

1. Fonctions homographiques

E.407   On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{3x+1}{x-3}$$

- ① Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, on a :

$$\frac{3x+1}{x-3} = 3 + \frac{10}{x-3}$$

- ② Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty ; 3[$.

E.424   On considère la fonction : $f :$

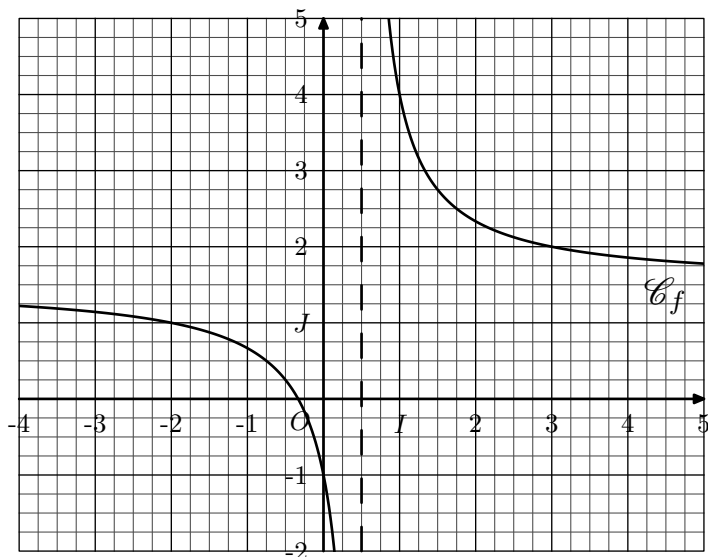
$$x \mapsto \frac{3x+1}{2x-1}$$

- ① a) Établir l'égalité suivante :

$$\frac{3x+1}{2x-1} = \frac{5}{4x-2} + \frac{3}{2}$$

- b) Établir la décroissance de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty ; \frac{1}{2}[$.

- ② On représente, dans le repère orthonormé ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f :



- a) Graphiquement, déterminer une valeur approchée de l'antécédent du nombre 3 par la fonction f .
- b) Algébriquement, rechercher l'antécédent du nombre 3 par la fonction f .
- c) Graphiquement, déterminer les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 3$

E.427    On considère la fonction f définie par la relation :

$$f : x \mapsto \frac{2-6x}{1-2x}$$

- ① Donner l'ensemble de définition de la fonction f .

- ② Déterminer la valeur des réels a et b vérifiant :

$$\frac{2-6x}{1-2x} = \frac{a}{1-2x} + b$$

- ③ En déduire que la fonction f est décroissante sur $] \frac{1}{2} ; +\infty [$

E.429   On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{2x-1}{x+1}$$

- ① Donner l'ensemble de définition de la fonction f

- ② Montrer l'égalité suivante : $\frac{2x-1}{x+1} = 2 + \frac{-3}{x+1}$

- ③ Montrer la croissance de la fonction f sur $] -\infty ; -1[$ et ainsi que sur $] -1 ; +\infty [$

- ④ Montrer algébriquement que 2 n'admet pas d'antécédent par la fonction x .

E.4868   On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{6x-7}{3-2x}$$

- ① Établir l'égalité suivante : $f(x) = -3 + \frac{2}{3-2x}$

- ② Établir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty ; \frac{3}{2}[$.

- ③ Déterminer l'ensemble des antécédents de 1 par la fonction f .

- ④ Résoudre l'équation : $f(x) = 2x$

E.419   On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$$

- ① a) Donner l'ensemble de définition de la fonction f .

- b) Déterminer l'image de 3 par la fonction f .

- c) Déterminer les antécédents, pour la fonction f , des nombres -1 et 0 .

- d) Justifier que 1 n'admet pas d'antécédent par la fonction f .

- ② Établir pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, l'égalité suivante :

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1$$

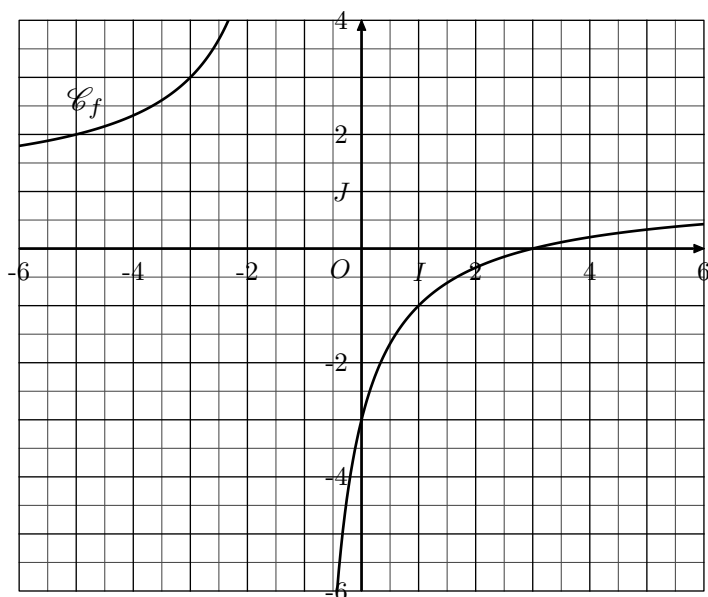
2. Fonctions homographiques et fonctions affines

E.6053   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+1}$$

Dans le repère $(O; I; J)$ donné ci-dessous, on a représenté la

courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f .



