivée de la fonction f a pour expression : $f'(x) = \frac{x^2 + 2 \cdot x}{(x + 1)^2}$

2 On considère les droites (d) et (Δ) tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectives $-\frac{1}{2}$ et 1.

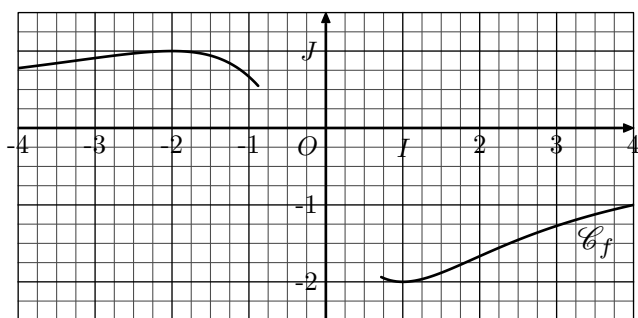
a Déterminer les équations réduites des tangentes (d) et (Δ) .

b Tracer les droites (d) et (Δ) .

E.7734 🔑 🍷 📖 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{-4 \cdot x - 2}{x^2 + 2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O; I; J)$. Ci-dessous est représentée une partie de la courbe $\mathcal{C}_f$.



1 Donner les coordonnées du point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ ayant pour abscisse 0.

2 a Établir que la fonction f' , dérivée de la fonction f , admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{4 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 8}{(x^2 + 2)^2}$$

b Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

c Effectuer le tracé de la tangente (T) dans le repère ci-dessus. (on indiquera les deux points utilisés pour le tracé de la tangente).

3 Déterminer le ou les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ où celle-ci admet une tangente horizontale.

E.2827 🔑 🍷 📖 On considère les deux fonctions f et g définies par :

$$f: x \mapsto 2x^2 - 5x + 2 \quad ; \quad g: x \mapsto \frac{3x - 2}{1 - 2x}$$

Dans un repère $(O; I; J)$, on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives respectivement des fonctions f et g , et la droite (T) d'équation réduite : $y = -x$

Montrer que la droite (T) est une tangente pour la courbe $\mathcal{C}_f$ et la courbe $\mathcal{C}_g$.

(on donnera les abscisses des points de contact de (T) avec chacune de ces deux courbes)

E.2839 🔑 🍷 📖 On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{-2 \cdot x^2 + x + 1}{4 \cdot x - 1}$$

1 Établir que la fonction f' dérivée de la fonction f a pour expression : $f': x \mapsto -\frac{8 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 5}{(4 \cdot x - 1)^2}$

2 a La fonction f admet-elle des tangentes dont le coefficient directeur soit -1 ?

b Si oui, déterminer leurs équations réduites.

13. Quotients : tangentes et points d'intersection

E.2395 🔑 🍷 📖 + On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{-16}{4x^2 + 7}$$

1 a Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

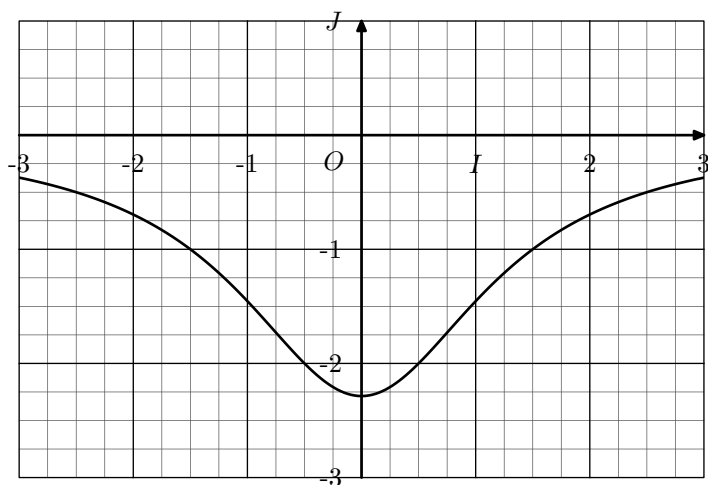
b Le repère orthonormé $(O; I; J)$ ci-dessous représente la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f . Tracer la

représentation graphique de (T) .

