



1. Fonction carré: variations

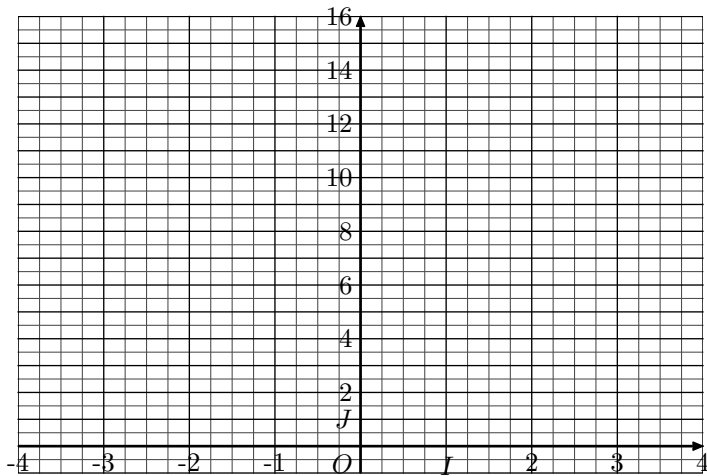
E.8285 Nous allons étudier la fonction carrée h définie par :

$$f : x \mapsto x^2$$

- 1 Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction carré.
- 2 a Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-3	-1	-0,5	0	0,5	2	4
$f(x)$							

- b Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans le repère ci-dessous :



- 3 a Pour a et b non tous les deux nuls, établir l'égalité suivante : $f(b) - f(a) = (b + a)(b - a)$.
- b En déduire le sens de variation de la fonction carrée

sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$.

- 4 La courbe représentative de la fonction f possède-t-elle un axe de symétrie ou un centre de symétrie?

E.4853 Soit f la fonction carrée :

- 1 Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-10	$-\sqrt{5}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1+\sqrt{2}$
$f(x)$							

- 2 a Que peut-on dire de la comparaison de deux nombres négatifs et de leurs carrés?
- b Que peut-on dire de la comparaison de deux nombres positifs et de leurs carrés?

E.4865

Proposition :

- Deux nombres positifs et leurs carrés sont comparés dans le même ordre.
- Deux nombres négatifs et leurs carrés sont comparés dans l'ordre contraire.

Comparer les couples de nombres suivants :

- a $3\sqrt{3}$; 5
- b $-\frac{1}{2\sqrt{5}}$; $-\frac{1}{5}$
- c $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{3\sqrt{4}}{4}$
- d $2+\sqrt{5}$; 3

2. Fonction carré: images d'intervalle

E.4817

Définition : on appelle **image de l'intervalle $[a; b]$ par la fonction f** , l'ensemble constitué des images de tous les éléments de l'intervalle $[a; b]$.

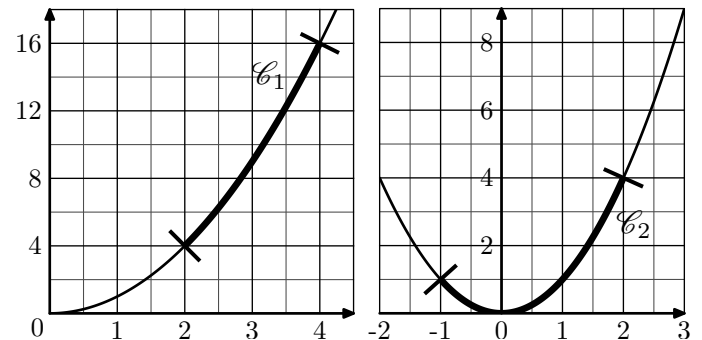
Exemple :



Voici deux animations pour mieux appréhender l'image d'intervalle.



