

1. Division euclidienne

E.1718   On donne la division euclidienne de 195 695 par 3 :

$$195695 = 65231 \times 3 + 2$$

- ① En étudiant le produit $(65231 \times 3 + 2) \times 2$, déterminer la division euclidienne de 195695×2 par 3.
- ② Faire de même pour la division euclidienne de 195695×3 par 3.
- ③ Compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7
Division euclidienne de $195695 \times n$							

E.16    On admet qu'on obtient le même reste en divisant un entier par 9 qu'en divisant la somme de ses chiffres par 9.

Par exemple :

$$8753 = 972 \times 9 + 5 \quad \text{le reste est donc } 5.$$

$$8 + 7 + 5 + 3 = 23 = 2 \times 9 + 5 \quad \text{le reste est également } 5.$$

Sur les billets de banque en euros figure un code de 11 chiffres précédé d'une lettre. On remplace la lettre par son rang dans l'alphabet habituel comportant 26 chiffres. On obtient ainsi un entier à 12 ou 13 chiffres et on cherche le reste de la division de ce nombre par 9. Ce reste est le même pour tous les billets authentiques et il vaut 8. Exemple :

20	
	s0021291386
	s0021291386
20	euro 20

Code: s00 212 913 862
Rang dans l'alphabet de la lettre s : 19
Nombre obtenu: 1 900 212 913 862
Reste pour ce billet: 8

- ① Le code u01 308 937 097 figure sur un billet de banque.
 - a) Donner l'entier à 13 chiffres correspondant à ce code.
 - b) Calculer le reste de la division par 9 de la somme des 13 chiffres de cet entier.
 - c) Que peut-on dire de ce billet?
- ② Sur un billet authentique figure le code s02 166 448 10x, x pour le dernier chiffre illisible. Montrer que $x+42$ est congru à 8 modulo 9. En déduire x .
- ③ Sur un autre billet authentique la partie du code formé par les 11 chiffres est 16 122 340 242, mais la lettre qui les précède est effacée. On appelle n le rang dans l'alphabet de la lettre effacée.
 - a) Déterminer les valeurs possibles de n .
 - b) Quelles sont les possibilités pour la lettre effacée?

2. Pgcd avec l'algorithme euclidien

E.13   Pour rendre irréductible la fraction $\frac{6452}{3241}$, nous allons calculer le PGCD des entiers 6452 et 3241?

Dividende	Diviseur	Reste
6452	3241	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...

$$6452 = \dots \times 3241 + \dots$$

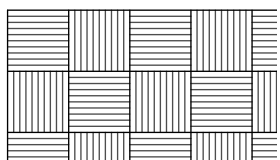
$$\dots = \dots \times \dots + \dots$$

$$\dots = \dots \times \dots + \dots$$

$$\dots = \dots \times \dots + \dots$$

E.14    Dans une maison nouvellement construite, on veut carrelé les sols de certaines pièces.

- ① Le sol de la salle à manger est un rectangle de longueur $4,54\text{ m}$ et de largeur $3,75\text{ m}$. On veut carrelé cette pièce avec des carreaux carrés de 33 cm de côté.



On commence la pose par un “coin” de la pièce comme le suggère la figure ci-contre. Calculer le nombre de carreaux non découpé qui auront été posés.

- ② Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur $4,55\text{ m}$ et de largeur $3,85\text{ m}$. On veut carrelé cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe.

- a) Donner la liste des diviseurs de 455 puis la liste des diviseurs de 385.
b) Donner la liste des diviseurs communs à 455 et 385.
c) Quel est alors le plus grand côté possible des dalles carrées à utiliser pour carrelé cette cuisine?

- ③ On dispose de dalles rectangulaires de longueur 24 cm et de largeur 15 cm .

- a) Donner la liste des multiples de 24 inférieurs à 400, puis la liste des multiples de 15 inférieurs à 400.
b) Donner la liste des multiples communs à 24 et 15, inférieurs à 400.
c) Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe?

