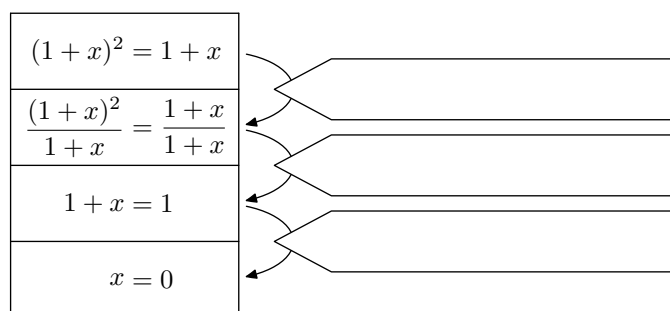


1. Domaine de résolution, de définition

E.1343   Voici ci-contre le travail d'un élève cherchant à résoudre l'équation : $(1+x)^2 = 1+x$

$$\begin{aligned}(1+x)^2 &= 1+x \\ \frac{(1+x)^2}{1+x} &= \frac{1+x}{1+x} \\ 1+x &= 1 \\ x &= 0 \\ S &= \{0\}\end{aligned}$$

- 1 a Vérifier que la valeur -1 est une solution de cette équation.
b Que peut-on dire de la résolution proposée par l'élève?
- 2 Le diagramme ci-dessous représente les différentes étapes effectuées par cet élève. Compléter les "étiquettes" en indiquant l'action effectuée par l'élève :



- 3 a Pour quelles valeurs de x sont définies les deux expressions : $(1+x)^2$; $1+x$
b Pour quelles valeurs de x sont définies les deux expressions : $\frac{(1+x)^2}{1+x}$; $\frac{1+x}{1+x}$
c Expliquer d'où vient l'erreur faite par l'élève.

E.4389   On souhaite résoudre l'équation :

$$(E) : \frac{(x-2)x}{x+1} = \frac{2x^2+1}{x+1}$$

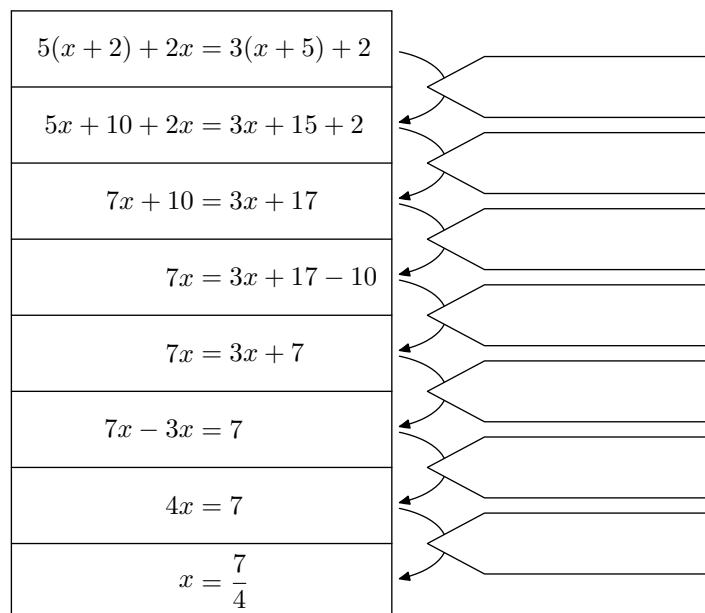
- 1 Quel est le domaine de résolution de cette équation?

- 2 Pour $x \neq -1$, établir l'égalité suivante :

$$\frac{2x^2+1}{x+1} - \frac{(x-2)x}{x+1} = x+1$$

- 3 Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de (E)?

E.4402   Le diagramme ci-dessous présente les étapes de la résolution algébrique d'une équation.



Décrire succinctement chacune de ces étapes en indiquant dans les étiquettes l'action mathématique réalisée (*factorisation, développement, soustraction...*).

E.4544   On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x}+3}$$

- 1 Justifier que l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}_+$.
2 Établir que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

E.454    Résoudre l'équation suivante :

$$\frac{2x-2}{x-1} = \frac{3x+3}{2x+1}$$

2. Développement

E.6994   Donner la forme développée réduite des expressions suivantes :

- a $(2x+1)(x+2)$ b $(x-1)(2x+2)$
c $(-2-x)(3x+1)$ d $(2x+3)^2$

3. Factorisation

E.4424   Factoriser les expressions suivantes :

- a $(3x-1)(2x+1) + (5-x)(2x+1)$
b $x(2-x) + (3x+1)(2-x)$
c $(x+1)(x-1) - (2x+3)(x-1)$

E.4403   Résoudre les équations suivantes :

