

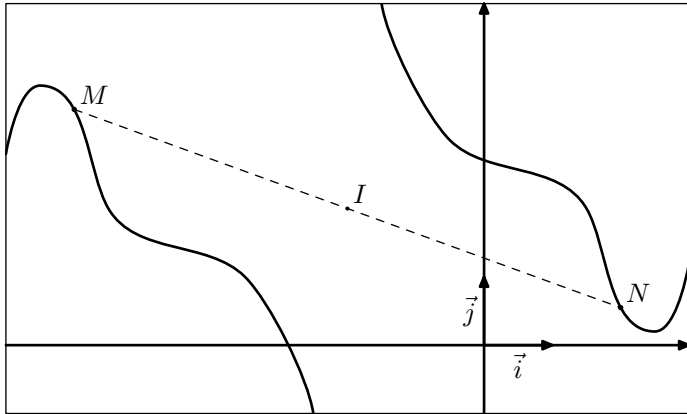
1. Introduction

E.2165 Étude théorique :

- ① On considère une fonction f dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet le point I de coordonnées $(a; b)$ comme centre de symétrie.

Prenons deux points $M(x; y)$ et $N(x'; y')$ de la courbe $\mathcal{C}_f$ symétriques par rapport au point I .

Le graphique ci-dessous illustre cette situation :



On suppose que les points M et N sont tels que :
 $x < a < x'$ (quitte à inverser le rôle de M et N).

- a) En utilisant le fait que le point I est le milieu du segment $[MN]$, exprimer les coordonnées du point I en fonction des coordonnées des points M et N .
- b) On pose $h = x' - a$, en déduire la relation suivante :

$$\frac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = b$$
- ② Effectuons la démarche inverse : nous allons montrer que sous certaines conditions, la courbe d'une fonction admet un centre de symétrie.

Supposons l'existence d'une fonction g et d'un point $I(a; b)$ tels que :

$$\text{Pour tout } h \in \mathbb{R} \text{ tel que } (a+h) \in \mathcal{D}_g \\ \text{alors } \begin{cases} (a-h) \in \mathcal{D}_g \\ \frac{g(a+h) + g(a-h)}{2} = b \end{cases}$$

Dans le reste de l'exercice, supposons que h est un nombre réel tel que $(a+h) \in \mathcal{D}_g$. Notons N le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse $(a+h)$:

- a) Quelle propriété de la fonction g permet d'affirmer que

la courbe $\mathcal{C}_g$ admet un point d'abscisse $(a-h)$?

On notera M le point de la courbe de $\mathcal{C}_g$ ayant pour abscisse $(a-h)$.

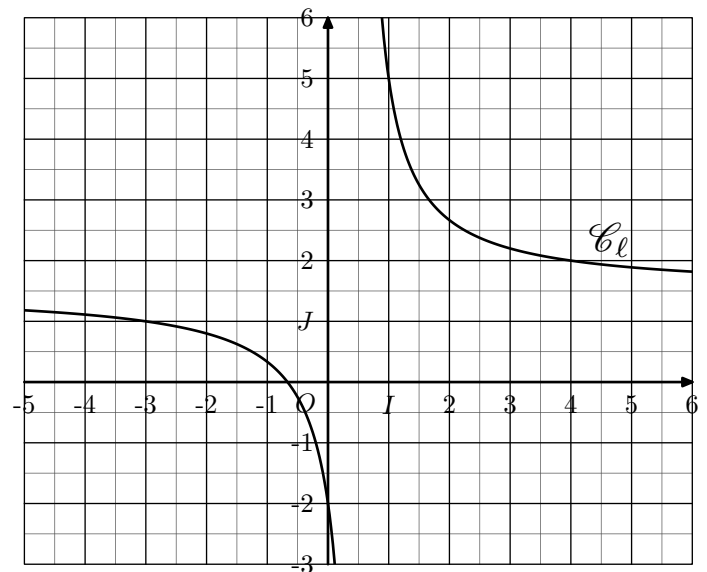
- b) Notons M ce point ; établir que les coordonnées du point N sont :
 $M(a-h; 2b - g(a+h))$
- c) Montrer que le point I est le milieu du segment $[MN]$.
- d) Justifier que la courbe $\mathcal{C}_g$ admet le point I comme centre de symétrie.

