



1. Intégrale par parties

E.3297 Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \cdot \ln(x+1)$$

1 On pose : $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$

a Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout $x \neq 1$:

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

b Calculer I .

2 Déterminer par une intégration par parties l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 x \cdot \ln(x+1) dx$$

E.3959 À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a $\int_{-1}^4 x \cdot e^x dx$

b $\int_0^5 t \cdot e^{2 \cdot t} dt$

c $\int_e^1 \ln t dt$

d $\int_0^1 (2 \cdot x + 1) \cdot \ln(x+1) dx$

e $\int_1^e \frac{5 \cdot \ln x}{x^2} dx$

f $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \cdot \ln x dx$

E.3961 À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a $\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx$

b $\int_1^{\ln 3} e^t \cdot (t-1) dt$

c $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cdot \sin 3x dx$

d $\int_1^e x \cdot (1 - \ln x) dx$

2. Intégrale par parties - doubles

E.3960 À l'aide d'une double intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a $\int_{-2}^3 x^2 \cdot e^x dx$

b $\int_1^5 (1-t^2) e^{-t} dt$

E.4298 Le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$$

E.4016 La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (20 \cdot x + 10) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x}$$

Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$.

E.4294 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{2} \cdot x + 1$$

1 Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(x) dx$. On pourra utiliser une intégration par parties.

2 Calculer, en unité d'aire, la mesure de l'aire du domaine délimité par :

• la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses ;

• les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

(on admettra que la fonction f est positive sur $[\frac{1}{2}; 1]$)

E.4295 À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$$

On note f' la fonction dérivée de f .

Pour tout nombre réel a , on considère l'intégrale :

$$I(a) = \int_0^a f(x) dx$$

1 Donner selon les valeurs de a le signe de $I(a)$.

2 À l'aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel a :

$$I(a) = 2 - 2 \cdot e^{-a} \cdot \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)$$

3. Intégrale par parties - étude

E.3983    On considère la fonction f définie

sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x-1) \cdot e^{1-x}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x (t-1) \cdot e^{1-t} dt$$

① Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1; +\infty[$.

② Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel x appartenant à $[1; +\infty[$:

$$F(x) = -x \cdot e^{1-x} + 1$$

③ Démontrer que sur $[1; +\infty[$, l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation :

$$\ln(2x) + 1 = x$$

E.4004    Le plan est rapporté à un repère

orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$; l'unité graphique est 4 cm.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

Γ est sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

① Montrer que $f(x) = \frac{e^{-x}-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; en déduire une primitive

de f .

② Quelle est l'aire en cm^2 de la surface comprise entre Γ , la droite d'équation $y=x$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$?

Hachurer cette surface sur la représentation graphique.

③ Calculer : $\int_0^1 [f(x)]^2 dx$

④ En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x \cdot [1 - f(x)] dx = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} - \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2 \cdot e}\right).$$

En déduire : $\int_0^1 x \cdot [f(x)]^2 dx$

E.4296    Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; 1]$ par : $f(x) = 1 + x \cdot \ln x$

Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. On pose :

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 [1 - f(x)] dx$$

① À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \ln \alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}$$

② Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha)$

③ On admet que la fonction f est positive sur $]0; 1]$. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

4. Intégrale par parties - suites

E.3982    Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on

considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$

① Calculer I_2 .

② Une relation de récurrence :

a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) \cdot I_n$$

b) Calculer I_3 .

E.3986    On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$J_n = \int_1^n e^{-t} \cdot \sqrt{1+t} dt$$

① Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

② Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

On définit la suite (I_n) , pour tout entier naturel n non nul, par :

$$I_n = \int_1^n (t+1) \cdot e^{-t} dt$$

a) Justifier que, pour tout $t \geq 1$, on a : $\sqrt{t+1} \leq t+1$

b) En déduire que : $J_n \leq I_n$.

c) Calculer I_n en fonction de n . En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).

d) Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

E.4005    Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^\pi e^x \cdot \cos(n \cdot x) dx$$

- ① Montrer que, pour tout entier naturel n :
 $\cos(n \cdot x) = (-1)^n$; $\sin(n \cdot \pi) = 0$
- ② À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{(-1)^n \cdot e^\pi - 1}{1 + n^2}$$

E.4006   

On pose : $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} \ln x dx$ et $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} (\ln x)^2 dx$.

- ① Calculer I_1 .
- ② En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I_2 = \frac{5}{4} \cdot e^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{e}$$

E.4222    Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on

considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_1^{e^2} \frac{1}{x^n} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$

- ① Calculer I_2 .
- ② Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que tout entier naturel $n \geq 2$:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) \cdot I_n$$

E.4303    Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on

considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_1^{e^2} \frac{1}{x^n} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$

- ① Calculer I_2
- ② Démontrer à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) \cdot I_n$$
- ③ Calculer I_3 .