- a) $(4x+3)(2-3x) + (2-6x)(2-3x) = 0$
 b) $2 \cdot (x-2)(3x+2) = 3(2x+3)(x-2)$
 c) $(x+1)(3x-2) = (x+1)^2$

E.9423   Factoriser les expressions suivantes :

- a) $(3x+4)(2x-1) + 4(3x+4)$
 b) $(2x+4)(3-3x) + (2x+4)$
 c) $(x+1)(3-2x) + (3-2x)^2$

4. Factorisation par un facteur commun

E.9420   Factoriser les expressions suivantes :

- a) $(x+2)(x-3) + (3x+6)(2x-1)$
 b) $(3x+6)(x-4) - (2x-8)(x-2)$
 c) $(2x+7)(27x+18) - (5-x)(3x+2)$

E.9422   Factoriser les expressions suivantes :

- a) $(3x+2)(5-x) + (6x+4)$
 b) $(5-2x)(x+1) - 3x(2x-5)$
 c) $(5-2x) + (4x-10)(7-2x)$

E.9418   Factoriser les expressions suivantes :

- a) $(3x+2)(4x+2) - (5x+1)(2x+1)$
 b) $(2x-1)(9x+3) + (3x+1)^2$

E.4613  

Rappels :

L'opposé de l'expression $3x-4$ peut s'exprimer avec les deux formes suivantes : $-3x+4$; $4-3x$

L'opposé du produit $a \times b$ peut s'exprimer avec les deux formes : $(-a) \times b$; $a \times (-b)$

Attention, le produit $(-a) \times (-b)$ est **égal** au produit $a \times b$.

Applications :

- Dans l'expression $(3x-4)(5x+1) + (4-3x)(2-2x)$, le facteur commun est $3x-4$.
- On a les transformations successives :
 $(2-x)(x-4) = [-(x-2)](x-4) = (x-2)(4-x)$

E.9426   On considère l'équation : (F) :

$$\frac{3-3x}{2x+2} + \frac{3x-2}{2x+3} = 0$$

1 Établir l'égalité suivante :

$$\frac{3-3x}{2x+2} + \frac{3x-2}{2x+3} = \frac{5-x}{(2x+2)(2x+3)}$$

2 Résoudre l'équation (F).

Factoriser les expressions suivantes :

- a) $(3x-4)(5x+1) + (4-3x)(2-2x)$
 b) $(x-2)(2x+3) + (2-x)(x-4)$

E.6995  

Rappel : lorsque les coefficients d'un polynôme sont des multiples d'un même nombre, une factorisation est possible.

Exemple :

$$\bullet 2x+2 = 2 \cdot (x+1) \quad \bullet 6x-3 = 3 \cdot (2x-1)$$

Factoriser les expressions suivantes :

- a) $(x+1)(2x-1) + (2x+2)(3x+2)$
 b) $(6x-3)(x+1) + (2x-1)(x+2)$
 c) $(9x-3)(3x+1) - (x-2)(3x-1)$
 d) $(2x+2)^2 + (x+1)$

E.7219   Factoriser les expressions suivantes :

- a) $(x+3)(2x-1) - (3x+1)(x+3)$
 b) $(6-3x)(x+2) - (2-x)^2$

5. Factorisation par un facteur commun et équation

E.9414   Résoudre les équations suivantes :

- a) $(4x+2)(3x-1) + x(6x+3) = 0$
 b) $(3x+9)^2 = 2(2x+6)(3x-2)$

E.2858   Résoudre les équations suivantes :

- a) $(3x+1)(1-3x) + (6x+2)(3x-1) = 0$

E.2113   Résoudre les équations suivantes avec la méthode de votre choix :

a) $(2x - 3)(4x - 2) + (3 - 6x)(x - 3) = 0$

b) $(2 - 6x)(3x + 3) = (-9x + 3)(2x + 1)$

E.9416   Résoudre les équations suivantes :

a) $(5x + 2)(4x - 3) = (2x - 1)(3 - 4x)$

b) $(2 - 3x)(2x - 4) + (10 - 5x)(3x - 1) = 0$

E.9419   Résoudre l'équation suivante :
 $(5x + 1)(3x - 1) - 2(x + 1)(1 - 3x) = 0$

