

1. Introduction de composée

E.2197   Soit f la fonction définie dont l'image de x est définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

- ① Établir l'égalité suivante : $\frac{x-1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}$

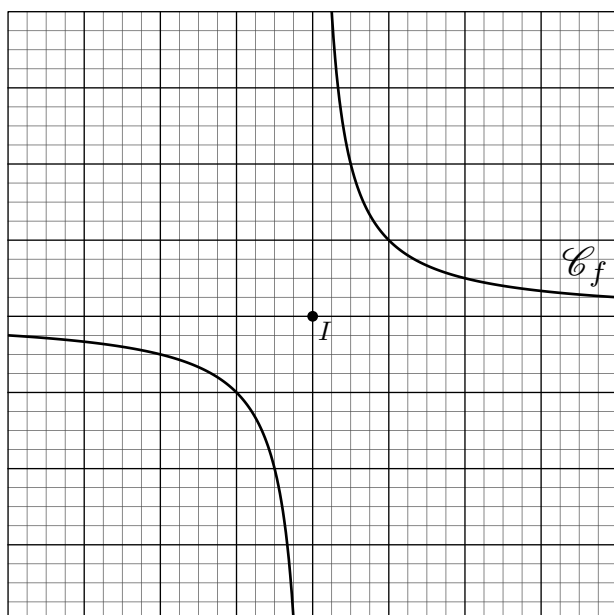
On note g la fonction inverse. À la question précédente, nous venons d'établir que :

$$f(x) = g(x-2) + 1$$

- ② Par quelle transformation du plan, obtient-on la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f à partir de l'hyperbole $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction inverse ?

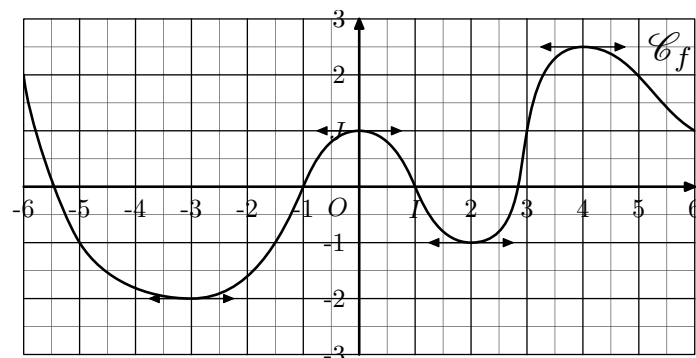
La figure ci-dessous représente l'hyperbole obtenue par la fonction inverse et I son centre de symétrie.

- ③ Placer correctement le repère pour que cette courbe soit la représentation de la fonction f .

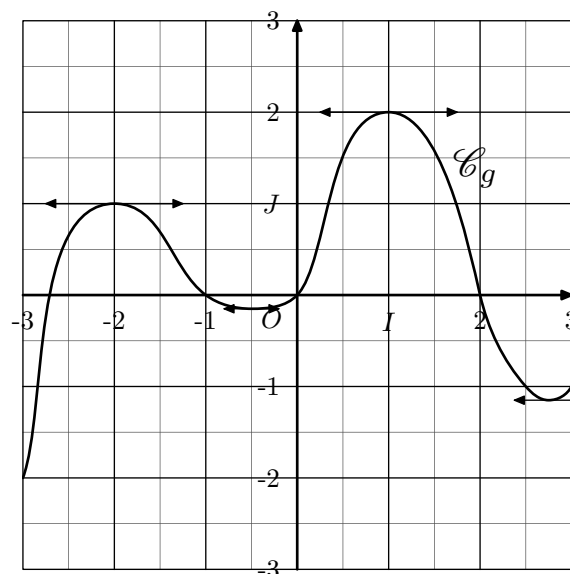


E.2215   On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.

- ① Soit f une fonction définie sur $[-6; 6]$ dont voici la courbe représentative :



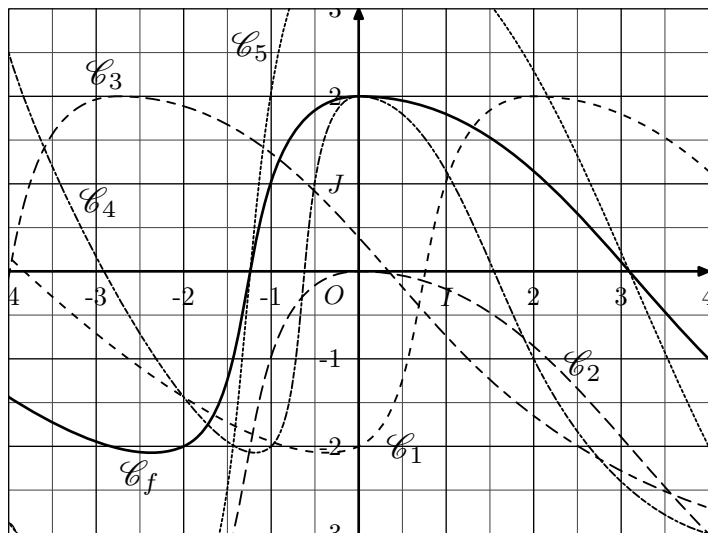
- a) Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre -1 .
 b) Déterminer les images des intervalles suivants :
 $[-6; -1]$; $]3; 6]$; $[-3; 2[$
 $] -5; -3[\cup]0; 1[$
 c) Déterminer les antécédents de tous les nombres formant l'intervalle $] -2; -1[$
- ② On considère également la fonction g définie sur $[-3; 3]$ dont voici la représentation graphique :



- a) Déterminer les images des nombres suivants par la fonction $g \circ f$:
 -3 ; 4
 b) Déterminer l'image de l'intervalle $[0; 4[$ par la fonction $g \circ f$.