5. Intégrale par parties - probabilité

E.4269    On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ . La probabilité pour un client d'attendre moins de t minutes est définie par :

$$\mathcal{P}(X \leq t) = \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx$$

Le temps moyen d'attente est donné par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda \cdot x \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx$$

- ① À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^t \lambda \cdot x \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx$ en fonction de t .
- ② En déduire que le temps moyen est $\frac{1}{\lambda}$
- ③ Le temps moyen d'attente étant de 5 min, quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 min? plus de 5 min?

6. Intégrale par parties - annales

E.3124    L'objectif est d'étudier quelques propriétés de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-x}$$

Partie A : Variations de f et tracé de la courbe (F)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = (1 - x^2) e^{-x}$$

Dans le plan (P) muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm) la représentation graphique de la fonction f est notée (F) .

- ① Déterminer la limite en $+\infty$ de f : interpréter graphiquement ce résultat.
- ②
 - a) Déterminer, suivant les valeurs de x de l'intervalle $[-1; +\infty[$, le signe de $x^2 - 2x - 1$ et celui de $f(x)$.
 - b) Déterminer la fonction dérivée f' de f . En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations ; préciser les valeurs exactes du minimum et du maximum.
- ③ Déterminer une équation de la tangente notée (T) à la

courbe (F) au point A de (F) dont l'abscisse est 0.

- ④
 - a) Déterminer la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 0,1 près, de chacun des coefficients directeurs des tangentes à la courbe (F) en $(1; 0)$ et $C(-1; 0)$.
 - b) Tracer les trois tangentes à la courbe (F) en A , $B(A; 0)$ et $C(-1; 0)$ et la courbe (F) .

Partie B : Intégrales et aires

Les surfaces S et $S_1(u)$ du plan (P) , où u est un réel donné de l'intervalle $[1; +\infty[$ sont définies par :

- S est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :
 $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
- $S_1(u)$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :
 $1 \leq x \leq u$ et $f(x) \leq y \leq 0$.

Les aires respectives de ces surfaces sont notées $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1(u)$. Leurs valeurs exactes seront exprimées en unités d'aire.

- ① Justifier l'existence de l'intégrale $\int_1^x f(t) dt$ où x est un réel positif.

En procédant par deux intégrations par parties succes-

sives, déterminer cette intégrale.

- 2 En déduire la valeur exacte de $\int_1^0 f(t) dt$.

En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$

- 3 Déterminer, en fonction de u où $u \geq 1$, l'aire $\mathcal{A}_1(u)$ puis la limite, lorsque u tend vers $+\infty$, de $\mathcal{A}_1(u)$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

- 4 L'objectif est de déterminer le réel α supérieur ou égal à 1 pour lequel :

$$\mathcal{A}_1(\alpha) = \mathcal{A}$$

- a Démontrer que, sur l'intervalle $[1; +\infty[$, l'équation $\mathcal{A}_1(x) = \mathcal{A}$ est équivalente à : $x = 2 \cdot \ln(1+x)$

- b Étudier le sens de variations de la fonction h définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par : $h(x) = x - 2 \cdot \ln(1+x)$.

Démontrer que, sur l'intervalle $[1; +\infty[$, l'équation $x = 2 \cdot \ln(1+x)$ admet exactement une solution et que celle-ci, notée α , vérifie la condition : $2 < \alpha < 3$.

- c Déterminer, en indiquant la méthode utilisée, un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α .

Déterminer $f(\alpha)$ sous la forme d'une fonction rationnelle de α puis l'encadrement de $f(\alpha)$, qu'on déduira du précédent, d'amplitude 2×10^{-4}

E.3177



- 1 On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln x - \frac{2}{x}$$

On donne ci-dessous le tableau de variations de g :

x	0	2,3	x_0	2,4	$+\infty$
Variation de g			0		$+\infty$

Démontrer toutes les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau.

- 2 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5 \ln x}{x}$$

- a Montrer que $f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau ci-dessus.

- b Soit a un réel. Pour $a > 1$, exprimer $\int_1^a f(t) dt$ en fonction de a .

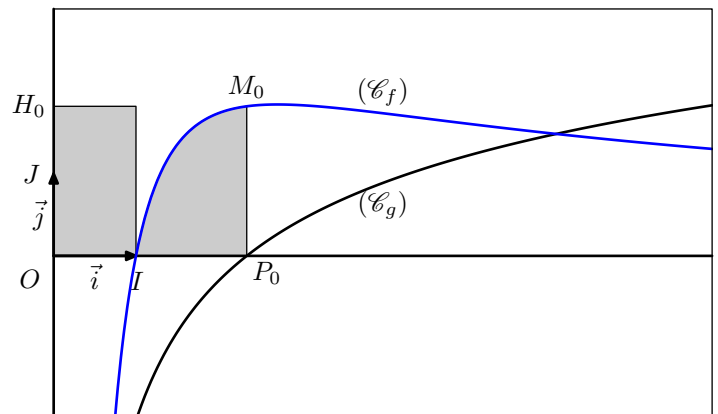
- 3 On a tracé dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

On appelle I le point de coordonnées $(1; 0)$, P_0 le point d'intersection de $(\mathcal{C}_g)$ et de l'axe des abscisses, M_0 le point de $(\mathcal{C}_f)$ ayant même abscisse que P_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.