E.4566   Résoudre les équations suivantes :

a) $(x + 2)(3 - x) + 2(x - 3)(2x - 5) = 0$

b) $(6 - 2x)(3x + 2) = (3x - 9)(x + 2)$

c) $(9 - 3x)(5 + 2x) + (x - 3)(5 + x) = 0$

E.4425   Factoriser les expressions suivantes :

a) $(x - 1)(2x + 1) - (2x - 2)(5 - 2x)$

b) $3(4 + 2x) - (3 + x)(10 + 5x)$

c) $(2 - x)(3x - 4) + \left(2 - \frac{3}{2}x\right)(2x + 3)$

6. Factorisation : identité remarquable

E.9421   Factoriser les expressions suivantes :

a) $(2x + 1)^2 - 4(2 - 3x)^2$

b) $18x^2 - 24x + 8 + (3x - 2)(2 - x)$

E.4528   Factoriser les expressions suivantes :

a) $-5(3x + 2) - 5x(2x + 1)$

7. Factorisation par facteur commun et identité remarquable

E.4551   Factoriser les expressions suivantes :

a) $(3x + 2)(5x - 1) - (2 - 10x)(2 - 4x)$

b) $(x + 3)(3x + 6) + (4x + 8)^2$

c) $(2x + 3)(5x - 4) - (2x - 2)(6 - x)$

d) $(x - 3)(-3x - 3) - (2x + 2)(3 - 3x)$

E.9425   Résoudre les équations suivantes :

a) $(1 - 5x)(2x + 1) = (1 - 3x)(3x + 2)$

b) $(6x + 1)(3x + 1) + (2x + 1)(2 - 9x) = 0$

c) $(-5x - 4)(2x + 1) = (-4x - 3)(3x + 2)$

E.4547   Résoudre les équations suivantes :

a) $(4x + 2)(3x - 1) + x(6x + 3) = 0$

b) $(x + 3)^2 = 2(2x + 6)(3x - 2)$

c) $(-5x - 4)(2x + 1) = (-4x - 3)(3x + 2)$

d) $(1 - 5x)(2x + 1) = (1 - 3x)(3x + 2)$

8. Equations

E.1940   On considère deux nombres réels x et y vérifiant les encadrements suivants :

$$-4 \leq x \leq -1 \quad ; \quad 2 \leq y \leq 5$$

1) Donner les encadrements des nombres suivants :

a) $3 \times (1 - x) + 1$ b) $\frac{1 - \sqrt{3 - x}}{4}$

2) Donner les encadrements des nombres suivants :

a) x^2 b) $x \times y$ c) $2x - 3y$

9. Racines carrées

E.296



- 1 Soit a et b deux nombres tels que $a \geq 0$ et $b \geq 0$. Comparer les nombres :

$$\sqrt{a+b} \quad ; \quad \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

- 2 Quelles conditions sur a et b doit-on avoir pour que l'inégalité soit stricte?

10. Division euclidienne

E.2299



Exemple : voici deux divisions euclidiennes de polynômes :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 2x^2 - 16x - 12 & x + 3 \\ \underline{2x^3 + 6x^2} & \\ -4x^2 - 16x & \\ \underline{-4x^2 - 12x} & \\ -4x - 12 & \\ \underline{-4x - 12} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 5x^2 + x - 7 & x - 2 \\ \underline{3x^3 - 6x^2} & \\ x^2 + x & \\ \underline{x^2 - 2x} & \\ 3x - 7 & \\ \underline{3x - 6} & \\ -1 & \end{array}$$

Elles permettent d'obtenir les écritures multiplicatives suivantes :

- $2x^3 + 2x^2 - 16x - 12 = (x + 3)(2x^2 - 4x - 4)$
Cette égalité permet d'obtenir les trois racines de ce polynôme du second degré.

- $3x^3 - 5x^2 + x - 7 = (x - 2)(3x^2 + x + 3) - 1$
Cette égalité permet d'obtenir l'identité suivante appelée "décomposition en élément simple d'une fraction rationnelle" :

$$\frac{3x^3 - 5x^2 + x - 7}{x - 2} = 3x^2 + x + 3 - \frac{1}{x - 2}$$

À l'aide de la division euclidienne de polynômes, répondre aux questions suivantes :

- 1 En remarquant que -3 est une racine de $x^3 + 3x^2 - 2x + 3$, déterminer que ce polynôme n'admet aucune autre racine.

- 2 Montrer que :
- $$\frac{2x^3 - 5x^2 + x - 4}{2x + 1} = x^2 - 3x + 2 - \frac{-6}{2x + 1}$$

11. Exercices non-classés

E.7332



On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par les relations :

$$f(x) = 2 \cdot (x - 1) \cdot \sqrt{x} \quad ; \quad g(x) = 3 \cdot x^2 - 9 \cdot x + 6$$

À l'aide de la calculatrice, conjecturer la position relative sur

$\mathbb{R}_+$ des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentatives respectivement des fonctions f et g .

On utilisera les résultats de la calculatrice arrondie au centième près.