Étude d'une fonction :

On considère la fonction ℓ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par la relation :

$$\ell(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$$

Voici la courbe représentative de cette fonction :



- ③ Quelle conjecture peut-on émettre sur une propriété géométrique de cette courbe?
- ④ a) Montrer que : $\ell\left(\frac{1}{2}+h\right) = \frac{7}{4h} + \frac{3}{2}$.
- b) Montrer que : $\ell\left(\frac{1}{2}-h\right) = -\frac{7}{4h} + \frac{3}{2}$
- c) En déduire la valeur de : $\frac{\ell\left(\frac{1}{2}-h\right) + \ell\left(\frac{1}{2}+h\right)}{2}$
- d) Que peut-on en déduire sur la courbe $\mathcal{C}_\ell$?

2. Etude de la parité

E.3315 Étudier la parité des fonctions ci-dessous :

- a) $f(x) = (x-1) \cdot (x+1)$ b) $g(x) = 3x^3 - 2x$
- c) $h(x) = \frac{x^2+1}{x}$ d) $j(x) = \cos(3 \cdot x^3)$

E.3609

- ① Justifier que la fonction suivante est paire :
 $f : x \mapsto e^x + e^{-x}$
- ② Justifier que la fonction suivante est impaire :
 $g : x \mapsto e^x - e^{-x}$

3. Axe de symétrie des courbes

E.3316

- 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image de x est définie par :
- $$f(x) = 2x^2 + 4x - 1$$
- On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .
- a Soit h un nombre réel. Déterminer les expressions simplifiées en fonction de h de :
- $$f(-1-h) \quad ; \quad f(-1+h)$$

4. Centre de symétrie des courbes

E.2302   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{2x - 4}$$

Montrer que le point $I(2;0)$ est le centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$

E.2807   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ dont l'image de x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2 + 10x + 20}{2x + 6}$$

Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f admet pour centre de symétrie le point $K(-3;2)$

E.2520   On considère la fonction f définie par la relation :

$$f: x \mapsto \frac{6x + 4}{3x + 1}$$

- 1 Donner l'ensemble de définition de cette fonction.
- 2 a Établir la relation :
- $$f(x) = \frac{2}{3x + 1} + 2$$
- b En déduire l'écriture de la fonction g vérifiant que la relation suivante pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:
- $$f(x) = g(3x + 1)$$
- 3 Établir que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet pour centre de symétrie le point de coordonnée $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$

5. Axe et centre de symétries de courbes

E.2171

- 1 Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{6}{\frac{1}{2}x^2 + x + 2}$$

admet la droite d'équation $x = -1$ comme axe de symétrie.

- 2 Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x + 1}$$

admet le point $I(-1;2)$ comme centre de symétrie.

- b En déduire une propriété géométrique de la courbe $\mathcal{C}_f$.

- 2 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par :

$$g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

Justifier que la courbe $\mathcal{C}_g$, représentative de la fonction g , admet le point de coordonnée $(1;1)$ pour centre de symétrie.

- 4 On considère la droite (d) d'équation $y = x + 2$. Déterminer l'ensemble des abscisses des points, sous forme de réunion d'intervalles, sur lesquels (d) se retrouve au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

E.3985    Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4 \cdot e^x}{e^x + 3}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On note I le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\ln 3$. Montrer que le point I est le centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.

E.4300    On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{4 \cdot e^x}{e^x + 7}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1 Vérifier que pour tout réel x , on a : $f(x) = \frac{4}{1 + 7 \cdot e^{-x}}$
- 2 Démontrer que le point I_1 de coordonnées $(\ln 7; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.
- 3 Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point I .

E.2198

- 1 Établir que la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x + 1}{2 - x}$$

admet le point $I(2; -2)$ comme centre de symétrie.

- 2 Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image de x est donnée par la relation :

$$g(x) = \frac{2x^2 + 4x - 4}{-x^2 - 2x - 3}$$

Montrer que la courbe $\mathcal{C}_g$ admet la droite d'équation $x = -1$ pour axe de symétrie.

E.2216  

- ① On considère la fonction f définie sur $[-5; 1]$ dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{-x^2 - 4x + 5}$$

Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = -2$ comme axe de symétrie.