Les deux graphiques ci-dessous présente deux parties $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de la courbe représentative de la fonction carrée :



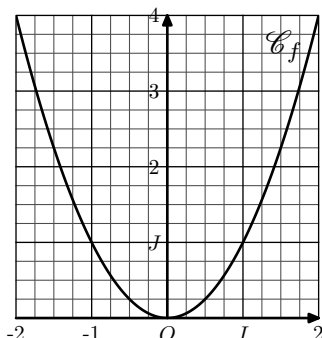
- 1 a Déterminer l'ensemble de nombres formé par toutes les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_1$.
- b Déterminer l'ensemble de nombres formé par toutes les ordonnées des points de la courbe $\mathcal{C}_1$.
- c En déduire l'image de l'intervalle $[2; 4]$.
- 2 a Déterminer l'ensemble de nombres formé par toutes

les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_2$.

(b) Déterminer l'ensemble de nombres formé par toutes les ordonnées des points de la courbe $\mathcal{C}_2$.

(c) En déduire l'image de l'intervalle $[-1; 2]$.

E.416



Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction carrée.

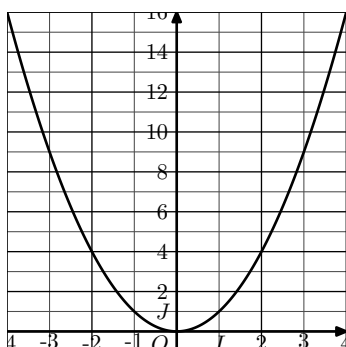
Graphiquement et sans justification, donner l'image de chacun des intervalles ci-dessous par la fonction f :

- (a) $[2; 5]$ (b) $[-3; -1]$ (c) $[2, 1; 3[$ (d) $] -4; -1, 5]$

E.9365 Ci-dessous dans un repère, est donnée la courbe représentative de la fonction carrée:

(1) (a) Donner les deux intervalles I et J tels que:
 $I \subset \mathbb{R}_- ; J \subset \mathbb{R}_+ ; I \cup J = [-1; 5]$

(b) En déduire l'image de l'intervalle $[-1; 5]$ par la fonction f .



(2) Sans justification, donner l'image des intervalles suivants par la fonction carrée:

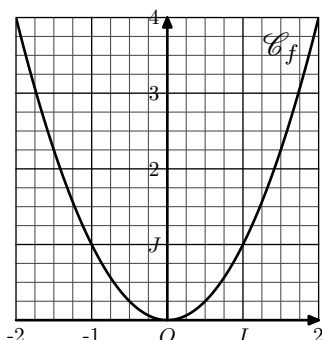
- (a) $] -4; 2]$
 (b) $] -1; 3[$

3. Fonction carré: équations et inéquations

E.9367 Résoudre les équations:

- (a) $x^2 = 2$ (b) $x^2 = 0$ (c) $x^2 = -1$

E.9361



On considère la fonction carrée notée f dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère $(O; I; J)$ est donnée ci-dessous:

Graphiquement et sans justification, donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes:

- (a) $f(x) \leq 1$ (b) $f(x) \geq 2$ (c) $f(x) < 3$ (d) $f(x) > 4$

E.9375 On note f la fonction carrée. Sans justification, donner les ensembles de solutions, sous forme

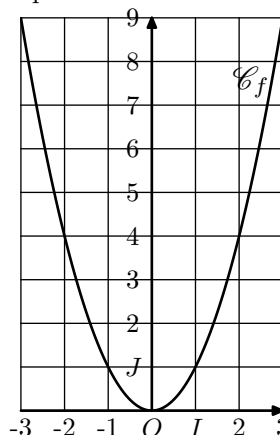
E.2692 Donner, sans justification, les images des intervalles suivants par la fonction carrée:

- (a) $] 2; 3]$ (b) $] -5; -1]$ (c) $] -2; 4]$

E.2831 Donner, sans justification, l'image des intervalles suivants par la fonction carrée:

- (a) $[\sqrt{3}; 5]$ (b) $] -\frac{1}{2}; -\frac{3}{7}[$ (c) $[-\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{7}{3}[$

E.2081 Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormal, est donnée ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction carrée:



