

1. Second degré : équation

E.4411  

Proposition : les racines d'un polynôme sont les valeurs annulant ce polynôme.

Pour un polynôme $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ du second degré, le nombre de racines existantes dépend du discriminant :

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Aucune solution	1 solution $-\frac{b}{2 \cdot a}$	2 solutions $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$; $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$

Déterminer les racines des polynômes du second degré :

- (a) $x^2 + 2x - 35 = 0$ (b) $2x^2 - 5x + 2 = 0$
 (c) $5x^2 - 3x + 2 = 0$ (d) $9x^2 - 24x + 16 = 0$
 (e) $-2x^2 + 3x - 5 = 0$ (f) $-3x^2 - x + 4 = 0$

E.4415   Résoudre les équations suivantes :

- (a) $3x^2 + 4x + 1 = 0$ (b) $3x^2 - 4x + 2 = 0$
 (c) $-x^2 + 2x + 3 = 0$ (d) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

E.4412   Résoudre les équations suivantes :

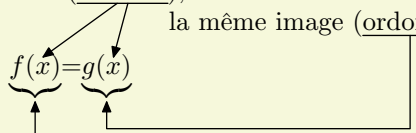
- (a) $2x^2 - 3x - 2 = 0$ (b) $x^2 - 3x + 1 = 0$

E.4479  

Rappels :

- Pour une fonction du second degré $f : x \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, les antécédents de 0 sont les racines du polynôme.
- Les abscisses des points d'intersection des courbes de f et g vérifient l'équation $f(x) = g(x)$. Car :

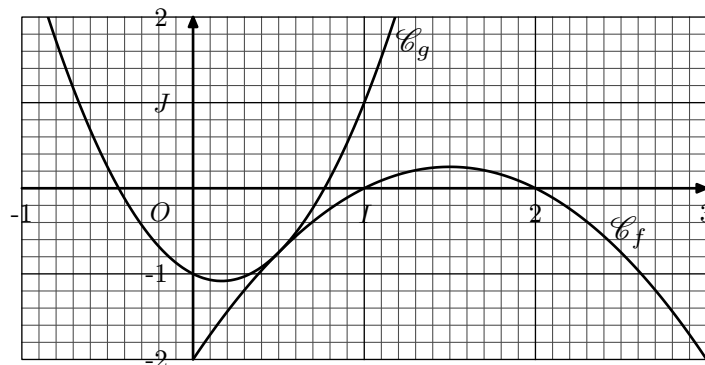
Pour cette valeur (abscisse), les deux fonctions auront la même image (ordonnée)



On considère les deux fonctions f et g dont les images d'un nombre x sont définies par les relations :

$$f(x) = -x^2 + 3x - 2 \quad ; \quad g(x) = 3x^2 - x - 1$$

Dans le repère $(O; I; J)$, on donne les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ respectivement des fonctions f et g :



- 1 Graphiquement, donner les antécédents du nombre 0 par la fonction f .

Les questions suivantes se traiteront algébriquement :

- 2 Déterminer les antécédents du nombre 0 par la fonction g . On donnera les valeurs arrondies au centième près.
 3 (a) Résoudre l'équation : $f(x) = g(x)$
 (b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

E.4482   Résoudre les équations suivantes :

- (a) $-5x^2 - 4x + 1 = 0$ (b) $-6x^2 + 8x + 8 = 0$
 (c) $(3x - 2)(2x - 2) = x(2x + 2) - 5$

E.7486   On considère les deux fonctions f et g définies sur $] -1 ; +\infty[$ définies par les relations :

$$f(x) = \frac{-2}{x+1} \quad ; \quad g(x) = 2 \cdot x - 3$$

Dans un repère $(O; I; J)$, on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g .