6. Symétrie et asymptotes obliques

E.3366   On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x^3 + 4x^2 - 5x + 4}{4(x^2 + 1)}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .

- ① a) Déterminer la valeur des réels a, b, c vérifiant la relation :

$$f(x) = a \cdot x + b + \frac{c \cdot x}{x^2 + 1}$$

- b) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique (Δ) dont on précisera l'équation.
c) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite (Δ) .

- ② Établir que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet le point de coordonnée $(0; 1)$ comme centre de symétrie.

- ③ a) Établir que la dérivée f' de la fonction f admet pour dérivée :

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 5)(3x^2 - 1)}{4(x^2 + 1)^2}$$

- b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

- ② On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par la relation :

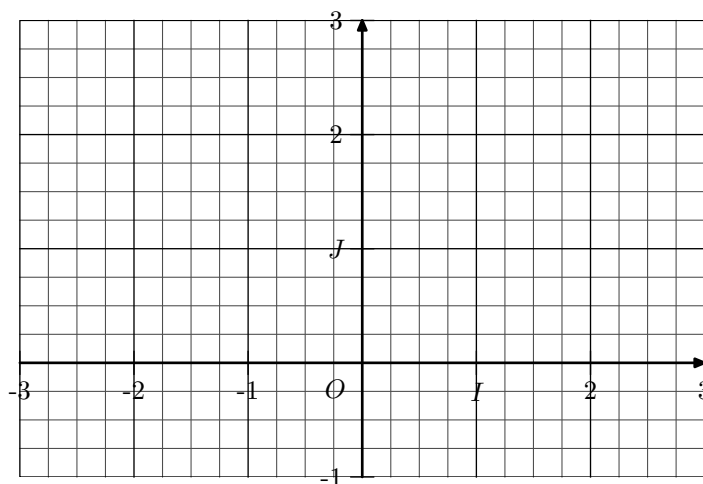
$$g : x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$$

Montrer que la courbe $\mathcal{C}_g$ admet le point $(-1; 1)$ comme centre de symétrie.

Remarque : on admettra les deux résultats suivants :

$$\begin{aligned} \bullet f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,57 \\ \bullet f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 1,43 \end{aligned}$$

- ④ Effectuer le tracé de la courbe $\mathcal{C}_f$.



7. Symétries et dérivées

E.2392   On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x + 6}{2x^2 + 8x + 7}$$

- ① Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
② Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet pour centre de symétrie le point A de coordonnée $A(-2; 0)$.
③ Montrer que l'expression du nombre dérivée de f en x s'exprime par la relation :

$$f'(x) = \frac{-3 \cdot (2x^2 + 8x + 9)}{(2x^2 + 8x + 7)^2}$$

- ④ Établir que la courbe représentative de la fonction f' admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -2$.

E.3505   Soit f une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la limite suivante :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -\frac{1}{2}$$

- ① Que peut-on dire de la dérivabilité de la fonction f en 2.
② Supposons que la fonction f est paire :
a) Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en -2 .
b) À main levée, représenter une courbe $\mathcal{C}_f$ et ses deux tangentes en -2 et 2 vérifiant une telle situation.
③ Supposons que la fonction f est impaire :
a) Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en -2 .
b) À main levée, représenter une courbe $\mathcal{C}_f$ et ses deux tangentes en -2 et 2 vérifiant une telle situation.

E.2393



On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{-6x - 1}{3x + 1}$$

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2 a Montrer l'égalité suivante : $f(x) = \frac{1}{3x+1} - 2$
b En déduire que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet

pour centre de symétrie le point I de coordonnée $\left(-\frac{1}{3}; -2\right)$.

- 3 Donner l'expression de la fonction dérivée de la fonction f .
- 4 Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}_{f'}$ de la fonction dérivée f' admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{1}{3}$.