On nomme $(\mathcal{D}_1)$ le domaine du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les segments $[IP_0]$ et $[P_0M_0]$.

On nomme $(\mathcal{D}_2)$ le domaine du plan délimité par le rectangle construit à partir de $[OI]$ et $[OH_0]$.

Démontrer que les deux domaines $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ ont même aire, puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire.



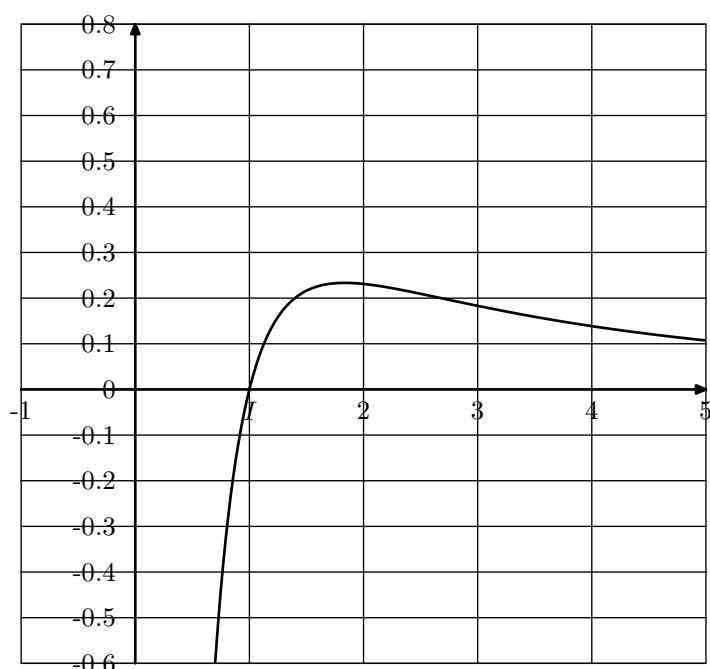
E.3211

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$$

- 1 Montrer que pour tout $x > 1$: $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$
- 2 a Calculer $I = \int_2^4 \frac{\ln x}{x} dx$ et $J = \int_2^4 \frac{\ln x}{x^2} dx$ (on pourra utiliser une intégration par parties pour cette dernière)
- b En déduire un encadrement de $K = \int_2^4 f(x) dx$.
- 3 la figure ci-dessous représente la courbe représentative de f (unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnées 4 cm pour 1 unité). On considère l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} \text{ et on note } \mathcal{A} \text{ son aire.}$$



À l'aide de l'encadrement trouvé au 2 b, donner un encadrement $\mathcal{A}$ en cm^2 .

E.3220



- 1 Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$$

- a Déterminer les nombres réels a , b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$:

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$
- b Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
- 2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

- 3 En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \ln x dx$$

On donnera le résultat exact sous la forme $p \cdot \ln 2 + q \cdot \ln 3$, avec p et q rationnels.

E.3236



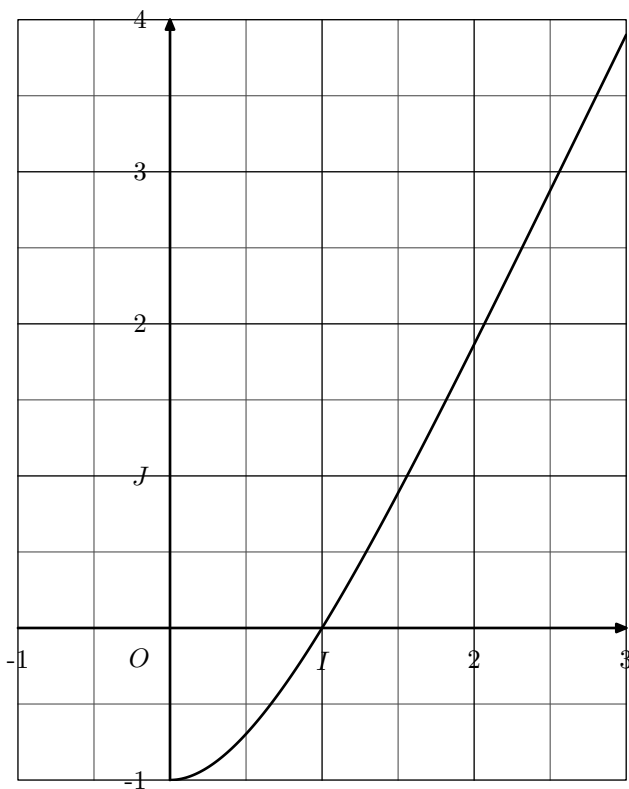
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x})$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est tracée dans le repère orthonormé ci-dessous (unité graphique 2 cm).

- 1 a Étudier la limite de f en $+\infty$.
- b Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
- c Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ .
- 2 a Calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = xe^{-x} + 2 \cdot (1 - e^{-x})$$
- b En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.
- c Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f .
- 3 À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
- 4 a Déterminer le point A de $\mathcal{C}$ où la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à Δ .
- b Calculer la distance, exprimée en cm , du point A à la droite Δ .