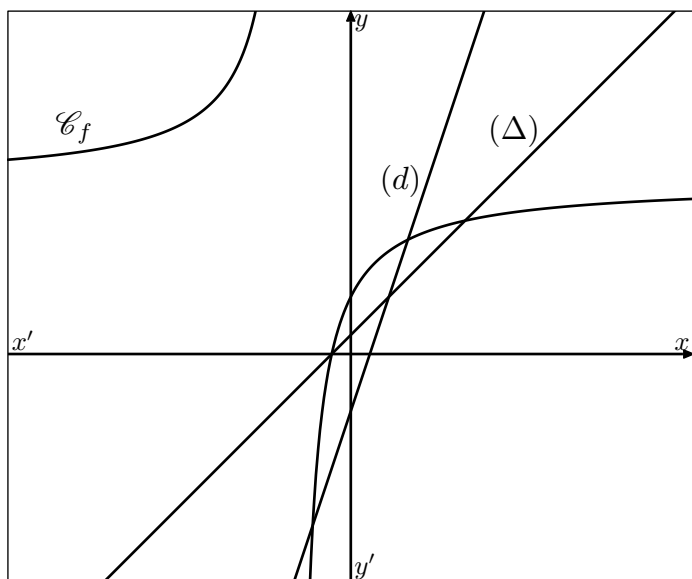
- 1 a Déterminer les coordonnées des deux points A et B de la courbe $\mathcal{C}_f$ ayant pour abscisse respective 1 et 3.
- b Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) .
- c Tracer, dans le repère, la droite (AB) .

- 2 On considère la droite (Δ) ayant pour équation réduite :
 $(\Delta): y = 3x - 4$
 - a Établir la factorisation suivante :
 $-3x^2 + 2x + 1 = (1 - x)(3x + 1)$
 - b Résoudre algébriquement l'inéquation :
 $f(x) \leq 3x - 4$
 - c En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ relativement à la droite (Δ) .
 - d Tracer la droite (Δ) dans le repère.

E.6054   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x + 1}$$

Dans le repère $(O; I; J)$ donné ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f .

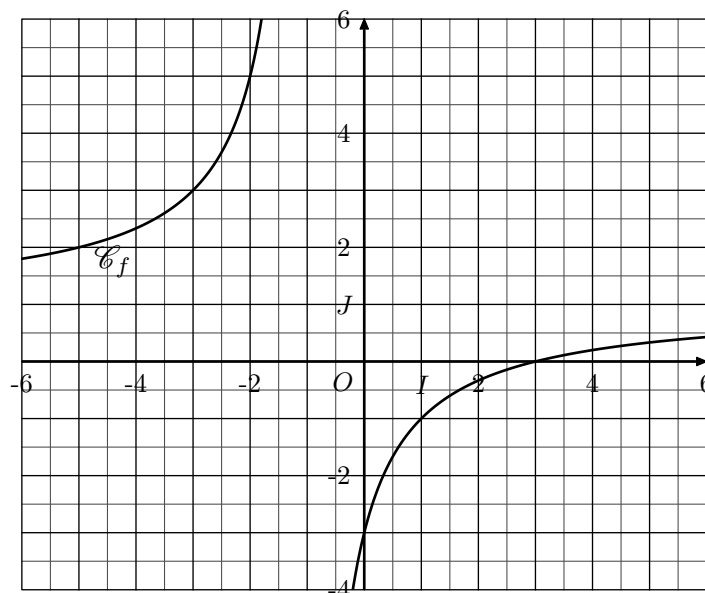


- 1 a Déterminer l'équation réduite de la droite (d) passant par les deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$ ayant respectivement pour abscisses $-\frac{2}{3}$ et 1.
- 2 On considère la droite (Δ) ayant pour équation réduite :
 $(\Delta): y = x + \frac{1}{3}$
 - a Établir la factorisation suivante :
 $-3x^2 + 5x + 2 = (2 - x)(3x + 1)$
 - b Résoudre algébriquement l'inéquation :
 $f(x) \leq x + \frac{1}{3}$
 - c En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ relativement à la droite (Δ) sur $\mathbb{R}$.