2. Composée de fonctions

E.1159   On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée dans le repère $(O; I; J)$ ci-dessous :



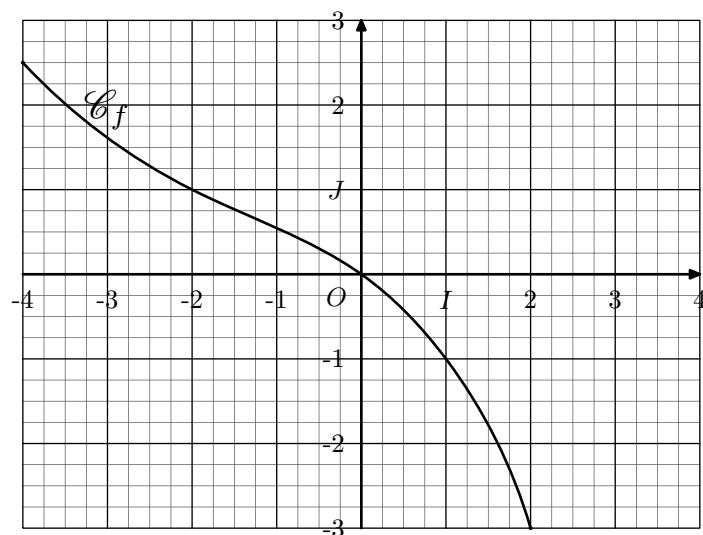
Dans ce repère, sont également données les courbes représentatives associées à la fonction f dont voici les expressions algébriques :

$$g : x \mapsto f(x+2) \quad ; \quad h : x \mapsto f(2 \cdot x) \quad ; \quad j : x \mapsto f(x-2)$$

$$k : x \mapsto 2 \cdot f(x) \quad ; \quad \ell : x \mapsto f(x) - 2$$

Associer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative.

E.2158 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-4; 2]$ dont la représentation est donnée dans le repère $(O; I; J)$ ci-dessous :



On définit la fonction g par la relation :

$$g : x \mapsto f(x-2)$$

- 1 Pour quelle valeur de x , êtes-vous capable de donner la valeur de $g(x)$?
Quel est l'ensemble de définition de la fonction g ?

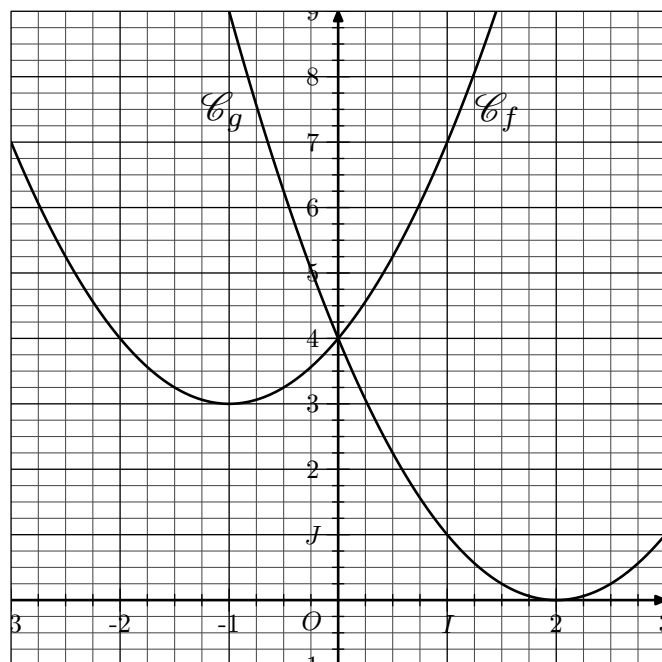
- 2 Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-4	-2	0	1	2	3	4
$f(x)$						$\times$	$\times$
$g(x)$	$\times$						

- 3 Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction g .

- 4 Que pouvez-vous dire des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$?

E.2702 On considère les deux repères $(O; I; J)$ dans lesquels ont été tracées des courbes représentatives de polynômes de second degré :



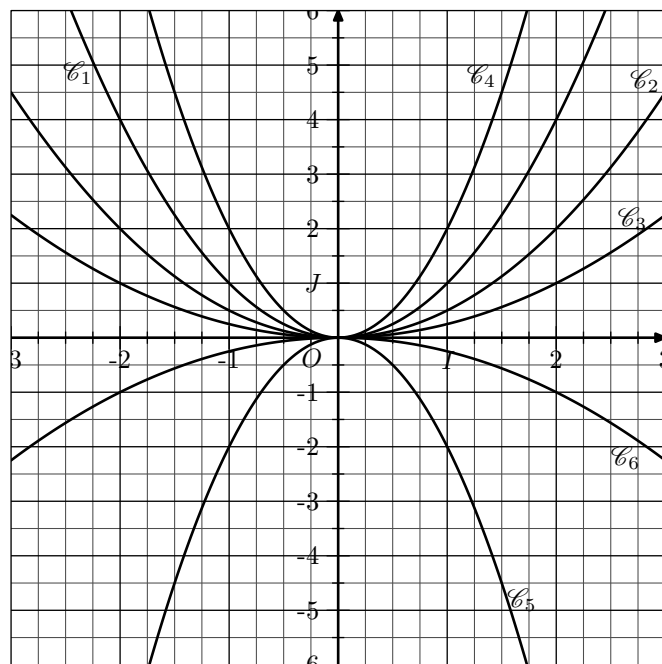
- 1 La courbe $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto x^2 + 2x + 4$$

La fonction g est définie, explicitement par la fonction f , par la relation suivante :

$$g(x) = f(x + \alpha) + \beta \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}.$$

- a Déterminer, à l'aide des représentations de ces deux fonctions, les valeurs des nombres réels α et β .
b Dédire la forme développée réduite de l'expression de $f(x)$.



- 2 Les courbes $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_6$ sont les représentations de fonctions définies par la relation :

$$x \mapsto \alpha \cdot x^2 \quad \text{où } \alpha \text{ est un nombre réel.}$$

Déterminer pour chaque fonction la valeur de α .

3. Composé et expressions

E.2154   Dans chacune des questions suivantes, donner l'expression algébrique de $(f \circ g)(x)$ en fonction de x :

- a) $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = 2 - x$
- b) $f(x) = x^2$ et $g(x) = x - 4$
- c) $f(x) = x - 4$ et $g(x) = x^2$
- d) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 3x + 2$
- e) $f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$
- f) $f(x) = -2x + 1$ et $g(x) = 2x + 1$

E.2166   On considère les trois fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \mapsto -\frac{1}{2}x + 1 \quad ; \quad g : x \mapsto x^2 \quad ; \quad h : x \mapsto 2x - 1$$

On définit une nouvelle fonction F appelée "la composée des fonctions f , g et h " :

L'image de x a pour valeur la valeur des images successives de x par les fonctions f , g et h .