Sans justification, recopier et compléter les assertions suivantes:

- (1) Si $x \in [1; 3[$
 alors $x^2 \in \dots\dots$
 (2) Si $x \in] -1; 2]$
 alors $x^2 \in \dots\dots$
 (3) Si $x \in [-3; -2] \cup [2; 3[$
 alors $x^2 \in \dots\dots$
 (4) Si $x \in] -\sqrt{11}; -2] \cup [\sqrt{2}; \sqrt{7}]$
 alors $x^2 \in \dots\dots$

simplifiée, des inéquations:

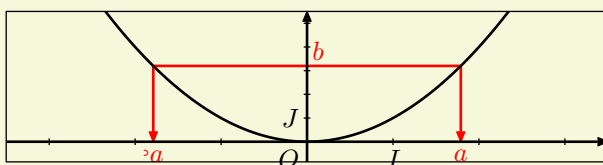
- (a) $f(x) \leq 10^{16}$ (b) $f(x) \geq \frac{9}{4}$ (c) $f(x) > \pi$

Remarque: on pourra s'appuyer sur une résolution graphique.

E.9374 Pour chaque question, donner le plus grand ensemble de nombres vérifiant l'inégalité ou l'encadrement:

- (a) $x^2 < 3$ (b) $x^2 \geq 1$ (c) $2 \leq x^2 \leq 4$

Remarque: on s'appuyera sur des calculs et sur une résolution graphique en s'aidant de la courbe de la fonction carrée:



4. Fonction inverse : variations

E.8284 📏 📐 📚 Nous allons étudier la fonction inverse f définie par :

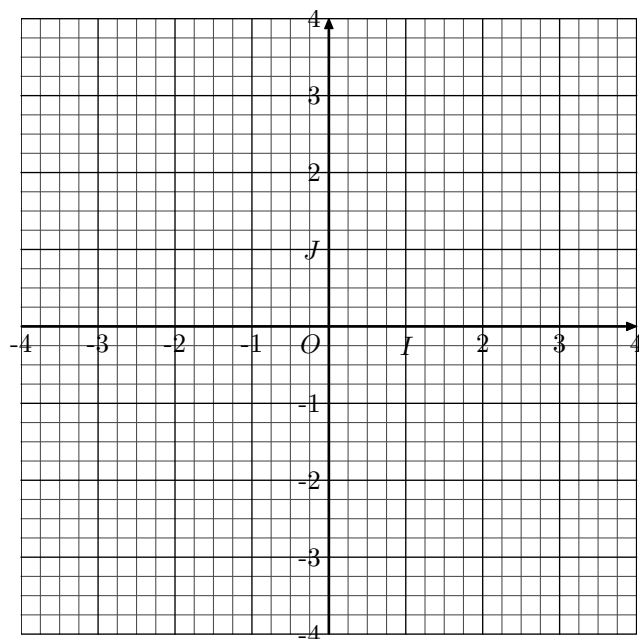
$$f : x \mapsto \frac{1}{x}$$

1 Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction inverse.

2 a Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-4	-2	-1	-0,5	0,25	1	2	4
$f(x)$								

b Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans le repère ci-dessous :



3 a Pour a et b non tous les deux nuls, établir l'égalité suivante : $f(b) - f(a) = \frac{a-b}{a \cdot b}$.

b En déduire le sens de variation de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

4 La courbe représentative de la fonction f possède-t-elle un axe de symétrie ou un centre de symétrie?

E.4854 📏 📐 📚

1 Soit f la fonction qui, à tout nombre non-nul, renvoie son inverse.

Compléter le tableau avec les valeurs décimales des images arrondies au centième près :

x	-10	-3	-2	-0,5	0,2	0,75	2
$f(x)$							

2 a Que peut-on dire de la comparaison de deux nombres négatifs et de leurs inverses?

b Que peut-on dire de la comparaison de deux nombres positifs et de leurs inverses?

E.340 📏 📐 📚 Soient a et b deux nombres strictement positifs.