2 a Établir la factorisation suivante :

$$8x^3 + 20x^2 + 14x + 3 = (2x + 1)^2 \cdot (2x + 3)$$

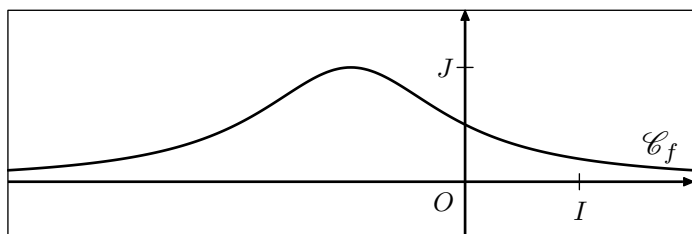
b Étudier la position relative de la droite (T) relativement à la courbe $\mathcal{C}_f$.



E.6617 🔑 📐 📖 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé ci-dessous :



Soit (Δ) la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

1) a) Établir que la fonction dérivée de la fonction f admet pour expression : $f'(x) = \frac{-2x - 2}{(x^2 + 2x + 2)^2}$

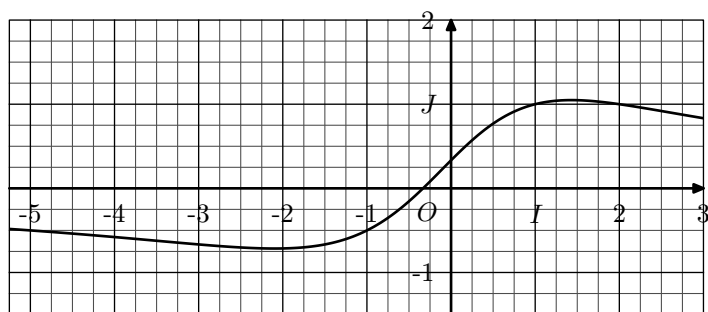
b) Établir que l'équation réduite de la droite (Δ) admet pour expression : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

2) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite (Δ) .

E.4709 🔑 📐 📖 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x^2 + 3}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$, on donne la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f :



1) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .

2) a) Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en 1.

b) En déduire l'équation de la tangente (d) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

c) Effectuer le tracé de la droite (d) .

3) a) Déterminer la valeur des réels a , b et c réalisant l'identité suivante :

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

b) En déduire la forme factorisée du polynôme :

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5.$$

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :

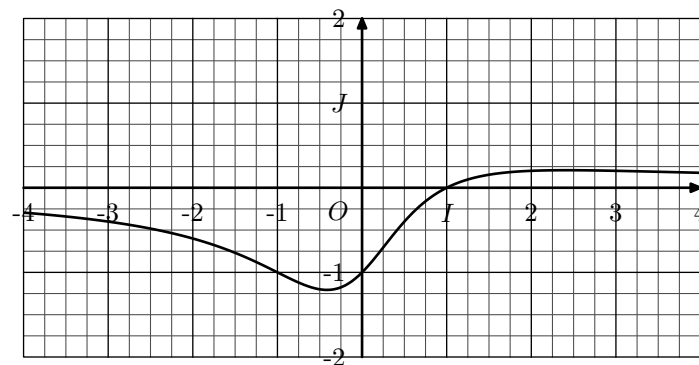
$$f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

4) Donner l'ensemble des coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente (d) .

E.4708 🔑 📐 📖 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$, on donne la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f :



1) Montrer que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression : $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$.

2) a) Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en 1.

b) En déduire l'équation de la tangente (d) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

c) Effectuer le tracé de la droite (d) .

3) a) Déterminer la valeur des réels a , b et c réalisant l'identité suivante :

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

b) Déterminer la forme factorisée du polynôme :

$$x^3 - x^2 - x + 1$$

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

4) Donner l'ensemble des coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente (d) .

14. Quotients : variations

E.10522    On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2-3x}{4x^2+1}$$

- 1 Déterminer l'expression de la fonction f' , dérivée de la fonction f .
- 2
 - a Dresser le tableau de signes de la fonction f' .
 - b En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

E.7296    On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{4-3x}{x^2+1}$$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés :

L1	$f(x) := (4-3x)/(x^2+1)$ $f(x) = \frac{4-3x}{x^2+1}$
L2	$g(x) := \text{Dérivée}[f(x)]$ $g(x) = \frac{3x^2-8x-3}{(x^2+1)^2}$
L3	$\text{Résoudre}[f(x)=0]$ $\left\{x = \frac{4}{3}\right\}$
L4	$\text{Résoudre}[g(x)=0]$ $\left\{x = -\frac{1}{3} ; x = 3\right\}$

- 1 Dresser le tableau de signes de la fonction f' .
- 2 Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.