- 1 Établir l'identité : $g(x) - f(x) = \frac{2 \cdot x^2 - x - 1}{x + 1}$
 2 En déduire les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

E.8107   Résoudre l'équation : $-6 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 2 = 0$

2. Second degré : équation et simplification de radicaux

E.9440   Résoudre les équations suivantes :

- (a) $-3x^2 + 3x + 3 = 0$ (fb) $-x^2 + 4x + 3 = 0$

E.9441   Résoudre les équations suivantes :

- (a) $x^2 - 4x - 3 = 0$ (b) $2x^2 - 4x - 8 = 0$

3. Second degré : forme factorisée

E.4466   Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

- a) $2x^2 + 3x + 1$ b) $4x^2 + 9x + 2$ c) $-3x^2 + 2x - 1$

Indication : présenter les résultats sous la forme :

$$(a \cdot x + b)(c \cdot x + d) \quad \text{ou} \quad (a \cdot x + b)^2 \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

E.4413  

Proposition : la factorisation d'un polynôme $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ du second degré dépend de la valeur de son discriminant :

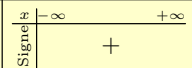
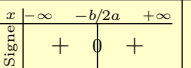
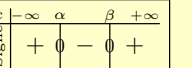
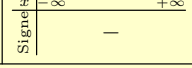
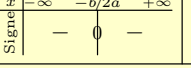
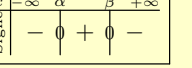
$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Aucune factorisation	$a \cdot \left(x + \frac{b}{2 \cdot a}\right)^2$	$a \cdot (x - \alpha)(x - \beta)$ où α et β sont les deux racines du polynôme

4. Second degré : inéquation

E.4417  

Proposition : le tableau de signes d'un polynôme du second degré dépend du signe du coefficient du terme du second degré et du signe du discriminant.

Les six possibilités sont représentées ci-dessous :

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$ α et β sont les deux racines
$a > 0$			
$a < 0$			

Dresser le tableau de signes de chacune des expressions suivantes :

- a) $2x^2 + x - 1$ b) $-3x^2 + 2x + 1$ c) $2x^2 - 1$
d) $4x^2 - 3x - 1$ e) $-x^2 - x - 1$ f) $-x^2 - 4x - 1$

5. Second degré : tableau de variations et tableau de signe

E.4498   On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ définies par les relations :

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad ; \quad g(x) = -2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 5$$

- Établir le tableau de variations de chacune de ces fonctions.
- Établir le tableau de signes de chacune de ces fonctions.

E.4500  

- On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est définie par :

$$f(x) = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 2$$

Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

- a) $x^2 + 4x + 3$ b) $5x^2 - 4x - 1$ c) $3x^2 + 4x + 1$
d) $4x^2 + 3x + 4$ e) $12x^2 + 36x + 27$ f) $3x^2 + 3x + 4$

E.4416   Factoriser, si possible, les polynômes du second degré ci-dessous :

- a) $3x^2 + 4x + 1$ b) $-4x^2 + 5x$ c) $-4x^2 + 12x - 9$

Indication : présenter les résultats sous la forme :

$$(a \cdot x + b)(c \cdot x + d) \quad \text{ou} \quad (a \cdot x + b)^2 \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

Remarque : à la question f), on utilisera les racines du polynôme, arrondie au centième près.

E.4467   Résoudre les inéquations suivantes :

- a) $x^2 + 5x + 4 > 0$ b) $-3x^2 + 4x + 4 < 0$
c) $4x^2 + 4x + 1 > 0$ d) $-2x^2 + 5x + 3 > 0$
e) $4x^2 - 3x + 2 \leq 0$ f) $12x^2 + 12x + 3 \leq 0$

E.4611   Dresser le tableau de signes des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$:

- a) $2x^2 - 3x - 2$ b) $(2x + 1)(3x^2 - 2x - 1)$

E.4483   Résoudre les inéquations suivantes :

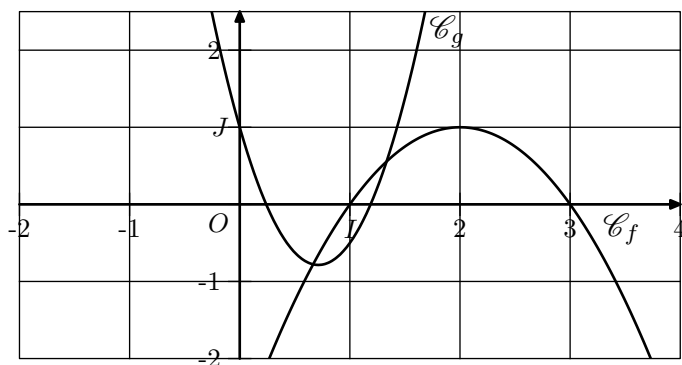
- a) $2x^2 + 3x - 5 > 0$ b) $-x^2 + 5x - 4 \leq 0$
c) $(-4x^2 + x + 5)(3 - 2x) \geq 0$