Le diagramme suivant présente cette situation pour le cas particulier $x=6$:

$$F : 6 \xrightarrow{f} -2 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{h} 7$$

- 1 a) Montrer que $F(4) = 1$.
 - b) Déterminer les images de -4 et de 3 par la fonction F .
 - c) Déterminer l'ensemble des antécédents de 97 par la fonction F .
- 2 a) Parmi les trois propositions, donner l'expression de

$F(x)$:

$$A = -\frac{1}{2} \cdot (2x - 1)^2 + 1 \quad ; \quad B = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)^2 - 1$$

$$C = \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) + x^2 + (2x - 1)$$

- b) Donner l'expression développée et réduite de la fonction F
- 3) Pour chaque question, donner une écriture algébrique de la fonction F obtenue par composition des fonctions f , g et h (aucune factorisation ou développement n'est demandé).

$$a) f : x \mapsto x^2 \quad ; \quad g : x \mapsto 3x + 2 \quad ; \quad h : x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$b) f : x \mapsto \frac{1}{x} \quad ; \quad g : x \mapsto \sqrt{x} \quad ; \quad h : x \mapsto 3x + 1$$

- 4) On considère la fonction F obtenue par composition des fonctions f , g , h définies ci-dessous :

$$f : x \mapsto 2x \quad ; \quad g : x \mapsto 3x + 2 \quad ; \quad h : x \mapsto \sqrt{x}$$

- a) Effectuer le calcul suivant : $h(g(f(2)))$
- b) Que représente ce calcul vis-à-vis de la fonction F ?
- c) Donner l'écriture algébrique de la fonction F

La composée de f , g , h se note $h \circ g \circ f$

E.4652   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = (1 - \sqrt{x})^2$$

- 1) Pour $x \in [0; 1]$, établir l'égalité suivante : $(f \circ f)(x) = x$
- 2) Pour $x \in [1; +\infty[$, déterminer une expression simplifiée de la fonction $f \circ f$.

4. Composé et tableau de variation

E.3308   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation suivante :

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 6$$

- 1 a) Déterminer la forme factorisée de l'expression $f(x)$.
- b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
(On indiquera également les deux racines de la fonction f)

- 2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	8	$+\infty$
Variation de g	-1	1	-3	$+\infty$

- a) Faire une conjecture sur la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} (g \circ f)(x) \quad ; \quad \lim_{x \mapsto -\infty} (f \circ g)(x)$$

- b) Justifier que la fonction $f \circ g$ est décroissante sur l'intervalle $] -\infty; 0[$.
- c) Justifier et préciser la monotonie de la composée $g \circ f$ sur chacun des deux intervalles suivants : $] -\infty; -3[$; $[-3; 1]$

E.2300   On considère une fonction f définie sur $[-5; 4]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-5	-2	1	4
Variation de f		1	-3	3

Déterminer le tableau de variations des fonctions associées à f présentées ci-dessous :

- (a) $g : x \mapsto f(x+2)$ (b) $h : x \mapsto -2 \cdot f(x)$
 (c) $j : x \mapsto f(x-2) + 1$

E.1160   On considère les fonctions suivantes :

$$g : x \mapsto 1 - 2x \quad ; \quad h : x \mapsto \sqrt{x} \quad ; \quad j : x \mapsto x^2$$

$$k : x \mapsto \frac{1}{x} \quad ; \quad \ell : x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$$

1 Pour chaque question, donner l'écriture simplifiée de $f(x)$:

- (a) $f = k \circ g \circ k$ (b) $f = g \circ j \circ k$
 (c) $f = j \circ h$ (d) $f = l \circ j$

2 On considère la fonction m définie par la chaîne de composition suivante :

$$m : x \xrightarrow{\ell} \ell(x) \xrightarrow{h} h(\ell(x))$$

- (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction m .
 (b) En déduire le tableau de variations de la fonction m . Justifier votre démarche.

E.2162   On considère la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$, dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$f(x) = -3(2x - 1)^2 + 1$$

On note g , la fonction affine définie par :

$$g : x \mapsto 2x - 1.$$

- 1 Déterminer l'intervalle I tel que : $g(I) = \mathbb{R}_+$
 2 Justifier que la fonction f est monotone sur I .
 3 Préciser le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles I et $\mathbb{R} \setminus I$.

E.2164   Donner le sens de variation des fonctions ci-dessous sur l'intervalle précisé. Aucune justification n'est demandée :

- (a) $f : x \mapsto \sqrt{2-3x}$ sur $] -\infty ; \frac{2}{3}]$
 (b) $g : x \mapsto 2(3-x)^2 + 1$ sur $[3 ; +\infty[$
 (c) $h : x \mapsto \frac{2}{(x+1)^2} + 1$ sur $] -\infty ; -1[$
 (d) $j : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ sur $\mathbb{R}_-$
 (e) $k : x \mapsto -3\sqrt{x} - 1$ sur $\mathbb{R}_+$
 (f) $\ell : x \mapsto -2\sqrt{3-x} + 1$ sur $] -\infty ; 3]$

E.2195  

1 On considère les deux fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto 3x - 2 \quad ; \quad g : x \mapsto 5 - x$$

Déterminer les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$.

2 Soit h la fonction définie par :

$$h : x \mapsto \frac{2}{(x+1)^2} - 1$$

- (a) Écrire la chaîne de composée de fonctions de référence caractérisant h .
 (b) Justifier et préciser la monotonie de la fonction h sur $] -\infty ; -1[$.