E.5278    On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{3x-4}{x^2+1}$$

- 1
 - a Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' .
 - b Dresser le tableau de signes de la fonction f' .
- 2 Dresser le tableau de variations de la fonction f .
On admettra les deux limites suivantes :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- 3 La fonction f admet-elle des extrémums ? Si oui, préciser leurs caractéristiques.

E.2964    On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x^2-2x-2}{2x^2+x+1}$$

- 1 Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
- 2
 - a Établir que la fonction dérivée f' admet l'expression suivante :
$$f'(x) = \frac{7x^2+14x}{(2x^2+x+1)^2}$$
 - b Dresser le tableau de variations de la fonction f .
On admet les deux limites suivantes :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{3}{2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$
- 3 En déduire que la fonction f admet pour minorant le nombre -2 et pour majorant le nombre 2 .

E.10646    On considère la fonction f , définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, par :

$$f(x) = \frac{3}{3x+1} + x + 1.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

- 1 Établir que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$:

$$f'(x) = \frac{(3x-2)(3x+4)}{(3x+1)^2}$$

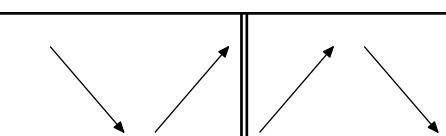
- 2
 - a Établir le tableau de signes de la fonction f' .
 - b Dresser le tableau de variations de la fonction f .
(Indication : on n'indiquera pas les valeurs de ses extrémums, ni aux bornes de son ensemble de définition).

E.2326    On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation : $f(x) = \frac{x^2-x+3}{2x^2-2x+3}$

- 1 Montrer que le dénominateur ne s'annule jamais.
Ainsi, la fonction f est définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
- 2 Établir que la fonction dérivée f' de la fonction f admet pour expression :
$$f'(x) = \frac{-6x+3}{(2x^2-2x+3)^2}$$
- 3
 - a Dresser le tableau de signes de f' sur $\mathbb{R}$.
 - b Dresser le tableau de variations de la fonction f .
On admettra les deux limites suivantes :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$
- 4 En déduire les extrémums de la fonction f .

E.6666    On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$$f(x) = \frac{-x^2-3x+1}{x-1}$$

- 1 Justifier que la fonction f admet le tableau de variations :

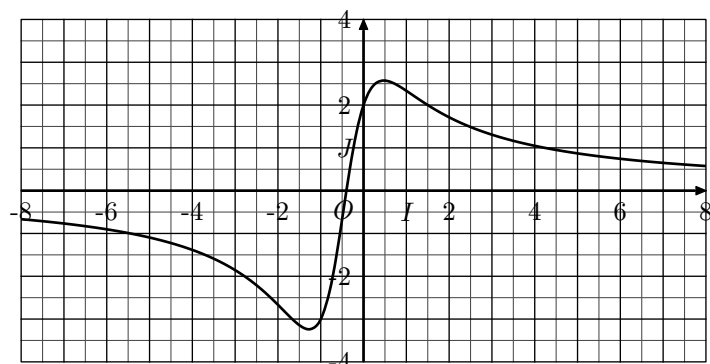
x	$-\infty$	$1-\sqrt{3}$	1	$1+\sqrt{3}$	$+\infty$
Variation de f					

(on n'indiquera pas les images dans le tableau)

- 2 Dans un repère $(O; I; J)$, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et (T) la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 .
Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}$ et (T) sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

E.5347 🔑 🍷 📦 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation: $f(x) = \frac{5 \cdot x + 2}{x^2 + x + 1}$

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f donnée ci-dessous:



- 1 Justifier que la fonction f est définie pour tout nombre réel.
- 2 Établir le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On y indiquera seulement les valeurs des extremums, approchées au dixième près.
- 3 On note (T) la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite (T) .