E.3328  

- ① À l'aide de l'algorithme d'Euclide, compléter le tableau ci-dessous afin de déterminer le PGCD des nombres 240 et 36 :

Dividende	Diviseur	Reste
240	36	...
...	...	...
...	...	...

$$240 = \dots \times 36 + \dots$$

$$\dots = \dots \times \dots + \dots$$

$$\dots = \dots \times \dots + \dots$$

- ② Rendre la fraction $\frac{240}{36}$ irréductible en effectuant une unique simplification. Par quel entier avez-vous simplifié? Justifier votre démarche.

E.4995  

- ① Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide le PGCD des entiers 410 et 246 :

Dividende	Diviseur	Reste
410	246	...
...	...	...
...	...	...

$$410 = \dots \times 246 + \dots$$

$$\dots = \dots \times \dots + \dots$$

$$\dots = \dots \times \dots + \dots$$

- ② a) Simplifier la fraction $\frac{246}{410}$.

- b) Effectuer les calculs suivants :
 $\frac{246}{410} - \frac{8}{5}$; $\frac{1}{246} - \frac{1}{410}$

E.3329  

- ① Calculer le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) de 496 et de 806.

- ② Écrire $\frac{496}{806}$ sous la forme d'une fraction irréductible.

- ③ Calculer $\frac{496}{806} - \frac{3}{26}$
(on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible)

E.3749  

- Déterminer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, le PGCD des entiers a et b :

a) $a = 354$; $b = 20$

b) $a = 1\,456$; $b = 256$

c) $a = 17$; $b = 3941$

d) $a = 256\,419$; $b = 3\,866$

E.6077  

- On considère l'équation (E) :
 $44 \cdot x + 35 \cdot y = 2$ $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$

- ① a) À l'aide de l'algorithme d'Euclide, montrer que les entiers 44 et 35 sont premiers entre eux.

- b) Déterminer un couple $(x_0 ; y_0)$ vérifiant la relation :
 $44 \cdot x_0 + 35 \cdot y_0 = 1$

- ② En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

3. Entiers, PGCD, PPCM

E.259  

- ① Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers naturels suivants :

a) 25×72

b) 54×12

c) 32×84

d) 100×98

- ② Déduire de la question ①, déterminer :

a) Le PGCD du couple $(25 \times 72 ; 54 \times 12)$;

b) Le PPCM du couple $(32 \times 84 ; 100 \times 98)$ d'entiers na-

turels.

- ③ Utiliser un arbre de diviseurs pour déterminer l'ensemble des diviseurs de l'entier 315.

E.277  

- ① Déterminer les décompositions en produit de facteurs premiers des entiers suivants :

a) 36×54

b) 125×134

c) 280×24

- ② En déduire le PGCD et le PPCM du couple $(6720 ; 16750)$ d'entiers naturels.

4. Développement illimité

E.1822    On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0=2$ et de raison 3.

- 1
 - a Déterminer les termes u_1, u_2, u_3 et u_4 .
 - b Donner l'écriture en base 7 de u_2 .
 - c Montrer que l'écriture en base 7 est $\overline{105}^7$.
 - d Pour obtenir l'écriture en base 7 de u_4 , un élève a effectué la multiplication ci-dessous. Dire s'il a ou non raison et expliquer pourquoi.

$$\begin{array}{r} 105 \\ \times 3 \\ \hline 315 \end{array}$$

- 2
 - a Montrer que: $u_5=486$.
 - b On considère la fonction f , extrait d'un algorithme, et prenant pour argument a un entier naturel:

```

Fonction f(a)
  L ← liste vide
  x ← a
  Tant que x > 0
    r ← reste de la division
      euclidienne de x par 7
    Ajouter r en tête de la liste L
    x ← q
  Fin Tant
  Renvoyer L
    
```

Compléter le tableau ci-dessous afin d'y inscrire les différentes valeurs prises par les variables de la fonction

f lors d'un appel à la fonction f à l'aide du paramètre $a=486$:

	r	q	L	x
Initialisation			vide	486
Fin étape 1				
Fin étape 2				
...				
...				