3 Sans aucune justification, donner le sens de variation des fonctions suivantes sur l'intervalle précisé :

- (a) $j : x \mapsto -3(x+1)^2$ sur $[-1 ; +\infty[$
 (b) $k : x \mapsto x + x^2$ sur $\mathbb{R}_+$
 (c) $\ell : x \mapsto -2\sqrt{x^2 - 1} + 2$ sur $] -\infty ; -1]$
 (d) $m : x \mapsto \sqrt{3x - 1} - (x - 2)^2$ sur $[\frac{1}{3} ; 2]$

E.2217   On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$f(x) = \sqrt{(x+1)(2-x)}$$

1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

2 (a) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$f(x) = \sqrt{-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}}$$

- (b) Déterminer la chaîne de composition de fonction de référence caractérisant la fonction f .
 (c) Justifier la monotonie de la fonction f sur les deux intervalles :

$$I = \mathcal{D}_f \cap] -\infty ; \frac{1}{2}] \quad \text{et} \quad J = \mathcal{D}_f \cap [\frac{1}{2} ; +\infty[.$$

(d) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

5. Composée de fonctions

E.421   La plupart des fonctions utilisées sont des fonctions composées à partir des fonctions de référence. La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ peut être vue comme la composée de fonctions de référence de la manière suivante :

$$x \xrightarrow{f} x^2 \xrightarrow{g} x^2 + 1 \xrightarrow{h} \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\text{où} \begin{cases} f : x \mapsto x^2 \\ g : x \mapsto x + 1 \\ h : x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

1 Décomposer les fonctions suivantes à l'aide des fonctions de références :

a $x \mapsto 3x^2 - 1$ b $x \mapsto \frac{2}{3 + x^2}$

c $x \mapsto \sqrt{\frac{2}{-2x + 3}}$

2 On définit a et b deux éléments de l'intervalle $[1; 5]$ tel que $a < b$. Pour chacune des fonctions de la question 1, comparer les images des nombres a et b .

3 En analysant vos résultats de la question 1, compléter les deux phrases suivantes :

- La composée de deux fonctions croissantes est
- La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est

4 Que peut-on dire du sens de variation de la somme de deux fonctions croissantes? de deux fonctions décroissantes? d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante?

Justifier par une démonstration ou un contre-exemple chacune de vos affirmations.

E.1943   On considère les trois fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto -\frac{1}{2}x + 1 \quad ; \quad g : x \mapsto x^2 \quad ; \quad h : x \mapsto 2x - 1$$

On définit une nouvelle fonction F appelée "la composée des fonctions f , g et h " :

L'image de x a pour valeur la valeur des images successives de x par les fonctions f , g et h .

Le diagramme suivant représente cette situation pour le cas particulier $x=6$:

$$F : \quad 6 \xrightarrow{f} -2 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{h} 7$$

1 a Montrer que $F(4)=1$.

b Déterminer les images de -4 et 3 par la fonction F .

c Déterminer l'antécédent de 97 par la fonction F .

2 a Parmi les trois expressions suivantes, quel est celle qui représente $F(x)$:

$$A = -\frac{1}{2}(2x - 1)^2 + 1 \quad ; \quad B = 2\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)^2 - 1$$

$$C = \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) + x^2 + (2x - 1)$$

b Donner l'écriture développée et réduite de la fonction F

3 Pour chaque question, donner une écriture algébrique de la fonction F obtenue par composition des fonctions f , g et h (aucune factorisation ou développement n'est demandé).

a $f : x \mapsto x^2 \quad ; \quad g : x \mapsto 3x + 2 \quad ; \quad h : x \mapsto \frac{1}{x}$

b $f : x \mapsto \frac{1}{x} \quad ; \quad g : x \mapsto \sqrt{x} \quad ; \quad h : x \mapsto 3x + 1$

4 On considère la fonction F obtenue par composition des fonctions f , g , h définies ci-dessous :

$$f : x \mapsto 2x \quad ; \quad g : x \mapsto 3x + 2 \quad ; \quad h : x \mapsto \sqrt{x}$$

a Effectuer le calcul suivant : $h(g(f(2)))$

b Que représente ce calcul vis-à-vis de la fonction F ?

c Donner l'écriture algébrique de la fonction F

E.1944   On considère la fonction F définie comme la composée des trois fonctions de référence suivante :

$$f : x \mapsto 2x - 2 \quad ; \quad g : x \mapsto x^2 \quad ; \quad h : x \mapsto -x + 1$$

1 a Déterminer le sens de variation des fonctions f et h sur $\mathbb{R}$.

b Donner les intervalles sur lesquels la fonction g est monotone. Préciser.

On souhaite étudier le sens de variation de la fonction F uniquement sur l'intervalle $]-\infty; 1]$.

Pour cela, on considère dans la suite de l'exercice deux nombres réels a et b appartenant à l'intervalle $]-\infty; 1]$ vérifiant la relation :

$$a < b :$$

2 Justifier l'inégalité suivante : $f(a) < f(b)$

3 a Quel est le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}_-$?

b Quel est le signe des deux nombres $2a-2$ et $2b-2$?

c En déduire la comparaison de : $(2a-2)^2$ et $(2b-2)^2$

4 a En utilisant le sens de variation de la fonction h , déterminer le sens de comparaison des nombres suivants :

$$-(2a-2)^2+1 \quad \text{et} \quad -(2b-2)^2+1.$$

5 En déduire le sens de variation de la fonction F sur $]-\infty; 1]$

E.1964   Soit f une fonction dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

1 Donner l'ensemble de définition de la fonction f .

2 Décomposer cette fonction à l'aide de trois fonctions de référence.

3 Prouver la décroissance de la fonction f sur D_f .

E.1966   On considère la fonction f dont les images sont définies de manière algébrique par :

$$f : x \mapsto \frac{-2}{x^2 - 1}$$

1 Donner l'ensemble D_f de définition de la fonction f .

2 Décomposer la fonction f à l'aide de quatre fonctions de référence.

3 a Sur $]-\infty; 0] \cap D_f$, établir la décroissance de la fonction f

b Prouver la croissance de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[\cap D_f$

4 Donner le tableau de variations de la fonction f .

E.2124   On considère la fonction F obtenue par composée des fonctions f, g, h suivante :

$$f : x \mapsto 2x + 4 \quad ; \quad g : x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$h : x \mapsto 1 - x$$

- 1 **a** Donner, parmi les expressions algébriques ci-dessous, celle qui représente la fonction F :

$$A = 1 - \left(2 \cdot \frac{1}{x} + 4\right) \quad ; \quad B = (2x + 4) + \frac{1}{x} + (1 - x) \quad ; \quad C = 1 - \frac{1}{2x + 4}$$

b Justifier que : $f(x) = \frac{2x + 3}{2x + 1}$

- 2 **a** Donner le sens de variation des fonctions f et h sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

b Donner les intervalles sur lesquels la fonction g est monotone. Préciser.