1 Pour $a \neq b$, exprimer la différence ci-dessous sous la forme d'un quotient : $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

2 Supposons que $b < a$:

a Déterminer le signe de : $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

b Comparer : $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

E.9381 📏 📐 📚 Comparez les couples de nombres suivants :

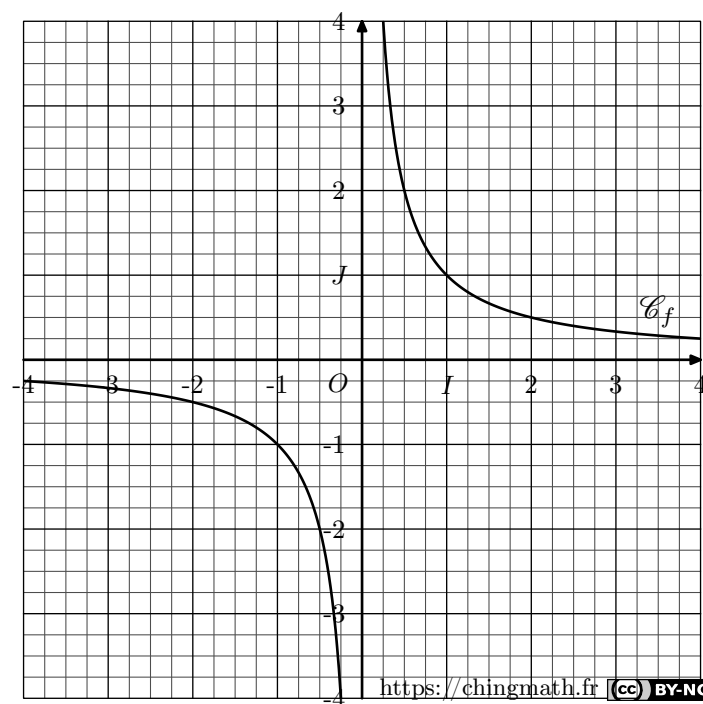
a $\frac{1}{3} ; \frac{1}{6}$

b $\frac{1}{\pi} ; \frac{1}{3}$

c $-\frac{1}{5,15} ; -\frac{1}{5,105}$

5. Fonction inverse : images d'intervalle

E.2818 📏 📐 📚 On considère la fonction inverse notée f dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère $(O; I; J)$ est donnée ci-dessous :



Graphiquement et sans justification, donner l'image par la fonction f des intervalles suivants :

- (a) $[1; 2]$ (b) $] -3; -0,5[$ (c) $[0,25; 4[$

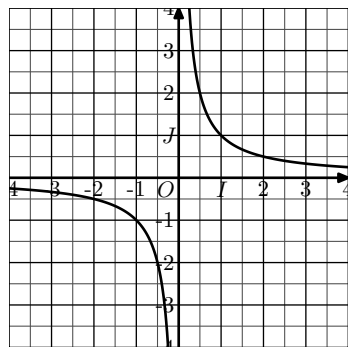
E.9363 Donner, sans justification, l'image des intervalles suivants par la fonction inverse :

- (a) $] -4; -1[$ (b) $[2; \frac{5}{2}]$ (c) $]0,0001; 1,5]$

E.9373 Sans justification, donner l'image des intervalles ci-dessous par la fonction inverse :

- (a) $[10^{-1}; 10^5]$ (b) $]10^{-10}; 10^{-9}]$ (c) $[-10^6; -10^5[$

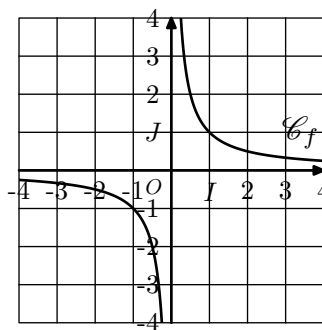
E.2161 On considère les représentations ci-dessous des fonctions carrées et inverses dans les repères ci-dessous :