E.3249



L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.

On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, par :

$$f(x) = \ln(x+1) \quad ; \quad g(x) = e^x - 1$$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Ces courbes sont tracées sur la feuille annexe, dont le candidat disposera comme il le jugera utile ; cette annexe sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par le candidat.

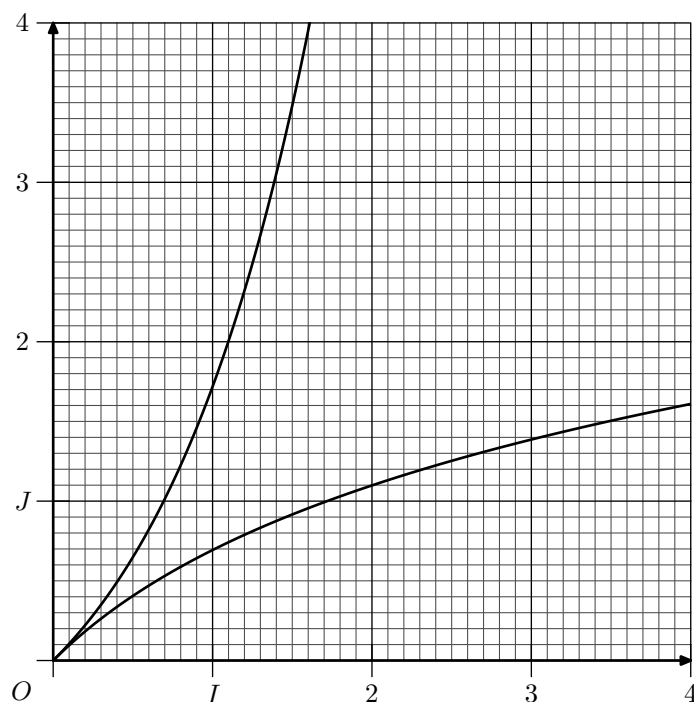
- 1 Vérifier que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont une tangente commune au point $O(0; 0)$. Préciser la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente.
- 2 Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- 3 Soit a un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre $I(a) = \int_0^a \ln(x+1) dx$.

- a En utilisant des considérations d'aires, démontrer que :

$$I(a) = a \cdot \ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1) dx$$

- b En déduire la valeur de $I(a)$.

- c Retrouver la valeur de $I(a)$ en effectuant une intégration par parties.



E.3272



But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0; +\infty[$.

Soit $a \in [0; +\infty[$. On note $I_0(a) = \int_0^a \frac{1}{1+t} dt$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$,

on pose : $I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt$

- 1 Calculer $I_0(a)$ en fonction de a .
- 2 À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_1(a)$ en fonction de a .
- 3 À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*$$
- 4 Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$:

$$P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x.$$

 Démontrer en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que :

$$I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$$

5 Soit $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt$. Calculer $J(a)$.

6 a Démontrer que pour tout $t \in [0; a]$:

$$\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$$

b Démontrer que pour tout $a \in [0; +\infty[$:

$$J(a) \leq I_5(a) \leq 0$$

7 En déduire que pour tout $a \in [0; +\infty[$:

$$|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}.$$

8 En justifiant votre réponse, déterminer un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

E.4000



Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x-1)(2-e^{-x})$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est tracée dans le repère orthonormé ci-dessous (unité graphique 2 cm).

- 1 a Étudier la limite de f en $+\infty$.
- b Montrer que la droite Δ d'équation $y=2x-2$ est

asymptote à $\mathcal{C}$.

- c Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ .
- 2 a Calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = x \cdot e^{-x} + 2 \cdot (1 - e^{-x}).$$
- b En déduire que, pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) > 0$$
- c Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f .
- 3 À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.
- 4 a Déterminer le point A de $\mathcal{C}$ où la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à Δ .
- b Calculer la distance, exprimée en cm , du point A à la droite Δ .

E.4128



Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{2-x} \right) dx$$

- 1 a Étudier les variations de la fonction :

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$$
 sur l'intervalle $[0; 1]$.
- b Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, on a :

$$\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$$
- 2 Soit J et K les intégrales définies par :

$$J = \int_0^1 (2+x) \cdot e^{-x} dx \quad ; \quad K = \int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx$$
- a Au moyen d'une intégration par parties, prouver que :

$$J = 3 - \frac{4}{e}$$
- b Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que :

$$\frac{1}{3 \cdot e} \leq K \leq \frac{1}{6}.$$
- c Démontrer que : $J+K=4 \cdot I$.
- d Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I , puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I .

7. Intégrale par parties - suites et annales

E.3196



1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{1-x}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

- a Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathcal{C}$ peut-on en tirer?
 - b Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f' .
 - c Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathcal{C}$.
- 2 Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale

I_n définie par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

- a Établir une relation entre I_{n+1} et I_n .
- b Calculer I_1 , puis I_2 .
- c Donner une interprétation graphique du nombre I_2 . On la fera apparaître sur le graphique de la question 1 c.
- 3 a Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :

$$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$$
- b En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n

quand n tend vers $+\infty$.