E.6052   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x - 3}{x + 1}$$

Dans le repère $(O; I; J)$ donné ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f .



- 1 a Déterminer les coordonnées des deux points A et B de la courbe $\mathcal{C}_f$ ayant pour abscisse respective -2 et 3.
- b Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) .
- c Tracer, dans le repère, la droite (AB) .
- 2 On considère la droite (Δ) ayant pour équation réduite :
 $(\Delta): y = -2x - 3$
 - a Déterminer algébriquement les solutions de l'équation :
 $f(x) \geq -2x - 3$
 - b En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ relativement à la droite (Δ) .
 - c Tracer la droite (Δ) dans le repère.

3. Fonctions homographiques : problèmes

E.2987



Un automobiliste parcourt sur les routes départementales une distance de 48 km à une vitesse moyenne de 64 km/h , puis il parcourt la suite du parcours, de $x \text{ km}$, sur autoroute à une vitesse moyenne de 115 km/h .

- 1 Déterminer la durée de son trajet sur les routes départementales.

- 2 a Justifier que le trajet total a eu pour durée :

$$t = \frac{3}{4} + \frac{x}{115}$$

- b Justifier que la vitesse v moyenne de l'automobiliste, sur l'ensemble du parcours, s'écrit en fonction de x :

$$v = \frac{460x + 22080}{4x + 345}$$

- 3 Le conducteur sait qu'il a parcouru l'intégralité du parcours à une vitesse moyenne de 92 km/h .

Déterminer la distance parcourue sur l'autoroute par l'automobiliste. Puis, donner la distance totale de son parcours.

E.2989



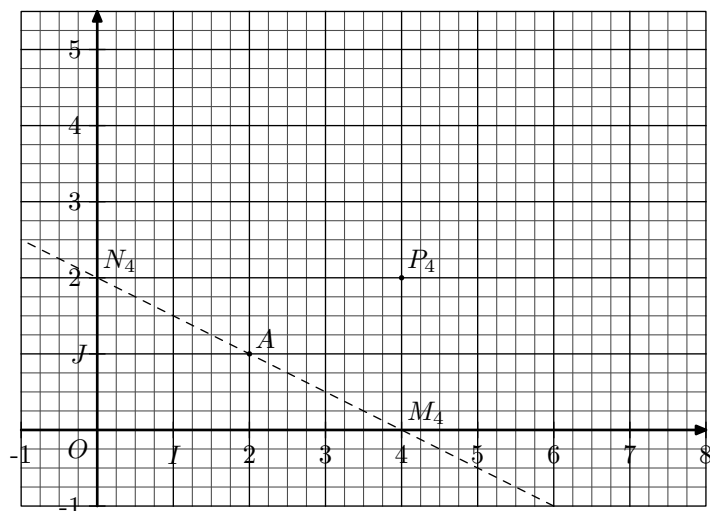
Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère le point A de coordonnée $(2; 1)$.

Pour a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]2; +\infty[$, on considère le point M de coordonnées $(a; 0)$.

On note N le point d'intersection de la droite (MA) avec l'axe des ordonnées et on note b l'ordonnée du point N .

On note P le point de coordonnées $(a; b)$.

Le graphique ci-dessous représente ces différents points dans le cas $a = 4$:



4. Etudes d'autres fonctions

E.3002



On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}$$

- 1 Donner l'ensemble de définition de la fonction f .

- 2 Établir les égalités suivantes :

$$f(x) = \frac{4}{(x-3)(x+1)} = \frac{4}{(x-1)^2 - 4}$$

- 3 a Justifier que, pour x appartenant à $] -\infty; -1[$, l'image de x est positive.

Le but de cet exercice est de connaître la position du point P en fonction de la valeur a ; on parle du "lieu géométrique" du point P lorsque le nombre a décrit l'intervalle $]2; +\infty[$.

Partie A :

- 1 Justifier que le point N ne peut être défini pour $a=2$.

- 2 On s'intéresse à la position du point P lorsque $a=3$:

- a Placer le point $M_3(3; 0)$.

- b Placer le point N_3 tel qu'indiqué dans l'énoncé. Quelle est l'ordonnée du point N_3 ?

- c Placer le point P_3 tel que précisée dans l'énoncé.

- 3 Effectuer la même démarche que pour la question précédente pour les différentes valeurs de a :

$$a = 2,5 \quad ; \quad a = 5 \quad ; \quad a = 7$$

- 4 Quelle conjecture peut-on faire sur la courbe formée par l'ensemble des points P lorsque le nombre a décrit l'intervalle $]2; +\infty[$?