- 3 Pour étudier le sens de variation de la fonction F sur l'intervalle $] -\infty ; -2[$, nous considérons deux nombres a et b appartenant à $] -\infty ; -2[$ et vérifiant :

$$a < b$$

a Comparer $f(a)$ et $f(b)$.

b Quel est le signe de $2a + 4$ et $2b + 4$?

c Donner le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}_-$.

d En déduire le sens de comparaison de $\frac{1}{2a + 4}$ et $\frac{1}{2b + 4}$.

e Comparer les deux nombres suivants :

$$1 - \frac{1}{2a + 4} \quad ; \quad 1 - \frac{1}{2b + 4}.$$

f En déduire le sens de comparaison de $F(a)$ et $F(b)$.

g Donner le sens de variation de la fonction F sur $] -\infty ; -2[$.

E.1761  

- 1 Après avoir observé le sens de variation sur votre calculatrice de chacune des fonctions suivantes, appuyez votre

observation au travers d'une preuve algébrique.

a Soit f la fonction définie par la formule :
 $f(x) = x + 3 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$

b Soit g la fonction définie par la formule :
 $g(x) = -\frac{1}{4}x - 1 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$

c Soit j la fonction définie par la formule :
 $j(x) = 3(1 - x)^2 + 2 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$

d Soit k la fonction définie par la formule :
 $k(x) = \sqrt{x} \quad \text{sur l'intervalle } \mathbb{R}_+.$

e Soit l la fonction définie par la formule :
 $l(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}^*$

2 **a** Établir l'identité : $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

b On considère la fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$m(x) = x^2 + 2x + 1.$$

Établir la stricte décroissance de la fonction m sur $] -\infty ; -1[$.

E.1758  

- 1 Étudier le sens de variation des fonctions suivantes :

• f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(x) = 2x - 1$

• g définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $g(x) = -2x - 1$

• h définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $h(x) = x^2$

• k définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $k(x) = (x - 1)^2 - 2$

• l définie sur $\mathbb{R}^*$ par la relation : $l(x) = \frac{1}{x}$

• m définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par la relation : $m(x) = \frac{1}{(x - 3)^2}$

2 **a** Établir la relation : $x^2 - 2x - 1 = (x - 1)^2 - 2$

b Établir le sens de variation de la fonction n définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $n(x) = x^2 - 2x - 1$

6. Opérations sur les fonctions

E.2148  

- 1 Pour chacune des questions, donner sans justification le sens de variation des fonctions f, g et $f + g$:

a $f : x \mapsto 2x + 1 \quad ; \quad g : x \mapsto 3x + 1$

b $f : x \mapsto 3x + 1 \quad ; \quad g : x \mapsto 3 - 2x$

c $f : x \mapsto -3x + 1 \quad ; \quad g : x \mapsto x - 1$

- 2 On considère les deux fonctions f et g définies par :

$$f : x \mapsto 2x - 2 \quad ; \quad g : x \mapsto 3 - x$$

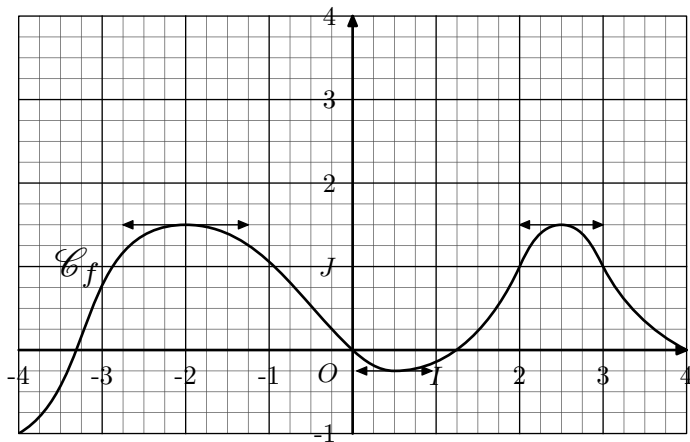
a Développer l'expression $f(x) \cdot g(x)$.

b Dresser le tableau de variations de la fonction $f \cdot g$.

E.2157



Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ dont la représentation est donnée dans le repère $(O; I; J)$ ci-dessous :



On considère le tableau ci-dessous :

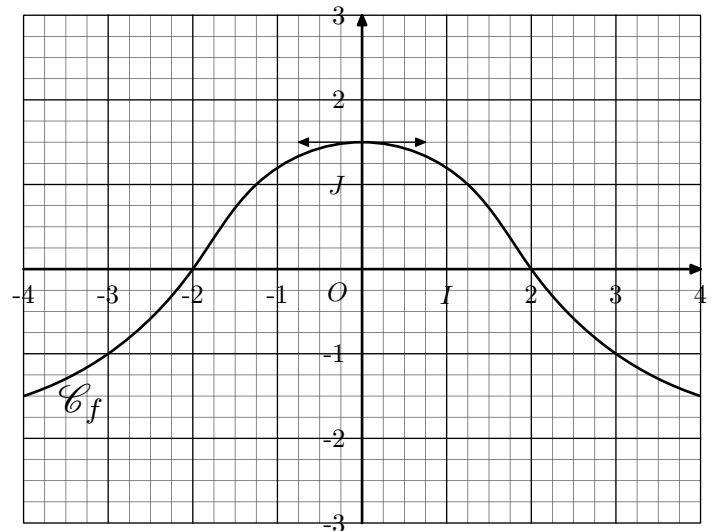
x	-4	-2	0	0,5	2	2,5	3	4
$f(x)$								
$g(x)$								

- 1 Compléter la ligne des valeurs prises par la fonction f .
- 2 Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ dont l'image d'un nombre $x \in [-4; 4]$ est donnée par la relation :
 $g(x) = f(x) + 2$
 - a Compléter la troisième ligne du tableau de valeurs ci-dessus.
 - b Dans le repère $(O; I; J)$, tracer la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction g .
- 3 Quelle relation existe entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$?