6. Second degré : position relative de courbes

- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
 - Justifier que la fonction f n'admet aucun antécédent du nombre 0.
- Soit g la fonction définie par la relation :
 $g(x) = -x^2 + 2 \cdot x + 3$
 - Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre 0 par la fonction g .
 - Dresser le tableau de variations de la fonction g (on y apportera les résultats de la question précédente).
 - En déduire le tableau de signes de la fonction g .

E.4471   Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3 \quad ; \quad g(x) = \frac{7}{2}x^2 - 5x + 1$$



Les questions ci-dessous doivent être traitées algébriquement :

① Déterminer les antécédents de 0 par les fonctions f et g .
On donnera les valeurs exacte et arrondies au centième près.

② Déterminer la position relative de ces deux courbes.

E.7417   On considère les deux fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et par les relations :

$$f(x) = \frac{2}{2x+3} \quad ; \quad g(x) = 2x+2$$

①  Établir l'égalité : $g(x) - f(x) = \frac{4x^2 + 10x + 4}{2x+3}$

 Dresser le tableau de signes du polynôme $4x^2 + 10x + 4$ en laissant les étapes de votre raisonnement.

② Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g .

Comparer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $\left] -\frac{2}{3}; +\infty \right[$.

7. Equation et ensemble de résolution

E.2735   On considère l'équation suivante :

$$\frac{1}{2x^2 - 3x + 1} - \frac{1}{2x^2 + 5x + 2} = 0$$

① Déterminer l'ensemble de résolution de cette équation.

② Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.

E.2733   Résoudre les équations suivantes en tenant garde à l'ensemble de résolution de chaque équation :

 $\sqrt{3x^2 - 2x - 3} = \sqrt{x}$

 $\frac{1}{3x^2 - 8x + 4} = \frac{-2}{5x^2 - 6x - 8}$

E.5055   On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{-2x^2 - 3x + 2}$$

①  Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

 Dresser le tableau de variations de la fonction f .

② On considère la droite (d) d'équation : $y = -5x$.

 Résoudre l'équation : $-2x^2 - 3x + 2 = 25x^2$.

 Justifier que la droite (d) intercepte la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f en un unique point.

E.9439   Résoudre l'inéquation :
 $-4x^2 + 3x + 7 \leq 0$

8. Inéquations et expressions rationnelles

E.2278   Résoudre les inéquations suivantes :

 $\frac{x^2 - x}{2x - 1} \leq 0$

 $\frac{18x^2 - 12x + 2}{3x^2 + x - 2} > 0$

 $\frac{x^2 + 2x - 5}{x} \geq 0$

 $\frac{x - 2}{x + 1} - \frac{3x - 1}{x - 1} < 0$

E.2298   Résoudre les inéquations suivantes :

 $\frac{3x^2 - 5x + 2}{-3x^2 + 4x - 2} \leq 0$

 $\frac{2x - 5}{2x - 1} < \frac{x + 1}{x + 3}$

E.2306   Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{3x^2 - 5x + 2}{-3x^2 - 4x + 2} \leq 0$$

E.2747   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{-3x^2 + 4x + 4}{5x^2 + x - 4} \geq 0$$