E.3205



Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x+1)$$

Sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ est donnée en annexe.

- 1 a Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- b L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe $(\mathcal{C})$ au point O ?

- 2 On pose: $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$

- a Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout $x \neq 1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

- b Calculer I .

- 3 À l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

- 4 Montrer que l'équation $f(x)=0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0; 1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$$

- 1 Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) . La suite (u_n) converge-t-elle?

- 2 Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite (u_n) .

E.3239



On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2 . On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx$$

- 1 Calculer I_1 .

- 2 Établir que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$$

- 3 À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

- 4 Démontrer par récurrence que :

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$$

- 5 On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

- a Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geq 3$:

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n.$$

- b En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$:

$$0 \leq u_n \leq u_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

- 6 En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n) .

- 7 Justifier enfin que :

$$e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right)$$

E.3988



Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = (1+x) \cdot e^{-x}$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

- 1
 - a Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
 - b Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - c On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Calculer, pour tout nombre réel x , $f'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - d Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2; 5]$.
- 2 On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-1}^n f(x) dx$$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n .

 - a Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \geq 0$.
 - b Montrer que la suite (I_n) est croissante.
- 3
 - a À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :

$$\int_a^b f(x) dx = (-2-b) \cdot e^{-b} + (2+a) \cdot e^{-a}$$
 - b En déduire l'expression de I_n en fonction de n .

c Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

d Donner une interprétation graphique de cette limite.

4 Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\int_{-1}^a f(x) dx = e$

Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire?

E.3999



On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non-nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cdot \cos t dt \quad ; \quad y_n = \int_0^1 t^n \cdot \sin t dt$$

- 1
 - a Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.
 - b Étudier les variations de la suite (x_n) .
 - c Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?
- 2
 - a Démontrer que, pour tout entier naturel n non-nul :

$$x_n \leq \frac{1}{n+1}$$
 - b En déduire la limite de la suite (x_n) .
- 3
 - a À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non-nul :

$$x_{n+1} = -(n+1) \cdot y_n + \sin(1).$$
 - b En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$
- 4 On admet que, pour tout entier naturel n non nul :

$$y_{n+1} = (n+1) \cdot x_n - \cos(1).$$

Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot x_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot y_n$

8. Intégrale par parties - équation différentielles et annales

E.3125



Partie A

- 1 Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$
- 2 Déterminer la solution ϕ de cette équation, définie sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie les conditions :

$$\phi(0) = 0 \quad ; \quad \phi'(0) = -e$$

Partie B

- 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x \cdot e^{2x+1}$$
 - a Quel est, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$?
 - b Étudier le sens de variation de f .
 - c Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - d Dresser le tableau de variations de f .
 - e On appelle $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).
Quelle est la tangente à $(\mathcal{C})$ au point O ?
Écrire une équation de la tangente T à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $(-A)$.
 - f On appelle (Γ) la représentation graphique dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x$$

Quelle est la tangente à (Γ) au point d'abscisse $(-A)$?

- 2 On appelle h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^x$$
 - a Étudier le sens de variation de h .
En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .
 - b Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Γ) .
 - c Tracer, sur le même graphique, les courbes T , $(\mathcal{C})$ et (Γ) .
- 3 Soit m un réel quelconque et M le point de la courbe (Γ) d'abscisse M .
 - a Écrire une équation de la tangente D à (Γ) en M .
 - b La tangente D coupe les axes de coordonnées en A et B .
Calculer, en fonction de m , les coordonnées du milieu J du segment $[AB]$.
 - c Prouver que J appartient à $(\mathcal{C})$.
 - d Tracer (D) et J pour $m=0$.

Partie C

- 1 Soit x un réel quelconque.
À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x t \cdot e^{2t} dt$$

- 2 Soit x un réel négatif.
Calculer l'aire $\mathcal{A}(x)$, exprimée en cm^2 , de l'ensemble des points N dont les coordonnées $(u; v)$ vérifient :

$$\begin{cases} x \leq u \leq 0 \\ 0 \leq v \leq f(x) \end{cases}$$

- 3 Calculer $\mathcal{A}(-1)$.
4 $\mathcal{A}(x)$ admet-elle une limite quand x tend vers moins l'infini? Si oui, laquelle?

E.3189    **Partie A**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = e^{-x}$$

- 1 Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E) .
2 Résoudre l'équation différentielle : $(E_0) : y' + y = 0$
3 Démontrer qu'une fonction v , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si, et seulement si, $v-u$ est solution de (E_0) .
4 En déduire toutes les solutions de (E) .
5 Déterminer la fonction f_2 , solution de (E) , qui prend la valeur 2 en 0.

Partie B

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x+k) \cdot e^{-x}$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1 Déterminer les limites f_k en $-\infty$ et $+\infty$.
2 Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x .
3 En déduire le tableau de variations de f_k .