À l'aide des représentations graphiques ci-dessus, déterminer les images des ensembles suivant par la fonction inverse :

- (a) $] -3; -1]$
 (b) $[\frac{1}{9}; \frac{1}{2}]$
 (c) $[-1; 0[\cup]0; 1]$

E.9366 Dans un repère $(O; I; J)$ orthonormaux, est donnée la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction inverse :



Compléter, sans justification, les assertions suivantes :

- (1) Si $x \in]2; 4]$
 alors $\frac{1}{x} \in \dots\dots$
 (2) Si $x \in]0; 2]$
 alors $\frac{1}{x} \in \dots\dots$
 (3) Si $x \in]-\infty; -\frac{1}{2}]$
 alors $\frac{1}{x} \in \dots\dots$

E.9364 Donner, sans justification, les images des intervalles suivants par la fonction inverse :

- (a) $[1; 2[$ (b) $]0; 5[$ (c) $[3; +\infty[$

E.9376 On considère la fonction inverse notée f .

Sans justification, donner les images des intervalles ci-dessous par la fonction f :

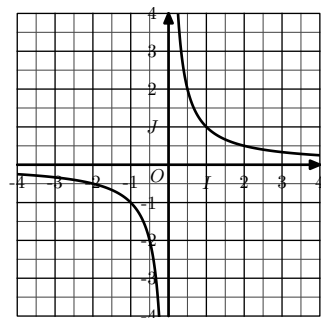
- (a) $]3; +\infty[$ (b) $] -\infty; -1]$ (c) $]0; \frac{1}{2}[$

6. Fonction inverse : équation et inéquation

E.9368 Résoudre les équations suivantes :

- (a) $\frac{1}{x} = 2$ (b) $\frac{1}{x} = 0$ (c) $\frac{1}{x} = -4$

E.9362



On considère la fonction inverse notée f dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère $(O; I; J)$ est donnée ci-contre :

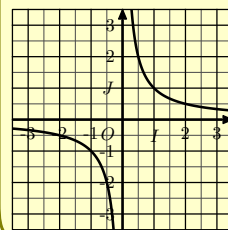
Graphiquement et sans justification, donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes :

- (a) $\frac{1}{x} \geq 1$ (b) $\frac{1}{x} < -3$ (c) $\frac{1}{x} > 7$

E.9377

Représentation de la fonction inverse :

Soit f la fonction inverse. Ci-dessous sont donnés la courbe représentative et le tableau de variations de la fonction f :



x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de f	0	$+\infty$	0

En se basant sur la courbe représentative ou le tableau de variations de la fonction inverse, donner, sans justification, les ensembles de solutions pour chacune des inéquations suivantes :

- (a) $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{x} > \frac{3}{4}$ (c) $\frac{1}{x} < -\frac{1}{3}$

E.9378 Sans justification, donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes :

- (a) $\frac{1}{x} > -1$ (b) $\frac{1}{x} < 2$

7. Racine carré : variation

E.403    Nous allons étudier la fonction racine carrée h définie par :

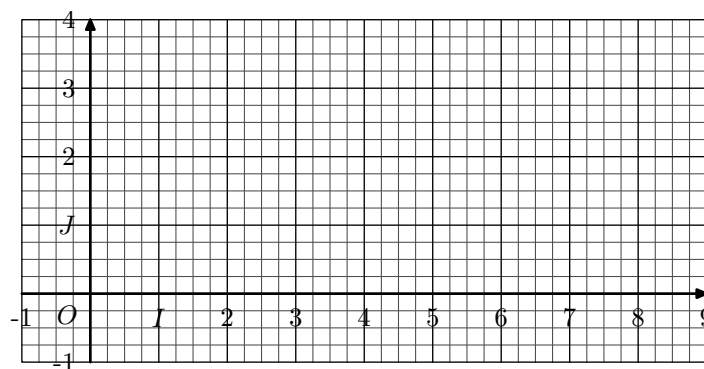
$$f : x \mapsto \sqrt{x}$$

1 Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction racine carrée.