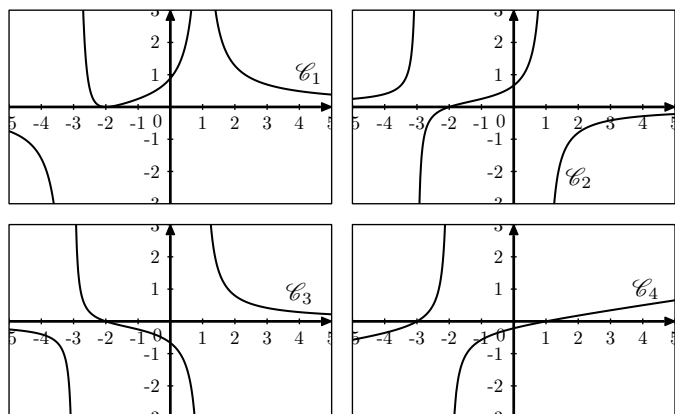
E.835   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\frac{-x^2 - 3}{3} + 2 = \frac{1}{2x + 1}$$

E.5743   On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+2x-3}$$

- 1 Résoudre l'inéquation : $f(x) \geq 0$
- 2 Parmi les quatre courbes ci-dessous, une seule est la courbe représentative de la fonction f . Laquelle?



E.2283   Donner l'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{2x+1}{x^2+5x-1}}$$

E.6632   On considère les deux fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f(x) = \frac{2x^2+3x-3}{x+1} ; \quad g(x) = x-2$$

Résoudre l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$

E.9438   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivante :

$$\text{a) } \frac{-x^2-3}{3} + 2 = \frac{1}{2x+1} \quad \text{b) } \frac{4x}{x+1} \leq 5x-3$$

9. Inéquations et expressions rationnelles : degré supérieur à 2

E.4569    On considère les deux fonctions f et g définies sur $] -2; +\infty[$ par les relations :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1} ; \quad g(x) = \frac{3x-3}{2x+4}$$

- 1 **a** Établir l'égalité suivante :

$$f(x) - g(x) = \frac{-3x^3 + 5x^2 - x - 1}{(x^2+1)(2x+4)}$$
b Déterminer la valeur des réels a , b et c vérifiant la relation suivante :

$$f(x) - g(x) = \frac{(x-1)(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)}{(x^2+1)(2x+4)}$$
- 2 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation :
 $f(x) - g(x) = 0$
- 3 **a** Dresser le tableau de signes de : $f(x) - g(x)$.
(on admettra que le produit $(x^2+1)(2x+4)$ est strictement positif sur $] -2; +\infty[$).
b En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $] -2; +\infty[$.

E.4541   On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 6x + 12 ; \quad g(x) = 2x - 4$$

On considère $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g .

- 1 Montrer que 2 est solution de l'équation : $f(x) = g(x)$.
- 2 **a** Déterminer la valeur des réels a , b , c vérifiant :

$$f(x) - g(x) = (x-2)(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$$
b En déduire la forme factorisée de l'expression :
 $f(x) - g(x)$.
- 3 **a** Dresser le tableau de signes de la différence :
 $f(x) - g(x)$
b En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

E.2736   On considère les deux fonctions f et g dont les images d'un nombre x sont définies par les relations suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad ; \quad g(x) = \sqrt{2x+1}$$

- 1
 - a Déterminer le tableau de variations des fonctions f et g respectivement sur les intervalles $]2; +\infty[$ et $[-\frac{1}{2}; +\infty[$.
 - b Justifier, à la vue du tableau de variation, que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ne s'intersectent qu'une seule fois sur l'intervalle $]2; +\infty[$.
- 2 On souhaite résoudre l'équation : $(E) : \frac{1}{x-2} = \sqrt{2x+1}$
 - a Déterminer les valeurs de a, b, c afin que :
 $(x-2)^2 \cdot (2x+1) - 1 = (2x-3)(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$
 - b En déduire les solutions de l'équation :
 $(x-2)^2 \cdot (2x+1) - 1 = 0$.
 - c Déterminer les solutions de l'équation (E) .

E.4546    On considère la fonction f dont

l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{-x-3}{2 \cdot x^2 - 3}$$

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2 Soit g la fonction affine définie par la relation :
 $g(x) = x + 3$
 - a Déterminer la valeur des réels a, b et c vérifiant l'égalité suivante :
 $f(x) - g(x) = \frac{(1-x)(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)}{2 \cdot x^2 - 3}$
 - b En déduire la forme factorisée de $f(x) - g(x)$.
- 3
 - a Dresser le tableau de signes de $f(x) - g(x)$ sur l'intervalle $]-\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}[$.
On admettra que l'expression $2x^2 - 3$ est négative sur $]-\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}[$.
 - b En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $]-\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}[$.