Partie C

- 1 On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par :

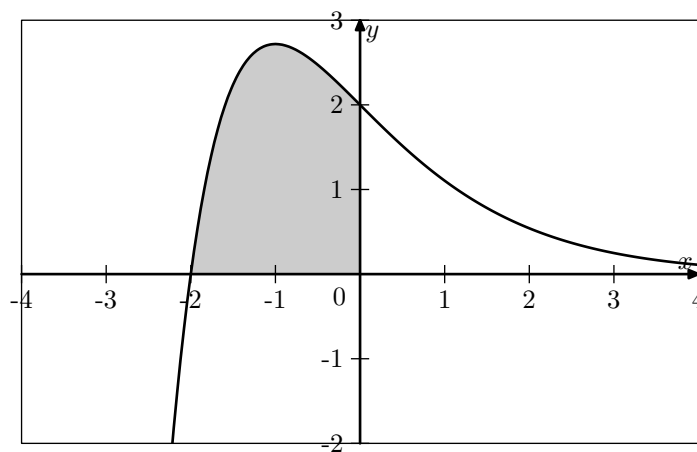
$$I_0 = \int_{-2}^0 e^{-x} dx$$

et pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$$

- a Calculer la valeur exacte de l'intégrale I_0 .
b En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :
$$I_{n+1} = (-2)^{n+1} \cdot e^2 + (n+1) \cdot I_n$$

c En déduire les valeurs exactes des intégrales I_1 et I_2 .
2 Le graphique ci-dessous représente une courbe $\mathcal{C}_k$ qui est la représentation graphique d'une fonction f_k définie à la partie B.
a À l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel k correspondant.
b Soit $\mathcal{S}$ l'aire de la partie hachurée (en unité d'aire); exprimer $\mathcal{S}$ en fonction de I_1 et I_0 et en déduire sa valeur exacte.



E.3214    **Partie A**

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (20x + 10)e^{\frac{1}{2}x}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

- 1 Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2 Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3 Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0; +\infty[$. Donner la valeur arrondie de α à 10^{-3} près.
4 Tracer la courbe $\mathcal{C}$.
5 Calculer l'intégrale : $I = \int_0^3 f(x) dx$

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degré Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t , t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t=0$, est $y(0)=10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + \frac{1}{2} \cdot y = 20 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$$

- 1 Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2 On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E) , définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
a On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E) , définie sur $[0; +\infty[$ vérifiant $g(0)=10$. Démontrer que la fonction $g-f$ est solution, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, de l'équation différentielle :
$$(E') : y' + \frac{1}{2} \cdot y = 0$$

b Résoudre l'équation différentielle (E') .
c Conclure.
3 Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale? Le résultat sera arrondi à la minute.
4 La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières

heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$.

Calculer la valeur exacte de θ , puis donner sa valeur arrondie au degré.

9. Intégrale et volumes

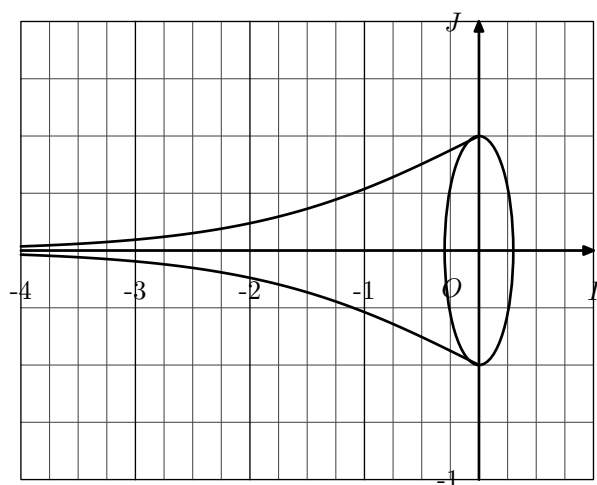
E.4018    On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Soit λ un réel positif, on note $\mathcal{V}(\lambda)$ l'intégrale :

$$\int_{-\lambda}^0 \pi \cdot [f(x)]^2 dx$$

On admet que $\mathcal{V}(\lambda)$ est une mesure, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe $\mathcal{C}$ obtenue pour $-\lambda \leq x \leq 0$.



- ① Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout nombre réel x :

$$\frac{e^{2 \cdot x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{a \cdot e^x}{e^x + 1} + \frac{b \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}$$

- ② Exprimer $\mathcal{V}(\lambda)$ en fonction de λ .
 ③ Déterminer la limite de $\mathcal{V}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

E.4328    On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

La courbe $(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe (Ox) de la région plane délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe (Ox) et les droites d'équations :

$$x = \frac{1}{e} \quad ; \quad x = 1$$

On note V une mesure, exprimée en unités de volume, du volume de ce solide et on admet que :

$$V = \int_{\frac{1}{e}}^1 \pi \cdot [f(x)]^2 dx$$

- ① Montrer qu'une primitive de la fonction :

$$x \mapsto x^4 \cdot \ln x \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$\text{est la fonction : } x \mapsto \frac{x^5}{25} \cdot (5 \cdot \ln x - 1).$$

- ② En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$V = \frac{\pi}{125} \cdot \left(2 - \frac{37}{e^5} \right)$$

E.3216

Soit f la fonction définie sur

$$[0; +\infty[\text{ par : } f(x) = x \cdot e^{-x+2}$$

Les deux parties peuvent être abordées indépendamment.