Expliquer le lien entre les éléments de la liste L et l'écriture de u_5 en base 7.

- 3 On a divisé le terme u_{10} de la suite (u_n) par un certain entier. On obtient le quotient Q dont l'écriture décimale est $Q=14,727\ 272\ 727\ 272\ 72\dots$ écriture dans laquelle les chiffres 7 et 2 se répètent à l'infini.

On note (v_n) la suite géométrique de premier terme 0,72 et de raison 0,01.

- a Calculer $v_0+v_1+v_2$
- b On pose $S_n=v_0+v_1+v_2+\dots+c_n$ où n est un entier naturel non nul.
- c Calculer S_n . En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
- d En déduire une écriture de $0,727\ 272\dots$ où les chiffres 7 et 2 se répètent à l'infini sous la forme du quotient de deux entiers. Quel est le nombre par lequel on a divisé u_{10} ?

5. Théorème de Bezout et algorithme d'Euclide

E.3751   Pour chaque équation, déterminer un couple de solution d'entiers $(u; v)$:

a $354 \cdot u + 49 \cdot v = 1$ b $34 \cdot u + 57 \cdot v = 1$

E.3753  

- 1 Déterminer un couple $(x; y)$ d'entiers solutions de l'équation: $56 \cdot x + 45 \cdot y = 1$
- 2 En déduire un couple $(x'; y')$ d'entiers relatifs vérifiant l'égalité: $56 \cdot x' + 45 \cdot y' = 3$

6. Exercices non-classés

E.29  

- 1 Sans la calculatrice, effectuer la division euclidienne de 372 par 15.
- 2 Avec la calculatrice, déterminer la division euclidienne de 37 852 par 23.
- 3
 - a $2456 = 17 \times 143 + 25$
Déduire la division euclidienne de 2 456 par 17.
 - b $\frac{32\ 247}{143} = 225 + \frac{72}{143}$
Déduire la division euclidienne de 32 247 par 143.
 - c $\frac{516}{43} = 12$
Déduire la division euclidienne de 516 par 43.

d $\frac{674}{24} = 28 + \frac{1}{12}$
Déduire la division euclidienne de 674 par 24.

e $\frac{5460}{63} = 86 + \frac{2}{3}$
Déduire la division euclidienne de 5 460 par 63.

E.336



On veut essayer de déterminer le signe des expressions suivantes :

$$2y \quad ; \quad x+y \quad ; \quad x-y \quad ; \quad x(2y-1) \quad ; \quad -x+y$$

Dans les cas suivants :

- $x > 0$ et $y > 0$:

	Positif	Négatif	On ne peut conclure
$2y$			
$x+y$			
$x-y$			
$x(2y-1)$			
$-x+y$			

- $x > 0$ et $y < 0$:

	Positif	Négatif	On ne peut conclure
$2y$			
$x+y$			
$x-y$			
$x(2y-1)$			
$-x+y$			

E.5302



Le but de cet exercice est de démontrer par l'absurde qu'il existe une infinité d'entiers premiers de la forme $4n-1$, où n est un élément de $\mathbb{N}^*$ (*ensemble des entiers naturels non nuls*).

- 1 Soit E l'ensemble des entiers premiers de la forme $4n-1$ où n est un élément de $\mathbb{N}^*$.
Montrer que E a au moins deux éléments.
- 2 On suppose E fini. Soit P le produit de tous les éléments de E et $X=4P-1$.
 - a Trouver un minorant de X .
 - b Montrer que X n'est pas divisible par 2, et en déduire que tout facteur premier de X est soit de la forme $4n+1$, soit de la forme $4n-1$ où n est un élément de $\mathbb{N}^*$.
 - c Montrer que X possède au moins un facteur premier de la forme $4n-1$ où n est un élément de $\mathbb{N}^*$.
- 3 En considérant un facteur premier p de X de la forme $4n-1$, la définition de P et la relation $X=4P-1$, achever la démonstration par l'absurde.