2 a Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	0	0,125	0,25	1	2	4	9
$f(x)$							

b Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans le repère ci-dessous :



3 a Pour a et b non tous les deux nuls, établir l'égalité suivante : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

b En déduire le sens de variation de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$.

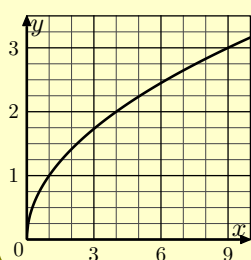
4 La courbe représentative de la fonction f possède-t-elle un axe de symétrie ou un centre de symétrie?

8. Racine carrée : image d'intervalle

E.4515   

Représentation de la fonction racine carrée :

Ci-dessous sont donnés la courbe représentative et le tableau de variation de la fonction racine carrée :



x	0	$+\infty$
Variation de f	0	$+\infty$

Sans justification, donner les images des intervalles ci-dessous par la fonction racine carrée :

a $[1; 4]$ b $[0,81; 2,25[$ c $]5; 9[$

9. Racine carrée : équation et inéquation

E.4972    Sans justification, donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes :

a $\sqrt{x} > 4$ b $\sqrt{x} < 9$

E.4535    Sans justification, donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes :

a $\sqrt{x} > 3$ b $\sqrt{x} < 5$

10. Fonction cube : variations

E.8286    Nous allons étudier la fonction cube h définie par :

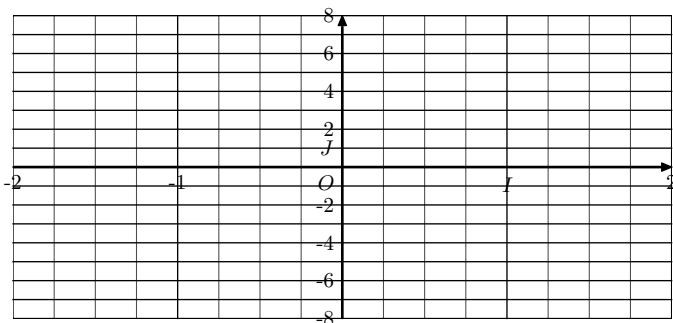
$$f : x \mapsto x^3$$

1 Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction cube.

2 a Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$f(x)$							

b Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans le repère ci-dessous :



- 3 a Pour a et b non tous les deux nuls, établir l'égalité suivante : $f(b) - f(a) = (b-a)(b^2 + a \cdot b + a^2)$

b En déduire le sens de variation de la fonction cube sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$.

- 4 La courbe représentative de la fonction f possède-t-elle un axe de symétrie ou un centre de symétrie?

E.9382

Proposition : deux nombres et leurs cubes sont comparés dans le même ordre.

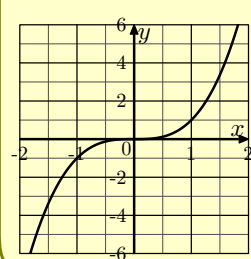
- 1 Soit a et b deux nombres strictement négatifs tels que $a < b$. Comparer les deux nombres a^3 et b^3 .
- 2 Soit a et b deux nombres strictement négatifs tels que $a^2 < b^2$. Comparer les deux nombres a^3 et b^3 .

11. Fonction cube : images d'intervalle

E.9380

Représentation de la fonction cube :

Ci-dessous sont donnés la courbe représentative et le tableau de variation de la fonction cube :



x	$-\infty$	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$+\infty$

Sans justification, donner les images des intervalles ci-dessous par la fonction cube :

- a $[1; 4]$ b $[-3, -1[$ c $[-\sqrt[3]{4}; -\sqrt[3]{2}[$

12. Fonction cube : équations et inéquations

E.4536 Sans justification, répondre aux questions suivantes :

- 1 Résoudre l'inéquation : $x^3 > 8$
- 2 Résoudre l'inéquation : $x^3 \leq 27$

13. Positions relatives des fonctions de références

E.305

- 1 Compléter le tableau suivant :

a	0		0,3	0,7	1			10
a^2		0,04					18,49	
a^3						1,728		

- 2 Soit x un nombre réel positif ($x \in \mathbb{R}_+$) :
- a Conjecturer les valeurs de x réalisant l'égalité : $x = x^2$?
- b Conjecturer les valeurs de x réalisant l'inégalité : $x < x^2$?

c Conjecturer les valeurs de x réalisant l'inégalité : $x > x^2$?