Partie A

- ① Dresser le tableau des variations de f sur $[0; +\infty[$ et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe représentative.

- ② a) Tracer sur la calculatrice graphique les courbes de la fonction f et de la fonction logarithme népérien; on notera $\mathcal{L}$ cette dernière. Conjecturer avec ce graphique le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = \ln(x)$$

sur $[1; +\infty[$.

- b) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = \ln(x) - f(x)$$

est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

En déduire que l'équation $f(x) = \ln(x)$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$.

- c) Déterminer la valeur de α arrondie à 10^{-3} près.

Partie B

- ① À l'aide d'une double intégration par parties, déterminer :

$$I = \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx$$

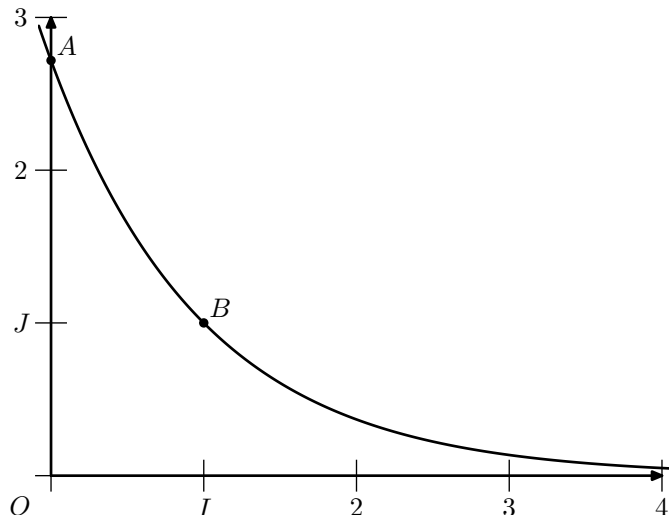
- ② On définit le solide $\mathcal{S}$ obtenu par révolution autour de l'axe (Ox) de la courbe d'équation $y = f(x)$ pour $0 \leq x \leq 3$ dans le plan (xOy) (repère orthonormé d'unité 4 cm). On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ du solide est donné par :

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^3 [f(x)]^2 dx$$

- a) Exprimer $\mathcal{V}$ en fonction de I .

- b) Déterminer le volume du solide arrondie à 1 cm^3 près.

E.3229



On a représenté ci-dessus, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle :

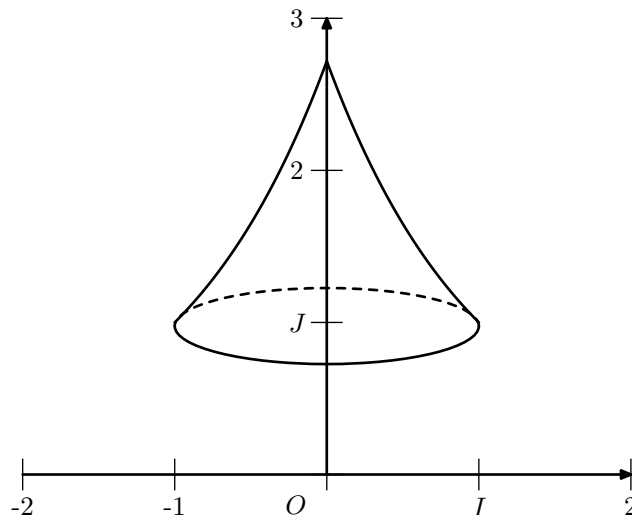
$$(E) : y' + y = 0 \text{ et telle que } f(0) = e.$$

- ① Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.
- ② Soit t un réel donné de l'intervalle $[1; e]$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{1-x} = t$ d'inconnue x .
- ③ Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe.

On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe $\widehat{AB}$ comme représenté ci-dessous. On note V son volume.

$$\text{On admet que : } V = \pi \cdot \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt$$

Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.

**10. Anciennes annales (avant 2012)**

E.3138



- ① Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x^3 - 4x^2) \cdot e^{-x}$$

- a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

- b) Calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = 2x(-x^2 + 5x - 4) \cdot e^{-x}.$$

- c) Dresser le tableau de variations de f .