8. Symétries et intégrales

E.4221



On considère la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{2} \cdot (|x| - 1)^2$$

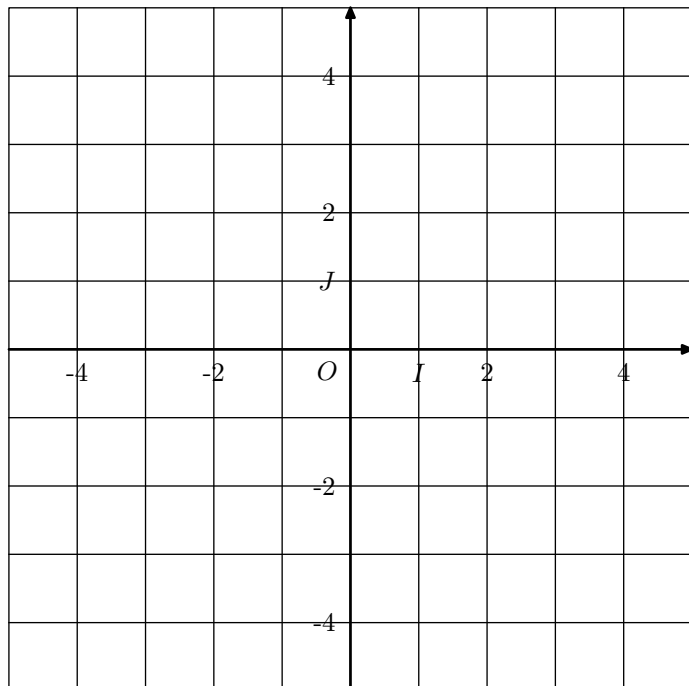
- 1 Étudier la parité de la fonction f .
- 2 Montrer que cette fonction est la densité d'une loi de probabilité sur $[-1; 1]$.

9. Symétries de courbes

E.411



- 1 a Dans le repère ci-dessous, placer les points $A(-3; 4)$, $B(4; 2)$ et $C(-1; -2)$.



- b Placer les images des points A , B , C par rapport la symétrie d'axe (yy') , puis par rapport à la symétrie de centre O (l'origine du repère).
- c Compléter le tableau suivant :

	Coordonnées		
	du point	de l'image par (yy')	de l'image par O
A	$(-3; 4)$		
B	$(4; 2)$		
C	$(-1; -2)$		

- d Compléter les phrases suivantes :

• Les points $(x; y)$ et $(-x; y')$ sont symétriques par rapport à l'axe (yy')

si, et seulement si,

• Les points $(x; y)$ et $(-x; y')$ sont symétriques par rapport à l'origine O

si, et seulement si,

- 2 On considère les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x^2 ; \quad g : x \mapsto x^3 - x ; \quad h : x \mapsto |2x - 1|$$

- a Compléter le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$(x; f(x))$							
$(x; g(x))$							
$(x; h(x))$							

- b Réaliser une conjecture quant à la possibilité que les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ admette la droite (yy') comme axe de symétrie ou l'origine du repère comme centre de symétrie.
- c Tracer les courbes représentatives de ces fonctions sur votre calculatrice.
- 3 Étude algébrique des fonctions f et g :
 - a Exprimer $f(-x)$ en fonction de x . Simplifier l'écriture de $f(-x)$. Que remarque-t-on?
 - b Exprimer $g(-x)$ en fonction de x . Simplifier l'écriture de $g(-x)$. Que remarque-t-on?

E.413   Pour chacune des fonctions suivantes, donner leurs ensembles de définition puis étudier leurs parités :

(a) $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ (b) $g : x \mapsto \frac{|x|}{x(x^2-1)}$
 (c) $h : x \mapsto 3x^2 - x + 1$ (d) $j : x \mapsto \frac{3}{x} \times |x|$

E.415   On considère la fonction f définie sur $[0; 8]$ dont on connaît uniquement le tableau de variations suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	0	1	2,5	1	-2	-0.5	0	1	2

On suppose de plus que cette fonction est strictement monotone sur chacun des intervalles suivants : $[0; 2]$, $[2; 4]$ et $[4; 8]$.

- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- Donner un encadrement de $f(x)$ dans chacun des cas suivants :

(a) $0 \leq x \leq 4$ (b) $4 < x < 8$ (c) $2 \leq x < 7$

- Tracer, en noir, une représentation possible la fonction f dans le repère ci-dessous.
- Dans cette question, on considère la fonction f_1 définie sur $[-8; 8]$ comme le prolongement paire de la fonction f :

(a) Compléter correctement le tableau ci-dessous :

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$f_1(x)$								

(b) Donner l'ensemble des antécédents de 1.