Partie B :

- 1 Justifier que la droite (MN) a pour coefficient directeur :

$$\frac{1}{2-a}$$

- 2 Déterminer l'équation réduite de la droite (MN)

- 3 Déterminer l'expression de b en fonction de a .

- 4 Exprimer les coordonnées du point P en fonction de a . Confirmer la conjecture faite à la question A.

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}$$

- 1 Donner l'ensemble de définition de la fonction f .

- 2 Établir les égalités suivantes :

$$f(x) = \frac{4}{(x-3)(x+1)} = \frac{4}{(x-1)^2 - 4}$$

- 3 a Justifier que, pour x appartenant à $] -\infty; -1[$, l'image de x est positive.

- b Établir que la fonction f est croissante sur $] -\infty; -1[$.

- 4 Dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :

- a Pour tout nombre $h \in \mathbb{R}$ tel que les deux nombres $1+h$ et $1-h$ appartiennent à $\mathcal{D}_f$, vérifier l'égalité suivante : $f(1-h) = f(1+h)$

- b En affichant la courbe $\mathcal{C}_f$ sur votre calculatrice, quelle propriété géométrique semble posséder la courbe $\mathcal{C}_f$?

E.3025



- 1 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{x+2}{(2x-1)(3-x)}$$

- a Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
 b Établir l'égalité suivante :
- $$f(x) = \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{3-x}$$
- c Montrer que pour tout $x \in]-\infty; -2]$, l'image de x par f est un nombre positif.

- 2 Soit g la fonction définie par :

$$g : x \mapsto \frac{4}{4x-2} - \frac{2}{2x+5}$$

- a Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g .
 b Déterminer les valeurs de a et de b vérifiant la relation suivante :

$$g(x) = \frac{12}{4 \cdot (x-a)^2 + b}$$

- c Établir le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]\frac{1}{2}; +\infty[$

E.440



- 1 Établir les égalités :

a $1 + \frac{2}{x+1} = \frac{x+3}{x+1}$ pour $x \neq -1$.

b $\frac{3x^2 - 7x + 6}{x-1} = 3x - 4 + \frac{2}{x-1}$ pour $x \neq 1$.

c $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1}$ pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$.

- 2 En utilisant les résultats de la question précédente, établir les affirmations suivantes :

a La fonction f définie par $x \mapsto \frac{x+3}{x+1}$ est décroissante sur $]-1; +\infty[$.

b La fonction g définie par $x \mapsto \frac{2x}{x^2-1}$ est décroissante sur $]1; +\infty[$.

5. Exercices non-classés

E.7333



- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{3x+4}{x-1}$$

- 1 Établir l'identité : $f(x) = 3 + \frac{7}{x-1}$
 2 Établir que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

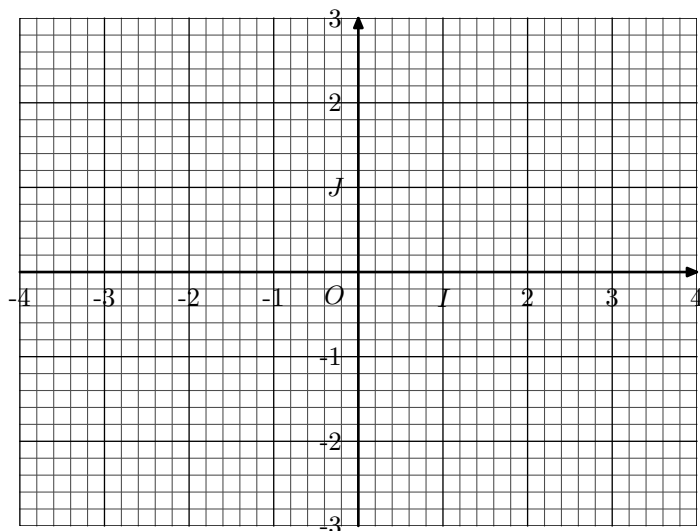
E.4517



- On considère la fonction homographique f définie par :

$$f(x) = \frac{x-2}{4x+2}$$

On considère le plan muni du repère $(O; I; J)$ orthonormé représenté ci-dessous :



- 1 Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$:

- 2 À l'aide de la calculatrice :

- a Dresser le tableau de variations de la fonction f .
 b Compléter le tableau de valeurs, au dixième près :

x	-4	-3	-2	-1,5	-1	-0,8
$f(x)$						

x	-0,3	0	0,5	1	2	3	4
$f(x)$							

- 3 Effectuer le tracé de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère ci-dessus.

E.7465



- On considère la fonction f définie sur $]-2; +\infty[$ par la relation : $f(x) = \frac{3x+8}{x+2}$

- 1 Établir l'identité : $f(x) = 3 + \frac{2}{x+2}$
 2 Établir que la fonction f est décroissante sur $]-2; +\infty[$.