E.2159



Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ dont la représentation est donnée ci-dessous dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé :



Soit g et h deux fonctions définies sur $[-4; 4]$ par :

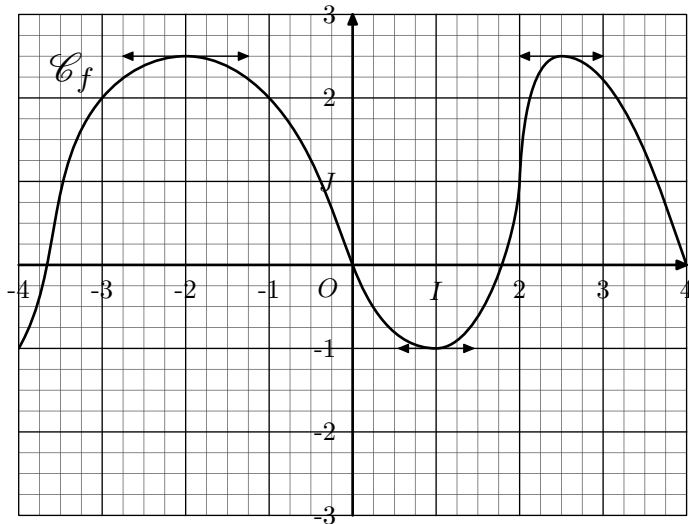
$$g(x) = 2 \cdot f(x) \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x)$$

- 1 Compléter le tableau suivant de valeurs :

x	-4	-3	-2	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	2	3	4
$f(x)$									
$g(x)$									
$h(x)$									

- 2 Tracer les courbes représentatives $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ respectives des fonctions g et h dans le repère ci-dessus.

E.2160   Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ dont la représentation est donnée dans le repère $(O; I; J)$ ci-dessous :



On considère la fonction g définie sur $[-4; 4]$ par la relation :
 $g(x) = -f(x)$

1 Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	2,5	4
$f(x)$									
$g(x)$									

2 Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction g .

3 Quelle relation existe-t-il entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$?

E.2695   On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \mapsto x + 2 \quad ; \quad g : x \mapsto (3x - 2)(2x + 4)$$

1 Déterminer la forme simplifiée des expressions suivantes :

a $(f+g)(x)$ b $(f \times g)(x)$ c $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

2 Donner l'ensemble de définition de la fonction $\frac{f}{g}$.

E.408   On considère la fonction f définie sur $]-\infty; 4]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	-2	1	4
Variation de f		-2	2	-1

On considère les fonctions g , h et j définies par :
 $g(x) = f(x) + 2$; $h(x) = 2 \cdot f(x)$; $j(x) = -f(x)$

Dresser les tableaux de variation des fonctions g , h et j .

E.6572   On considère la fonction f admettant le tableau de variations suivant :

x	-2	1	$+\infty$
Variation de f		2	-1

Dresser, sans justification le tableau de variations de la fonction g définie par la relation :

$$g(x) = 3 \cdot f(2 \cdot x)$$

E.7378   On considère la fonction f définie sur $[1; 7]$ dont le tableau de variations est donnée ci-dessous :

x	1	3	7
Variation de f		5	1

1 Sans justification, dresser les tableaux de variations des fonctions g et h définies par :

$$g(x) = 2 \cdot f(x) \quad ; \quad h(x) = f(x) + 2$$

2 On considère la fonction j définie par la relation :
 $j(x) = f(x-2)$

- a Donner l'ensemble de définition de la fonction j .
b Dresser, sans justification, le tableau de variations de la fonction j .

7. Composition : racines

E.4983   On considère la fonction f polynomiale du second degré définie par la relation :

$$f(x) = -x^2 - 2x + 3$$

On construit la fonction g par la relation :

$$g : x \mapsto \sqrt{f(x)}$$

1 Conjecture sur la fonction g :

Après avoir tracé la courbe représentative de la fonction g à l'aide de la calculatrice :

- a Conjecturer l'ensemble de définition de la fonction g .

- b Conjecturer le sens de variation de la fonction g sur les intervalles $[-3; -1]$ et $[-1; 1]$.

2 Étude de la fonction g :

- a Déterminer les zéros de la fonction f , puis compléter le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$+\infty$		
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

- (b) Justifier que la fonction g est définie sur $[-3; 1]$.
(c) Justifier que la fonction g est décroissante sur $[-1; 1]$.

E.4982  

- (1) On considère la fonction f dont l'image de x est donnée par la relation :

$$f(x) = \sqrt{2 \cdot x - x^2}$$

- (a) Dresser le tableau de signes de la fonction suivante :
 $x \mapsto 2x - x^2$
(b) En déduire l'ensemble de définition de la fonction f .
(2) On considère la fonction g définie par :
 $g : x \mapsto \sqrt{x^3 - 3x - 2}$
(a) Développer l'expression : $(x+1)^2 \cdot (x-2)$
(b) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g .

E.5030   On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{\frac{3-2 \cdot x}{2 \cdot x + 3}}$$

- (1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction de la fonction f .
(2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ par la relation :
 $g(x) = \frac{3-2 \cdot x}{2 \cdot x + 3}$
(a) Déterminer les réels a et b réalisant l'identité suivante :
 $g(x) = a + \frac{b}{2 \cdot x + 3}$
(b) Établir le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$.
(3) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

8. Composition : inverses

E.6571   On considère la fonction f définie par l'expression :

$$f(x) = 2 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 4$$

On construit une fonction g définie par l'expression :

$$g(x) = \frac{1}{2 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 4}$$

- (1) Conjecture sur la fonction g :
Après avoir tracé la courbe représentative de la fonction g à l'aide de la calculatrice :
(a) Conjecturer l'ensemble de définition de la fonction g
(b) Conjecturer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $\left]-\infty; 1\right[$.