(c) Tracer dans le repère ci-dessous la courbe représentative de f_1 en rouge.

- Dans cette question, on considère la fonction f_2 définie sur $[-8; 8]$ comme le prolongement impaire de la fonction f :

(a) Compléter correctement le tableau ci-dessous :

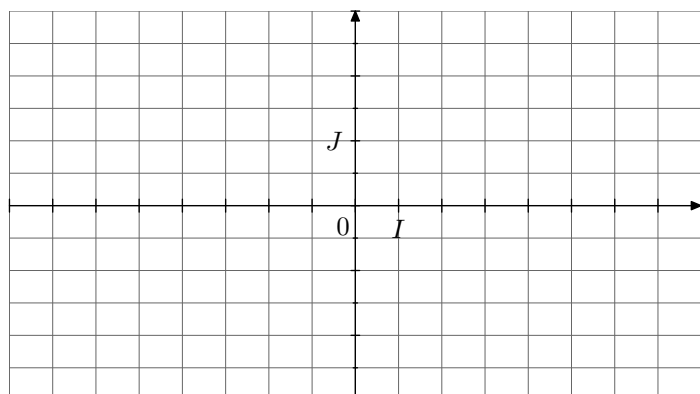
x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$f_2(x)$								

(b) On considère les points du plan suivant :

$A(-4; 2)$; $B(3; 1)$; $C(4; -2)$; $D(-3; -1)$

Justifier que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

(c) Tracer dans le repère ci-dessous la courbe représentative de f_2 en vert.



E.422  

- Soit f une fonction définie sur un intervalle I centré en O .

On définit les deux fonctions suivantes :

$$g : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad ; \quad h : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Étudier la parité de la fonction g et h .

- Soit j une fonction impaire définie sur $\mathcal{D}_j$ tel que $0 \in \mathcal{D}_j$. Montrer que : $j(0) = 0$

E.423   Donner l'ensemble de définition et la parité des fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto x(x+2)^2$ (b) $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$
 (c) $h : x \mapsto \frac{1}{(x-4)(x+4)}$ (d) $j : x \mapsto \frac{1}{2}x \cdot |x|$

E.1754   On se place dans un repère orthogonal $(O; I; J)$

- (a) Soit M un point du plan de coordonnée $(x; y)$. Donner les coordonnées de l'image du point M par la symétrie orthogonal d'axe (OJ) .

- (b) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout nombre réel x :

$$f(x) = f(-x)$$

Montrer que la fonction f est paire.

- (a) Soit M un point du plan de coordonnée $(x; y)$. Donner les coordonnées de l'image du point M par la symétrie centrale de centre O .

- (b) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout nombre réel x :

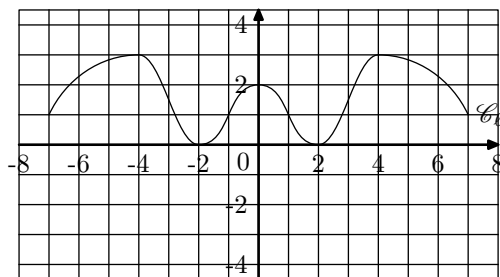
$$f(x) = -f(-x)$$

Montrer que la fonction f est impaire.

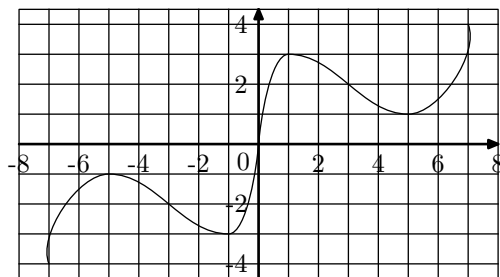
E.1759



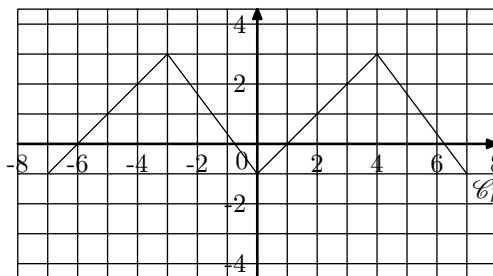
- ① Pour chacune des fonctions, calculer les images demandées :