E.10523 🔑 🍷 📦 Pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par: $f_a(x) = \frac{a \cdot x^2 + 1}{x + 1}$

Déterminer l'ensemble des valeurs de a telles que la fonction f_a soit strictement décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Indication: toutes traces de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

15. Quotients: modélisation problèmes économique

E.379 🔑 🍷 📦 ⚠️ Un supermarché souhaite acheter des fruits à un fournisseur. Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandé. Pour une commande de x kilogrammes de fruit, le prix $P(x)$ en euros du kilogramme de fruits est donné par la formule:

$$P(x) = \frac{x + 300}{x + 100} \quad \text{pour } x \in [100; +\infty[.$$

Par exemple si le supermarché achète 300 kilogrammes de fruits, ces fruits lui sont vendus:

$$P(300) = \frac{600}{400} = 1,50 \text{ euros le kilogramme.}$$

Dans ce cas, le supermarché devra payer $300 \times 1,5 = 450$ euros au fournisseur pour cette commande.

Partie A: Étude du prix P proposé par le fournisseur.

- 1 Montrer que: $P'(x) = \frac{-200}{(x+100)^2}$ sur $[100; +\infty[$.
- 2 Donner le sens de variations de la fonction P sur $[100; +\infty[$.

Partie B: Étude de la somme S à dépenser par le supermarché.

On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits (ces fruits vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme).

Cette somme est donc égale à:

$$S(x) = x \cdot P(x) \quad \text{pour } x \in [100; +\infty[.$$

- 1 Montrer que pour tout x appartenant à $[100; +\infty[$:

$$S'(x) = \frac{x^2 + 200 \cdot x + 30\,000}{(x + 100)^2}$$

- 2 Montrer que pour tout x appartenant à $[100; +\infty[$:

$$S(x) = x + 200 - 20\,000 \times \frac{1}{x + 100}$$

E.7044 🔑 🍷 📦 ⚠️ Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation.

Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

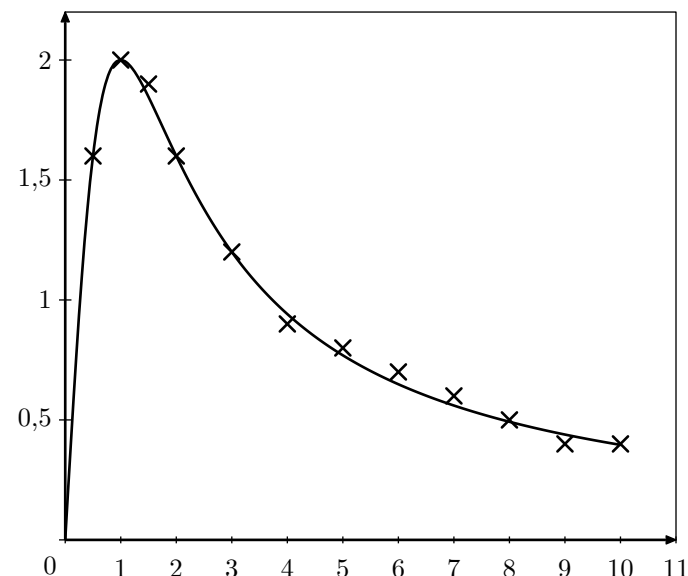
Temps en heure	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration en mg/ℓ	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par:

$$g(t) = \frac{4 \cdot t}{t^2 + 1}$$

Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en mg/ℓ de l'antibiotique.

Le graphique ci-dessous représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g .



- 1 Par lecture graphique, donner sans justification :
- a les variations de la fonction g sur $[0; 10]$;
 - b la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;
 - c l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à $1,2 \text{ mg/l}$.

- 2 a La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$ et sa dérivée est g' .