E.1484  

- (1) On considère les deux fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2} \quad ; \quad g : x \mapsto \sqrt{x^2}$$

- (a) Comparer les ensembles de définition des deux fonctions f et g .
(b) Que peut-on dire de ces deux fonctions sur l'intervalle $[0; +\infty[$?

- (2) On considère les fonctions suivantes :

$$h : x \mapsto \sqrt{x} \quad ; \quad j : x \mapsto \frac{\sqrt{x^3}}{x} \quad ; \quad k : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x}}$$

- (a) Déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.
(b) Établir que ces fonctions sont toutes égales sur un intervalle. Lequel ?

E.8165  

- (1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 6 \cdot x^2 - 11 \cdot x - 10$$

- (a) Déterminer les zéros de la fonction f .
(b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
(On y indiquera ses zéros)

- (2) On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \sqrt{6 \cdot x^2 - 11 \cdot x - 10}$$

- (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g .
(b) Dresser le tableau de variations de la fonction g .

E.3079   On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x^2 - x - 6}}$$

- (1) (a) Factoriser l'expression : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$
(b) Justifier l'égalité suivante : $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{(x-3)(x+2)}}$

- (2) (a) Établir le tableau de signes de l'expression :
 $(x-3)(x+2)$.

- (b) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

- (3) En déduire, sur l'intervalle $]3; +\infty[$, la monotonie de la fonction f .

- (2) Étude de la fonction g :

- (a) Déterminer les zéros de la fonction f , puis compléter le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$+\infty$		
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	0	$\searrow$	$+\infty$

- (b) Justifier que la fonction g n'est pas définie pour $x=1$ et $x=2$.

c Justifier que la fonction g est croissante sur $]-\infty; 1[$.

E.7377 On considère la fonction f définie par l'expression :

$$f(x) = -x^2 - 2x + 3$$

1 Dresser le tableau de variations de la fonction f .
On justifiera la construction de ce tableau et on y insérera les zéros de la fonction f .

2 a On considère la fonction g définie par l'expression :
 $g(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$
Sans justification, dresser le tableau de variations de la fonction g .

b On construit une fonction h définie par l'expression :

$$h(x) = \frac{1}{-x^2 - 2x + 3}$$

Sans justification, dresser le tableau de variations de la fonction h .

E.7303 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par les relations :

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

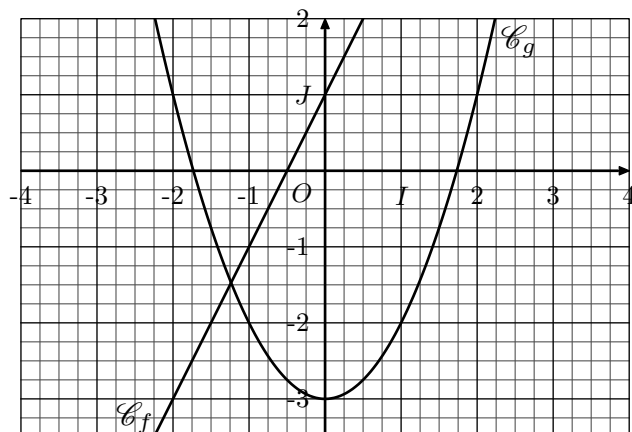
Sans justification, donner le sens de variations des fonctions f et g sur l'intervalle $]-\infty; 2[$.

9. Un peu plus loin - composée de fonctions

E.4977 On considère les deux fonctions f et g définie sur $[-4; 4]$ par les relations :

$$f(x) = 2x + 1 \quad ; \quad g(x) = x^2 - 3$$

On donne les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentatives des fonctions f et g dans le repère $(O; I; J)$ ci-dessous :



1 Par lecture graphique, compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f(x)$					

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$					

2 On considère le programme de calcul suivant :

- Prendre un nombre x ;
- Déterminer l'image de x par la fonction f ;
on note ce nombre x' ;
- Déterminer l'image de x' par la fonction g ;
on note ce nombre $g(f(x))$.

On peut noter ce programme de calcul par la chaîne :

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

a Déterminer les valeurs des expressions suivantes :

$$g(f(-1)) \quad ; \quad g\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

b Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$g(f(x))$					

On vient de créer une nouvelle fonction qui à un nombre x associe l'image $g(f(x))$. Cette fonction s'appelle la fonction composée de f par g et se note $g \circ f$.

- Tracer dans le repère ci-dessus la courbe $\mathcal{C}_{g \circ f}$ représentative de la fonction $g \circ f$.
- Donner l'expression, en fonction de x , de la fonction $g \circ f$.

E.2719



On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ dont les tableaux de variation sont donnés ci-dessous :

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
Variation de f		3	8	3	-2

x	$-\infty$	-2	3	8	$+\infty$
Variation de g	$+\infty$	0	-4	5	$+\infty$

1 Déterminer la valeur des expressions suivantes :

a) $(g \circ f)(1)$ b) $(g \circ f)(5)$ c) $(f \circ g)(8)$

2 a) Justifier que la fonction $g \circ f$ est croissante sur l'intervalle $]-\infty; 1]$.

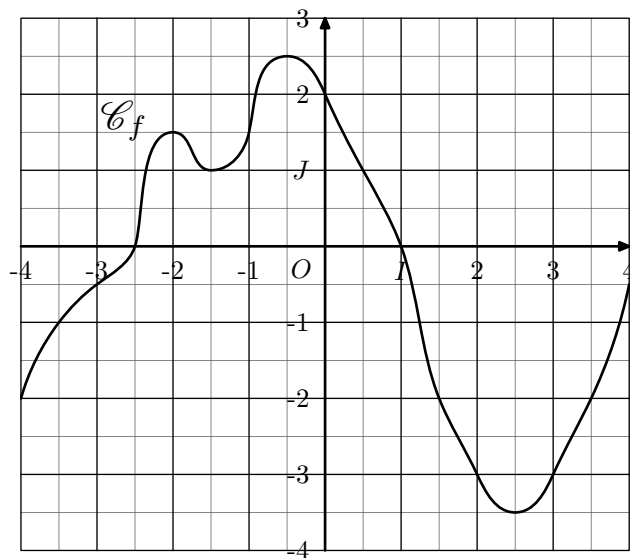
b) Déterminer le sens de variation de la fonction $g \circ f$ sur l'intervalle $[1; 5]$