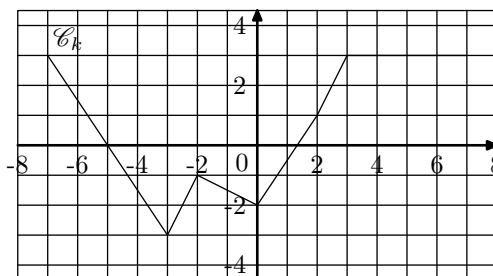
Calculer $f(-6)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$ et $f(6)$.



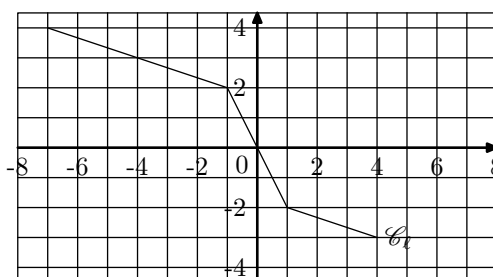
Calculer $g(-7)$, $g(-1)$, $g(0)$, $g(1)$ et $g(7)$.



Calculer $h(-3)$, $h(0)$ et $g(3)$.



Calculer $k(-3)$, $k(-2)$, $k(0)$, $k(2)$ et $k(3)$.



- ② Pour chacune des fonctions suivantes dites si elle est paire, impaire ou aucun des deux.

10. Symétrie de courbes

E.426



On considère la fonction f définie par :

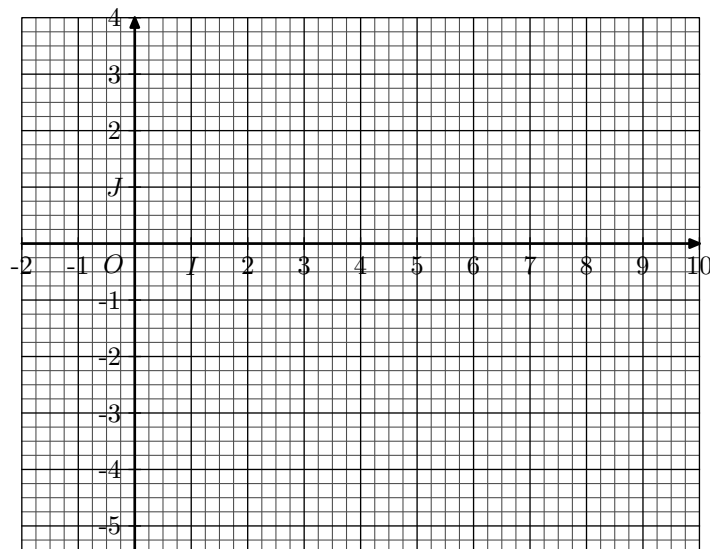
$$f : x \mapsto \frac{1}{4} \cdot x^2 - 2 \cdot x - 1$$

- ① À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous avec des valeurs arrondies au centième près :

x	-2	-0,5	1	2	3	3,5	4
$f(x)$							

x	4,5	5	6	7	8,5	10
$f(x)$						

- ② Effectuer le tracé de la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(O; I; J)$ ci-dessous :



- ③ Cette courbe possède un axe de symétrie, tracer cet axe sur votre représentation.

E.8187    Dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f définie par un polynôme du second degré.

Pour seule connaissance de la fonction f , on a le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-5	-3	-2	0	2	4
$f(x)$	36	0	-9	-9	15	63

- 1 Donner l'équation de l'axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.
- 2 Donner les deux antécédents du nombre 0 par la fonction f .
- 3 Donner l'expression de la fonction f .

E.404    On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est définie par :

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 3$$

- 1
 - a Dresser le tableau de variations de la fonction f .
 - b Préciser les caractéristiques de l'extrémum de la fonction f .
- 2 Soit h un nombre quelconque positif :
 - a Déterminer la forme développée et réduite des deux expressions suivantes :
$$f(1-h) \quad ; \quad f(1+h)$$
 - b Que peut-on dire sur les deux points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives $(1-h)$ et $(1+h)$.