Montrer que : $g'(t) = \frac{4 \cdot (1 - t^2)}{(t^2 + 1)^2}$

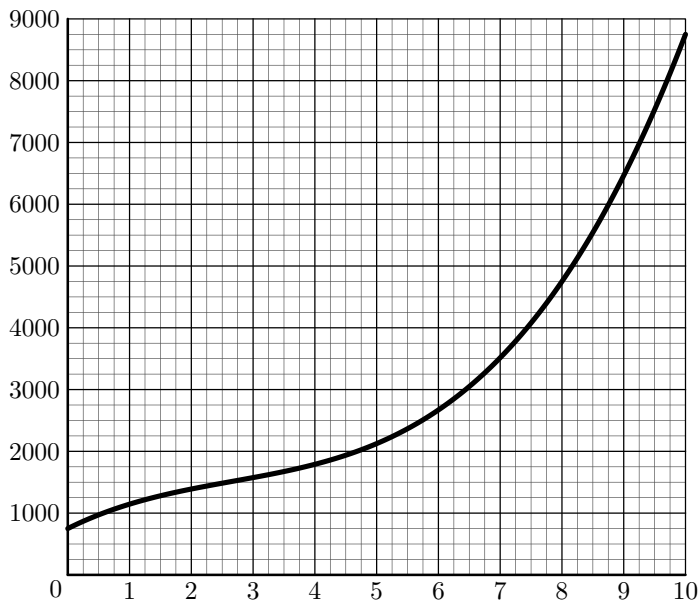
- b En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.

E.4885     L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique de la fonction C .



Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : Étude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = p \cdot x$.

- 1 Tracer sur le graphique la droite D_1 d'équation :

$$y = 400 \cdot x.$$

Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.

- 2 Dans cette question, on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

- a Tracer sur le graphique la droite D_2 d'équation :

$$y = 680 \cdot x.$$

Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique pour quelles quantités produites et

vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.

- b On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$B(x) = 680 \cdot x - C(x)$$

Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 10]$, on a :

$$B'(x) = -45 \cdot x^2 + 240 \cdot x + 180$$

- c Étudier les variations de la fonction B sur $[0; 10]$.
En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum.
Donner la valeur de ce bénéfice.

Partie B : Étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0; 10]$ par : $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$

- 1 Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 10]$, on a : $C'_M(x) = \frac{30 \cdot (x - 5)(x^2 + x + 5)}{x^2}$

- 2 a Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 10]$, $C'_M(x)$ est du signe de $(x - 5)$.
En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0; 10]$.

- b Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum?
Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total?

- ① Le prix d'un article est de 120 euros. Ce prix subit une première évolution au taux de 25 %, puis une seconde évolution qui le ramène à sa valeur initiale. Quel est le taux de la deuxième évolution?
- ② Le prix d'un article est de 120 euros. Ce prix subit une première évolution au taux de -20 %, puis une seconde évolution qui le ramène à sa valeur initiale. Quel est le taux de la deuxième évolution?

Partie B

D'une façon générale, un prix P subit deux évolutions successives, la première à un taux de x , et la deuxième à un taux de y . Il revient alors à sa valeur initiale P .

- ① Montrer que x et y vérifient : $(1+x)(1+y)=1$.

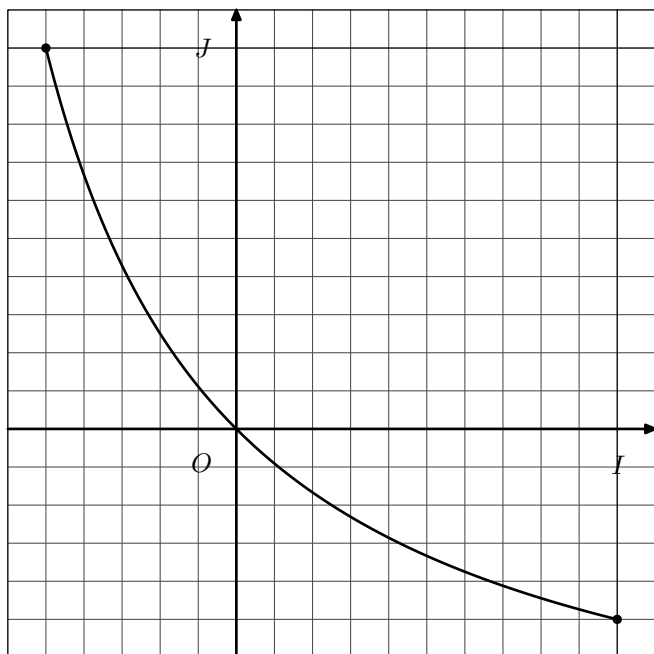
On admet alors que : $y = \frac{-x}{1+x}$

- ② On veut étudier sur l'intervalle $[-0,5; 2]$ la fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{-x}{1+x}.$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

- a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
- b) Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-0,5; 2]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
- ③ À l'aide de la représentation graphique de la courbe $\mathcal{C}$ donnée en annexe, ou à l'aide d'un calcul, répondre aux questions suivantes :
 - a) Quelle évolution faut-il faire subir à un prix augmenté de 50 % pour retrouver le prix initial?
 - b) Quelle évolution faut-il faire subir à un prix diminué de 50 % pour retrouver le prix initial?



molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation.