3 Dresser le tableau de variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction composée $g \circ f$.

E.2234



On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ dont la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative est donnée ci-dessous dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé :



1 Calculer les images suivantes :

a) $(f \circ f)(1)$ b) $(f \circ f)(-2)$ c) $(f \circ f)(3)$

2 On définit la fonction f^n comme la fonction composée n fois de la fonction f par elle-même. Déterminer la valeur des images suivantes :

a) $f^3(1)$

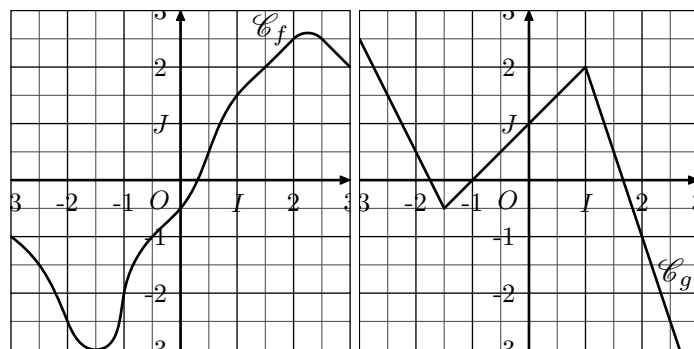
b) $f^3(-3)$

c) $f^4(-1)$

E.2698



On considère deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3; 3]$ dont les courbes, respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, représentatives sont données dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé :



1 Déterminer la valeur des expressions suivantes :

a) $(f \circ g)(-2)$ b) $(f \circ g)(1,5)$ c) $(f \circ g)(2)$

2 Déterminer la valeur des expressions suivantes :

a) $(g \circ f)(-3)$ b) $(g \circ f)(0)$ c) $(g \circ f)(1)$

E.4979



On considère les deux fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto x^2 - 2 \quad ; \quad g: x \mapsto \sqrt{x}$$

1 a) Donner les ensembles de définition des fonctions f et g .

b) Peut-on parler de l'image de 1 par la fonction $g \circ f$? Justifier votre réponse.

2 a) Dresser le tableau de signes de la fonction f .

b) Donner l'ensemble de définition de la fonction $g \circ f$.

E.2327



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donnée ci-dessous :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	-2	3	0

Dresser le tableau de variations des fonctions g, h, j définies ci-dessous :

1) $g(x) = f(x+2)$

2) $h(x) = f(3x)$

3) $j(x) = f(2x+1)$

E.4978



Pour chacun des couples de fonctions ci-dessous, déterminer l'expression de la fonction $g \circ f$:

1) $f: x \mapsto 3x - 5$; $g: x \mapsto x^2$

2) $f: x \mapsto x^2 - 1$; $g: x \mapsto -2x + 4$

3) $f: x \mapsto x^2 + 1$; $g: x \mapsto x^2 + 1$

10. Exercices non-classés

E.409   On considère trois fonctions :

$$f : x \longmapsto 3x - 1 \quad ; \quad g : x \longmapsto x^2$$

$$h : x \longmapsto 2x - 1$$

Chacune de ses fonctions sont des fonctions de référence.

- 1 On considère la fonction composée f par g puis par h . C'est-à-dire que l'image de 2 se calcule par cette fonction composée de la manière suivante :

$$2 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} 25 \xrightarrow{h} 49$$

- a Calculer l'image par cette fonction des nombres -1 , 0 et 1 .
- b Calculer les antécédents de 127 .
- c Donner une écriture algébrique de cette fonction composée.
- 2 Nous allons faire le travail inverse. Voici de nouvelles fonctions, décomposez-les en fonctions de références.

a $k(x) = 3x^2 + 1$ b $\ell(x) = \frac{1}{3x + 1}$

c $m(x) = \sqrt{1 - x^2}$ d $n(x) = \frac{3}{(\sqrt{x} + 5)^2}$

E.2825  

- 1 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction :

$$g : x \mapsto -2 \cdot f(x) + 5$$

- a Si f est croissante, justifier que la fonction g est décroissante.
- b Si f est décroissante, justifier que la fonction g est croissante.
- 2 On considère la fonction h définie par la relation :
 $h(x) = -2x^2 + 5$
 Déduire, de la question précédente, que la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}_-$.

- 3 Justifier chacune des assertions suivantes :

a $j : x \mapsto 5 - \frac{2}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b $k : x \mapsto 2 \cdot (x + 2)^2 - 5$ est croissante sur $[-2; +\infty[$.

E.2849   On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont voici le tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	5	2	$+\infty$

On considère la fonction g dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$g(x) = \frac{2}{f(x) - 1} + 3$$

- 1 Déterminer l'image des nombres -1 et 3 par la fonction g .
- 2 Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty; 3]$.

E.2720   Soit g la fonction définie par la relation :

$$g(x) = \frac{1}{-5x^2 + 3x + 1}$$

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction.
- 2 Justifier que le polynôme $Q = -5x^2 + 3x + 1$ admet le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{3 - \sqrt{29}}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3 + \sqrt{29}}{10}$	$+\infty$
Variation de Q	$-\infty$	0	$\frac{29}{20}$	0	$+\infty$

- 3 Dresser le tableau de variations de la fonction g .
 (On n'indiquera que les sens de variations)

E.5056   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(x + 1)^2 + 2}$$

Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.

E.2717   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ définie par la relation :

$$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{x} + 5$$

- 1 Dresser le tableau de signes et le tableau de variations du polynôme du second degré :

$$P(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

- 2 En remarquant que la fonction f est la composée de la fonction inverse avec ce polynôme du second degré, établir que la fonction est décroissante $\left]0; \frac{4}{3}\right]$

- 3 Dresser le tableau de variations de la fonction f (ne pas chercher à compléter le tableau avec les valeurs des images.)

E.2718   On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 1}$$

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2 Dresser le tableau de variations de la fonction f .