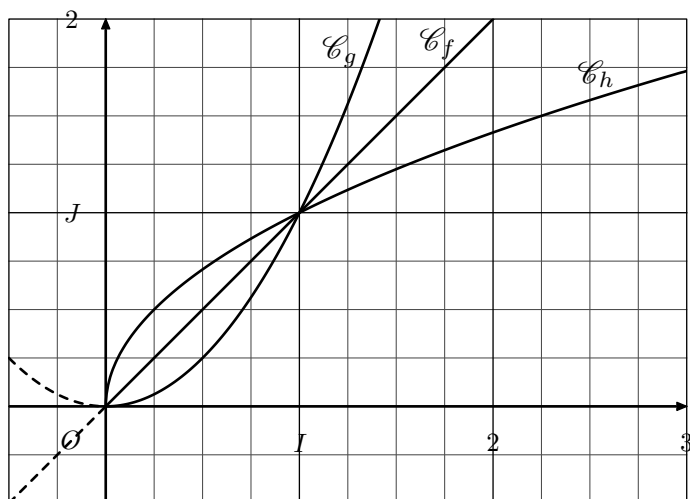
- 3 On note E l'expression : $E = x^2 - x$.

- a Factoriser l'expression E .
- b Étudier le signe de E sur $]0; 1[$. En déduire la comparaison de x et x^2 sur $]0; 1[$.
- c Étudier le signe de E sur $]1; +\infty[$. En déduire la comparaison de x et x^2 sur $]1; +\infty[$.
- 4 Par une méthode similaire aux questions précédentes, comparer les nombres x^2 et x^3 pour toute valeur de x positive ($x \in \mathbb{R}_+$).

E.2703    On considère les trois fonctions f , g , h définies par :

$$f: x \mapsto x \quad ; \quad g: x \mapsto x^2 \quad ; \quad h: x \mapsto \sqrt{x}$$

dont les courbes représentatives sont données dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé ci-dessous :



- ① Graphiquement, étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ sur $\mathbb{R}_+$.

Établissons le résultat de la question précédente d'un point de vue algébrique :

- ② **a** Dresser le tableau de signes de l'expression $x^2 - x$.
b Comparer les fonctions f et g sur chacun des intervalles $[0; 1]$ et $[1; +\infty[$.

- ③ **a** Pour $x \in]0; +\infty[$, établir l'égalité :

$$f(x) - h(x) = \frac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}}$$

- b** Comparer les fonctions f et h sur chacun des intervalles $]0; 1]$ et $[1; +\infty[$.

E.2959   

- ① On considère les deux fonctions f et g définies par :

$$f: x \mapsto (x-1)^2 \quad ; \quad g: x \mapsto (x^2-1)^2$$

Comparer les fonctions f et g sur l'intervalle $[0; 1]$.

- ② On considère les fonctions h et j définies par :

$$h: x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad ; \quad j: x \mapsto \frac{1}{2x+1}$$

Comparer les fonctions h et j sur chacun des intervalles $[0; 1]$ et $[1; +\infty[$.

E.9372   

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions : $f(x) = x^4$; $g(x) = \sqrt{x}$

Dans le plan muni d'un repère, on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g .

- ① Déterminer le polynôme $\mathcal{P}$ vérifiant l'égalité :

$$f(x) - g(x) = \frac{x \cdot (x-1) \cdot \mathcal{P}}{x^4 + \sqrt{x}}$$

- ② En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur les intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.