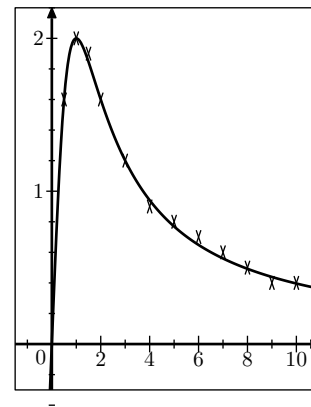
Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

Temps en heure	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration en mg/l	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$g(t) = \frac{4 \cdot t}{t^2 + 1}$$

Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en mg/l de l'antibiotique.



Le graphique ci-contre représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g .

- ① La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$ et sa dérivée est g' .

$$\text{Montrer que : } g'(t) = \frac{4(1-t^2)}{(t^2+1)^2}$$

- ② En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.

E.7063     Une entreprise fabrique et commercialise un article dont la production est comprise entre 1 000 et 7 000 articles par semaine.

On modélise le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie par :

$$f(x) = 1,5 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 48$$

où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.

On note c la fonction définie sur $[1; 7]$ représentant le coût moyen par article fabriqué, exprimé en euros. On a, par conséquent, pour tout x de $[1; 7]$:

$$c(x) = \frac{f(x)}{x} = 1,5 \cdot x^2 - 9 \cdot x + 24 + \frac{48}{x}$$

On admet que la fonction c est dérivable sur $[1; 7]$. On note c' sa fonction dérivée.

- ① Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[1; 7]$, on a :

$$c'(x) = \frac{3(x-4)(x^2+x+4)}{x^2}$$

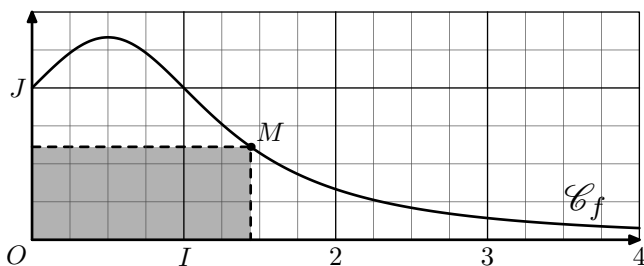
- ② a) Étudier les variations de la fonction c sur l'intervalle $[1; 7]$.

- b) Déterminer, en milliers, le nombre d'articles à fabriquer pour que le coût moyen par article soit minimal.

E.5244    On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f :



On considère un point M de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et le rectangle représenté ci-dessus où :

- les points O et M en sont deux sommets opposés.
- ses côtés sont parallèles aux axes du repère.

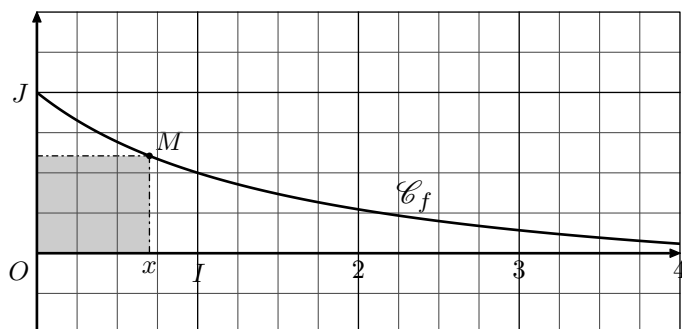
On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de ce rectangle en fonction de la valeur de x .

- 1 Donner l'expression de la fonction $\mathcal{A}$.
- 2 **a** Montrer que la fonction $\mathcal{A}'$ dérivée de la fonction $\mathcal{A}$ admet pour expression :
$$\mathcal{A}'(x) = \frac{(1+x)(1-x)}{(x^2 - x + 1)^2}$$
b Dresser le tableau de signes de la fonction $\mathcal{A}'$.
c Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.
- 3 Justifier que l'aire du rectangle est maximale lorsque le point M a pour abscisse 1.

E.10650    On considère la fonction f définie, sur $\mathbb{R}^+$, par :

$$f(x) = \frac{5-x}{3x+5}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère fourni ci-dessous :



On note M le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x avec $x \geq 0$.