10. Un peu plus loin

E.2739   On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ et on considère les points $A(-0,6; 1,2)$ et $B(1; 0)$.

- 1 Déterminer la mesure de la distance AB .
- 2 On souhaite déterminer les coordonnées du point C tel que le triangle ABC soit équilatéral :
 - a Justifier que les coordonnées du point C vérifient les deux équations suivantes :
 $(x_C + 0,6)^2 + (y_C - 1,2)^2 = 4$
 $(x_C - 1)^2 + y_C^2 = 4$
 - b En déduire l'égalité suivante : $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$
 - c En déduire les valeurs possibles de x .
 - d Donner les coordonnées des deux points réalisant

l'énoncé.

E.2924   Le but de cet exercice est de démontrer que les seuls polynômes périodiques sont les polynômes constants.

On utilisera la proposition suivante :

Proposition : tout polynôme réel de degré n admet au maximum n racines réelles.

Notons a un nombre réel non-nul et P un polynôme périodique de période a :

- 1 On note Q le polynôme défini par :
 $Q(x) = P(x) - P(a)$
Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $Q(n \cdot a) = 0$
- 2 En conclure que le polynôme P est constant.

11. Un peu plus loin : systèmes d'équations du second degré

E.2715   On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x \cdot y = -1 \\ (x-2)(2y+3) = 0 \end{cases}$$

- 1 Vérifier que le couple $(\frac{2}{3}; -\frac{3}{2})$ est solution de ce système
- 2 Justifier que les abscisses des solutions de ce système forment l'ensemble des solutions de l'équation suivante sur $\mathbb{R}^*$: $3x^2 - 8x + 4$
- 3 En déduire l'ensemble des solutions de ce système.

E.2716  

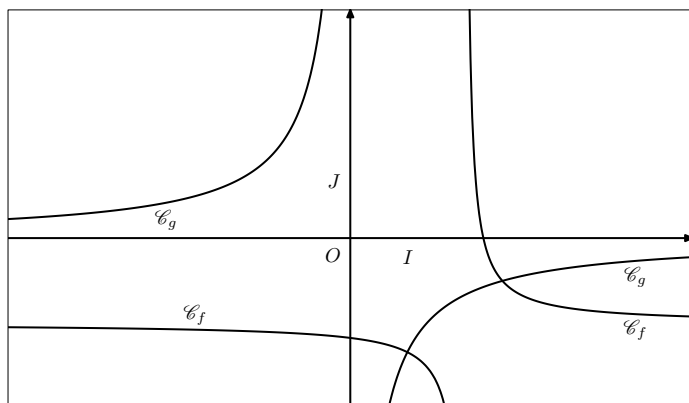
1) Déterminer les solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x \cdot y = -2 \\ (2y + 3)(x - 2) = 1 \end{cases}$$

2) On considère les deux fonctions g définies dont les images d'un nombre x sont définies par les relations suivantes :

$$f(x) = \frac{7-3x}{2x-4} ; \quad g(x) = -\frac{2}{x}$$

Voici la courbe représentative de ces deux fonctions :



- a) Justifier que les points d'intersection de ces deux courbes vérifient le système d'équations de la question 1).
- b) En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et C_g .

E.2748   Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x \times y = -2 \end{cases}$$

E.1393   Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 5 \\ x \times y = 1 \end{cases}$$

Indication : Ce système possède quatre couples de solutions.

E.2003   Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -5x^2 + 4y^2 = -1 \\ x \times y = 1 \end{cases}$$

Indication : ce système admet deux couples comme solutions.

E.2004   Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -2x^2 - 2y^2 = -4 \\ x \times y = -1 \end{cases}$$

Indication : ce système admet deux couples pour solutions

E.2005   Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = -3 \\ x \times y = 1 \end{cases}$$

Indication : ce système n'admet aucun couple comme solution.