14. Partage

E.2729   On désigne par f la fonction carrée. Dire si les assertions suivantes sont "vraies" ou "fausses". Dans le cas où une assertion est fausse, on citera un contre-exemple :

- ① Si $x > 1$ alors $x^2 > 1$.
 ② Si $x^2 > 1$ alors $x > 1$.
 ③ L'image de l'intervalle $[-3; 4]$ par la fonction f est

$[9; 16]$.

- ④ L'image de l'intervalle $[-5; 1]$ par la fonction f est $[0; 25]$.
 ⑤ $-4 < 1 \implies f(-4) < f(1)$.
 ⑥ La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

15. Exercices non-classés

E.9379    Sans justification, donner les images, sous forme simplifiée, des intervalles ci-dessous par la fonction racine carrée :

- a** $[10^4; 10^{20}[$ **b** $[2^{16}; 2^{32}[$

E.1825



Le tableau ci-dessous représente les quotients, arrondis au centième près, de carrés d'entiers :

÷	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
1	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
4	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16	20,25	25	30,25	36	42,25	49	56,25
9	0,11	0,44	1	1,78	2,78	4	5,44	7,11	9	11,11	13,44	16	18,78	21,78	25
16	0,06	0,25	0,56	1	1,56	2,25	3,06	4	5,06	6,25	7,56	9	10,56	12,25	14,06
25	0,04	0,16	0,36	0,64	1	1,44	1,96	2,56	3,24	4	4,84	5,76	6,76	7,84	9
36	0,03	0,11	0,25	0,44	0,69	1	1,36	1,78	2,25	2,78	3,36	4	4,69	5,44	6,25
49	0,02	0,08	0,18	0,33	0,51	0,73	1	1,31	1,65	2,04	2,47	2,94	3,45	4	4,59
64	0,02	0,06	0,14	0,25	0,39	0,56	0,77	1	1,27	1,56	1,89	2,25	2,64	3,06	3,52
81	0,01	0,05	0,11	0,20	0,31	0,44	0,60	0,79	1	1,23	1,49	1,78	2,09	2,42	2,78
100	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25
121	0,01	0,03	0,07	0,13	0,21	0,30	0,40	0,53	0,67	0,83	1	1,19	1,40	1,62	1,86
144	0,01	0,03	0,06	0,11	0,17	0,25	0,34	0,44	0,56	0,69	0,84	1	1,17	1,36	1,56
169	0,01	0,02	0,05	0,09	0,15	0,21	0,29	0,38	0,48	0,59	0,72	0,85	1	1,16	1,33
196	0,01	0,02	0,05	0,08	0,13	0,18	0,25	0,33	0,41	0,51	0,62	0,73	0,86	1	1,15
225	0	0,02	0,04	0,07	0,11	0,16	0,22	0,28	0,36	0,44	0,54	0,64	0,75	0,87	1

- 1 a À l'aide du tableau, vérifier l'encadrement ci-dessous :

$$\frac{100}{81} < 1,25 < \frac{81}{64}$$

- b À l'aide du tableau, justifier l'encadrement :

$$\frac{10}{9} < \sqrt{1,25} < \frac{9}{8}$$

- 2 Établir l'encadrement : $\frac{15}{14} < \sqrt{1,16} < \frac{13}{12}$

- 3 À l'aide du tableau, donner l'encadrement le plus précis du nombre $\sqrt{2,5}$.

E.7379



- 1 Pour tous nombres réels a et b , établir l'égalité :

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot \left[\left(a + \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3 \cdot b^2}{4} \right]$$

- 2 Établir que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

E.5029



- 1 Soit a et b deux nombres réels. Établir l'identité suivante :

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2)$$

- 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$f(x) = x^3$$

Établir que la fonction f est croissante sur $] -\infty ; 0]$.

E.8025



Parmi les courbes ci-dessous, lesquelles sont la représentation de la fonction carrée :