On note $\mathcal{A}$ la fonction qui associe, à un entier x appartenant à $\mathbb{R}_+$, l'aire du rectangle admettant les points O et M comme sommets opposés et dont les côtés sont parallèles aux axes.

- 1 En notant $\mathcal{A}'$, la fonction dérivée de la fonction $\mathcal{A}$, établir l'identité : $\mathcal{A}' = \frac{(x+5)(5-3x)}{(3x+5)^2}$
- 2 **a** Établir le tableau de signes de la fonction $\mathcal{A}'$.

- b** En déduire le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.

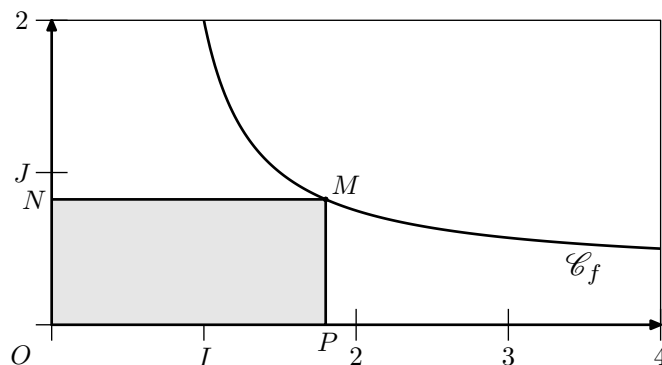
Indication : on n'y indiquera que les sens de variations.

- 3 En déduire la valeur de x afin que l'aire $\mathcal{A}$ soit maximale.

E.2828    On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x+1}{3x-2}$$

La représentation $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous :



On considère un point M appartenant à la courbe $\mathcal{C}_f$ et le rectangle $MNOP$ construit à partir du point O et M et dont les côtés sont parallèles aux axes.

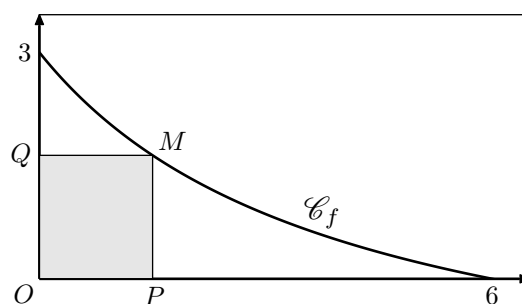
On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $MNOP$ où x est l'abscisse du point M . Le but de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de x , l'aire $\mathcal{A}(x)$ est minimale.

- 1 Donner l'expression de $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x .
- 2 Déterminer l'expression de la fonction dérivée de $\mathcal{A}$.
- 3 Établir le sens de variation de la fonction $\mathcal{A}$.
- 4 En déduire la position du point M afin que l'aire du rectangle $MNOP$ soit minimale.

E.5348    On considère la fonction f définie sur $[0; 6]$ par :

$$f(x) = \frac{12-2x}{x+4}$$

Dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé ci-dessous, est donnée la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f :

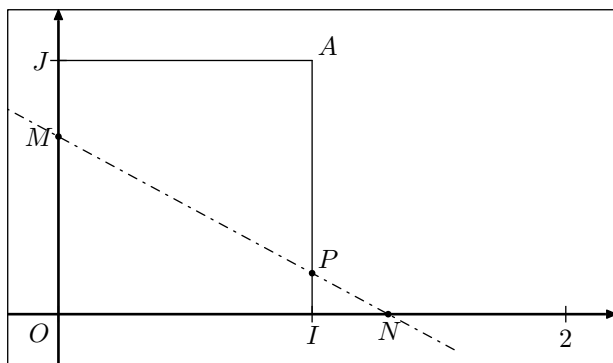


Soit M un point de la courbe $\mathcal{C}_f$. On considère les points P et Q appartenant respectivement à l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées de sorte que le quadrilatère $OPMQ$ soit un rectangle.

Déterminer la position du point M afin que l'aire du rectangle $OPMQ$ soit maximale.

17. Modélisation : plus loin

E.6667    On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé représenté ci-dessous :



Le point A a pour coordonnées $A(1; 1)$.

Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, on considère les deux points M et N définis par :

- $M \in [OJ]$; $JM = x$
- $N \in [OI]$; $N \notin [OI]$; $IN = x$

Le point P est défini par l'intersection des droites (MN) et (AI) .