E.2006    Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -x^2 + 9y^2 = 9 \\ x \times y = -2 \end{cases}$$

E.2007   

- | | |
|---|---|
| a) $\begin{cases} -10x^2 + 4y^2 = 6 \\ x \times y = -2 \end{cases}$ | b) $\begin{cases} -7x^2 + 4y^2 = 9 \\ x \times y = -2 \end{cases}$ |
| c) $\begin{cases} -4x^2 + 3y^2 = 8 \\ x \times y = -2 \end{cases}$ | d) $\begin{cases} -2x^2 + 1y^2 = -1 \\ x \times y = -1 \end{cases}$ |
| e) $\begin{cases} 1x^2 + -8y^2 = -7 \\ x \times y = 1 \end{cases}$ | f) $\begin{cases} 2x^2 + -7y^2 = 1 \\ x \times y = 2 \end{cases}$ |
| g) $\begin{cases} 3x^2 + -5y^2 = 7 \\ x \times y = -2 \end{cases}$ | h) $\begin{cases} 4x^2 + -4y^2 = -7 \\ x \times y = 3 \end{cases}$ |
| i) $\begin{cases} 5x^2 + -4y^2 = 4 \\ x \times y = -4 \end{cases}$ | j) $\begin{cases} 6x^2 + -5y^2 = 9 \\ x \times y = -9 \end{cases}$ |

E.2008    Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 6x^2 + 7y^2 = -8 \\ x \times y = -5 \end{cases}$$

E.7248   Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

E.2044    Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x \times y = -2 \\ (x + 8)(y + -2) = -7 \end{cases}$$

E.2042   Résoudre les systèmes suivants :

- | | |
|--|--|
| a) $\begin{cases} x \times y = 3 \\ (x + -1)(y + 1) = 4 \end{cases}$ | b) $\begin{cases} x \times y = 3 \\ (x + 5)(y + 5) = 8 \end{cases}$ |
| c) $\begin{cases} x \times y = 4 \\ (x + 6)(y + 3) = 4 \end{cases}$ | d) $\begin{cases} x \times y = 6 \\ (x + -3)(y + 1) = 6 \end{cases}$ |
| e) $\begin{cases} x \times y = 7 \\ (x + 2)(y + 2) = -5 \end{cases}$ | |

E.2043    Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x \times y = 4 \\ (x + 6)(y + -3) = -8 \end{cases}$$

E.2045    Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x \times y = 2 \\ (x - 1)(y - 9) = 2 \end{cases}$$

E.2046    Résoudre l'équation suivante :

$$\begin{cases} x \times y = 2 \\ (x + 4)(y - 1) = -2 \end{cases}$$

12. Un peu plus loin : changement de variables

E.6793  

1 Déterminer les racines du polynôme :
(P) : $x^2 - 8x + 4$

2 Développer et simplifier les expressions suivantes :
 $a = (1 + \sqrt{3})^2$; $b = (1 - \sqrt{3})^2$

3 On considère le polynôme (P') défini par :
(P') : $x^4 - 8x^2 + 4$

a Montrer que $1 + \sqrt{3}$ est une racine de (P').

b En déduire les quatre racines du polynôme (P').

E.6877   Résoudre les deux équations suivantes en utilisant le changement de variable :

a P : $x^4 - 5x^2 + 4$

b P' : $x^4 + 5x^2 + 4$

E.2971    On considère l'expression (E) définie par :

(E) : $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$

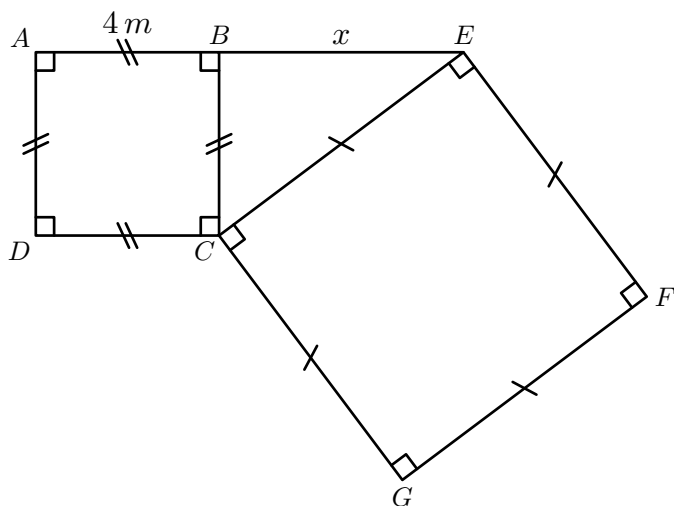
1 a Montrer que si a est solution de l'équation (E) alors $\frac{1}{a}$ l'est aussi.

b Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation :

(E') : $x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

13. Second degré : problèmes

E.4423   Un champ est composé de deux carrés et d'un triangle rectangle. On a représenté ce champ dans la figure ci-dessous :



1 Justifier que l'aire $\mathcal{A}$ du champ a pour valeur en fonction de x :

$\mathcal{A}(x) = x^2 + 2x + 32$

2 En déduire la valeur de la longueur x afin que l'aire totale du champ soit de $200 m^2$.

2 a Développer l'expression suivante :

$\left(x + \frac{1}{x} - 1\right)\left(x + \frac{1}{x} - 2\right)$

b En utilisant le changement de variable $X = x + \frac{1}{x}$, modifier l'équation (E') en une équation du second degré en X .

c Résoudre l'équation en X obtenu à la question précédente.

d En déduire les valeurs de x solution de (E').

3 Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).

E.5143   On considère l'équation (E) définie par :

$x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 8x + 1 = 0$

1 Montrer que l'équation (E) est équivalente à :

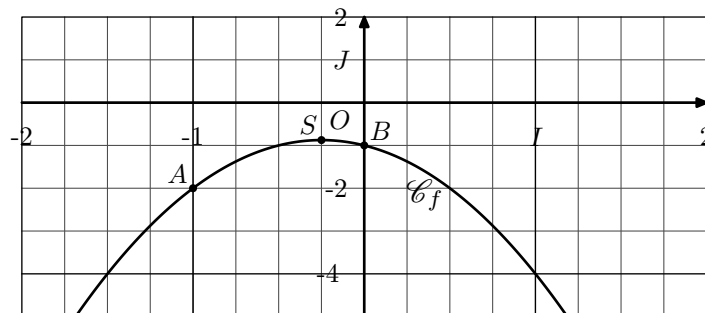
(E') : $x^2 - 8x + 2 - \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

2 Déterminer les réels a , b et c vérifiant la relation :

$x^2 - 8x + 2 - \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = a \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + b \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + c$

3 En posant pour changement de variable $X = x + \frac{1}{x}$, résoudre l'équation (E').

E.4499   La courbe $\mathcal{C}_f$ est une parabole représentant une fonction f du second degré.



La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points $A(-1; -2)$, $B(0; -1)$ et admet pour sommet le point S dont l'abscisse est $-\frac{1}{4}$.

La fonction f étant définie par un polynôme du second degré, on en déduit l'existence de trois réels a , b et c tels que :

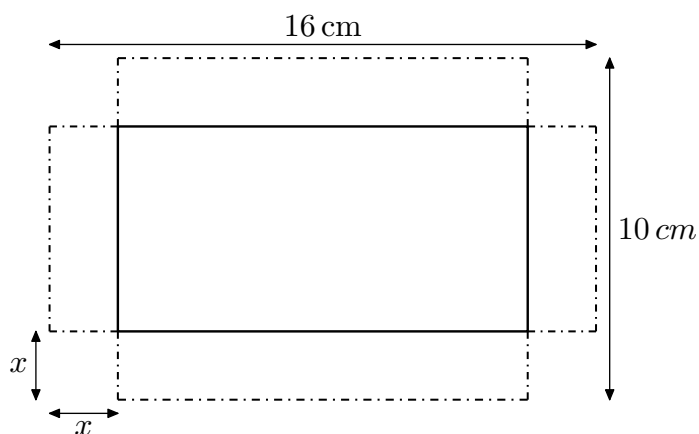
$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

1 À l'aide des coordonnées du point B , déterminer la valeur du nombre c .

2 En utilisant les caractéristiques du sommet S de la parabole, justifier que la fonction f admet l'écriture :
 $f(x) = 2b \cdot x^2 + bx - 1$

3 À l'aide des coordonnées du point A , déterminer l'expression complète de la fonction f .

E.4470   On veut réaliser, dans le patron ci-dessous une boîte rectangulaire sans couvercle. Les longueurs sont exprimées en *cm*.



- 1
 - a) Lorsque la boîte sera construite, le nombre x représentera quelle dimension? La longueur, la largeur ou la hauteur?
 - b) Quelles valeurs peuvent prendre la variable x dans ce problème?
 - c) Donner l'expression du volume $\mathcal{V}$ en fonction de la valeur de x .
- 2 Dans cette question, nous cherchons pour quelles valeurs de " x ", cette boîte possède un volume égal à 144 cm^3 :
 - a) Établir l'égalité suivante:

$$4x^3 - 52x^2 + 160x - 144 = (2x - 4)(2x^2 - 22x + 36)$$
 - b) En déduire les valeurs de x pour lesquelles $\mathcal{V}(x)$ a pour valeur 144.

14. Exercices non-classés

E.4567    Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à l'aide d'un polynôme du second degré dont le coefficient du terme du second degré est strictement négatif.

Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est une parabole dont le sommet a pour coordonnée $\left(\frac{1}{4}; -\frac{7}{8}\right)$.

- 1
 - a) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
 - b) En déduire le signe du discriminant du polynôme du second degré définissant la fonction f .
- 2 La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points:
 $A(0; -1)$ et $B(-2; -11)$.

Déterminer les réels a , b et c vérifiant l'égalité:
 $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

E.4414   On considère le polynôme du second degré $(E): x^2 + 3x + 3$.

- 1 Déterminer le discriminant du polynôme (E) .
- 2 En effectuant un raisonnement par l'absurde et en supposant que l'expression (E) admette la forme factorisée:
 $(E): a(x - \alpha)(x - \beta)$
 Établir que l'expression (E) n'admet pas de forme factorisée.

E.2806   Résoudre l'équation suivante:

$$\frac{-3}{\sqrt{-2x+1}} = -x - 3$$

E.2010  

- 1 Établir l'identité suivante:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

Remarque: cette question permet d'affirmer que tout polynôme du second degré $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ admet une écriture de la forme $\alpha(x + \beta)^2 - \gamma$. Cette dernière forme s'appelle la **forme canonique** d'un polynôme du second degré.

- 2
 - a) Justifier que l'expression:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = 0$$

n'admet aucune solution, une solution, deux solutions suivant la valeur de $b^2 - 4ac$?

- b) Pour chacune des équations ci-dessous, décrire l'ensemble des solutions: c'est-à-dire s'il est vide ou le nombre d'éléments le constituant:
 $(E): 4x^2 - 5x + 4$ $(F): 2x^2 - x - 1$
 $(G): 9x^2 - 24x + 16$

Remarque: on vient de voir que l'ensemble des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de $b^2 - 4ac$.

Définition: on appelle discriminant du polynôme $ax^2 + bx + c$ le nombre noté Δ valant:
 $\Delta = b^2 - 4a \cdot c$.

Remarque: relativement à la question précédente, on en déduit qu'une équation du second degré admet comme ensemble de solution:

- l'ensemble vide si $\Delta < 0$,
- un ensemble à un élément si $\Delta = 0$,
- un ensemble à deux éléments distincts si $\Delta > 0$.

- 3 On considère un polynôme du second degré ayant un discriminant strictement positif: $\Delta = b^2 - 4a \cdot c > 0$
 - a) Factoriser l'expression: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \Delta$
 - b) En déduire que l'équation du second degré:
 $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$
 admet pour solutions:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$
- 4 On considère l'équation $(H): 2x^2 + 2x - 12 = 0$
 - a) Déterminer le discriminant du polynôme $2x^2 + 2x - 12$. Combien de solution admet l'équation (H) ?
 - b) Par application directe de la question 3 b), prouver que l'équation (H) admet pour ensemble de solution $\{-3; 2\}$