Déterminer la valeur de x afin que l'ordonnée du point P soit maximale.

18. Composée par une fonction affine

E.2826   

Proposition :

Soit f une fonction dérivable sur I , a et b deux nombres réels quelconques. La fonction définit par :

$$x \mapsto f(a \cdot x + b)$$

est une fonction dérivable sur tout intervalle J tel que :

$$x \in J \implies ax + b \in I$$

et sa fonction dérivée a pour expression :

$$x \mapsto a \cdot f'(a \cdot x + b)$$

Déterminer, pour chaque fonction, l'expression de la fonction dérivée :

(a) $f : x \mapsto (4x - 2)^7$ (b) $g : x \mapsto \frac{1}{5 - 3x}$

E.2841    Déterminer l'expression, sous la forme d'un quotient simplifié, de la fonction f' (resp. g') dérivée de la fonction f (resp. g) :

(a) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x - 2}$ (b) $g(x) = \sqrt{3x - 1}$

19. Composée par une fonction affine : tangente et variation

E.3510    Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot x + 1\right)^4$$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f au point d'abscisse 2.

E.3305    Soit g la fonction dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$g(x) = \sqrt{2 - 3 \cdot x}$$

Dans le plan muni d'un repère, on note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g .

- (1) Donner l'ensemble de définition de la fonction f .

E.5065    On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x + 4}$$

- (1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- (2) Montrer que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

$$f'(x) = \frac{-2}{(x - 2)^3}$$

- (3) On considère la fonction g définie par la relation :
 $g(x) = f(2x - 1)$

- (a) Déterminer l'expression simplifiée du nombre $g(x)$ en fonction de x .
- (b) Déterminer, par la méthode de votre choix, l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g .

- (2) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse -2 .

E.2325    On considère deux fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right[$ par :

$$f(x) = 2(3 - 2x)^5 \quad ; \quad g(x) = \sqrt{3x - 5}$$

- (1) Déterminer l'expression des fonctions dérivées f' et g' associées aux fonctions f et g .
- (2) (a) Déterminer le signe des fonctions f' et g' sur leur ensemble de dérivation.
- (b) Dresser le tableau de variations de chacune de ces fonctions.

20. Composée par une fonction affine : produit et quotient

E.119    Déterminer l'expression de la fonction dérivée pour chacune des fonctions ci-dessous :

(a) $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ (b) $g: x \mapsto (2x+1) \cdot \sqrt{3x-1}$

E.2667    On considère la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$ par la relation : $f(x) = x \cdot \sqrt{3x-1}$

Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f (On donnera l'expression de f' sous la forme d'un quotient

simplifié).

E.8401    On considère la fonction f définie sur $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$ par :

$$f: x \mapsto (3-2x)^3 \cdot \sqrt{4x+1}$$

Indication : on donnera l'expression de f' sous la forme $\frac{P(x)}{\sqrt{4x+1}}$ où $P(x)$ est un polynôme ayant $(3-2x)^2$ pour facteur

21. Composée par une fonction affine : produit, quotient, tangente et variations

E.2521    On considère la fonction f dont l'image de x , pour $x \in [1; +\infty[$, est définie par la relation :

$$f(x) = (x^2 - 4x + 3)\sqrt{2x-2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

- ① Déterminer la valeur du nombre dérivé de la fonction f en 3.
- ② Déterminer l'expression de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3.

E.2348     Soit f la fonction définie par la relation :

$$f: x \mapsto (x+5)\sqrt{1-2x}$$

- ① Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
- ② Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f .
- ③ Dresser le tableau de signes de f' .

- ④ En déduire le tableau de variations de la fonction f

- ⑤ Justifier que f admet un extrémum global en $-\frac{4}{3}$.

E.2338    On considère la fonction f définie sur $] -3; +\infty[$ par :

$$f: x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x+3}}$$

- ① Montrer que le nombre dérivé de f en x s'écrit :

$$f'(x) = \frac{3 \cdot x^2 + 14 \cdot x + 11}{2(x+3)\sqrt{x+3}}$$

- ② Dresser le tableau de signes de la fonction f' .
- ③ (a) En déduire les variations de la fonction f sur $] -3; +\infty[$.
- (b) Donner le minimum de la fonction f sur son ensemble de définition.