- d) Tracer la courbe ($\mathcal{C}$) représentative de f dans

un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

- 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{-x} dx$
- a À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .
- b On admet que, pour tout n supérieur ou égal à 2 :

$$I_n = n \cdot I_{n-1} - \frac{1}{e}.$$
 Déterminer I_2 et I_3 .
- c Soit $\mathcal{A}$ l'aire, exprimé en cm^2 , du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$. Calculer $\mathcal{A}$.
- 3 Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
 On définit la fonction v sur $]0; +\infty[$ par $v(x) = u\left(\frac{1}{x}\right)$.
- a On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a; b]$ (où $0 < a < b$).
 Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a}\right]$.
- b On définit maintenant la fonction g par $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0; +\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1.
 Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
- c Dédurre des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

E.3201

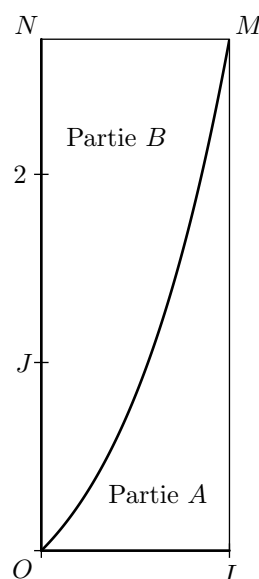


Première partie

Calculer l'intégrale : $\int_0^1 x \cdot e^x dx$.

Deuxième partie

La figure ci-dessous représente une cible rectangulaire $OIMN$ telle que, dans le repère orthonormal $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$, la ligne courbe $\mathcal{C}$ reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \cdot e^x$. Cette courbe partage la cible $OIMN$ en deux parties A et B comme l'indique la figure ci-dessous.



Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties A ou B . On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontières de la cible, ni la courbe $\mathcal{C}$.

Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives.

- 1 Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie A est égale à $\frac{1}{2e}$.
 Quelle est la probabilité d'atteindre la partie B ?
- 2 On lance de manière indépendante trois fléchettes :
- a Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie A . Définir la loi de probabilité de $\mathcal{X}$. En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.
- b Soit E l'événement : "Exactement deux fléchettes atteignent la partie A ".
 Calculer la probabilité de E arrondie au millième près.
- c Soit F l'événement : "les trois fléchettes atteignent la partie B ". Calculer la probabilité de F (on donnera la valeur exacte).
 Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans la partie B ?
- 3 On lance cette fois de manière indépendante n fléchettes.
- a Déterminer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A .
- b Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_n \geq 0,99$.

E.3222



La courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$$

- 1 a Montrer que f est dérivable et que, pour tout x strictement positif, $f'(x)$ est du signe de :

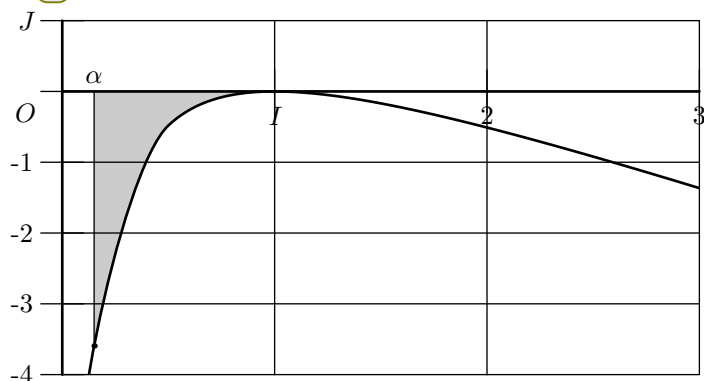
$$N(x) = -[2(x\sqrt{x} - 1) + \ln x]$$

- b Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$.
- c En déduire le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$ et les coordonnées du point de $\mathcal{C}$ d'ordonnée maximale.
- 2 On note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de $]0; 1]$.
- a Exprimer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α (on pourra utiliser une intégration par parties).
- b Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interprétation graphique de cette limite.

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 élément de $[1; 2]$ et :

$$\text{pour tout entier naturel } n: u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1$$

- 3 a Démontrer, pour tout réel x élément de $[1; 2]$, la double inégalité :
- $$0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$$
- b Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[1; 2]$.
- 4 En remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
- 5 a Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
- b Déterminer la valeur exacte de ℓ .



E.3262



On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (3 - 2 \cdot \ln x) + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

- 1 a Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
- b Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- 2 a Étudier la dérivabilité de f en 0.
- b Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$, f' désignant la fonction dérivée de f .
- 3 Étudier le sens de variations de f sur $[0; +\infty[$, puis dresser son tableau de variations.
- 4 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Déterminer la valeur de α arrondie à 10^{-2} près.

Partie B

- 1 Calculer une équation de la tangente $\mathcal{D}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x = 1$.
- 2 On considère la fonction $g: x \mapsto f(x) - 2x - \frac{1}{2}$ définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- a Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$ où g' et g'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g . Étudier le sens de variations de g' . En déduire le signe de $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- b Étudier le sens de variations de g . En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente $\mathcal{D}$.
- 3 Construire la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente $\mathcal{D}$ (unité graphique 2 cm).

Partie C

n est un entier naturel non nul.

- 1 Exprimer en fonction de n le réel : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \cdot \ln x \, dx$ (on pourra utiliser une intégration par parties)
- 2 En déduire en fonction de l'entier n , l'aire $\mathcal{A}_n$ exprimée en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la tangente $\mathcal{D}$ et les deux droites d'équation $x = \frac{1}{n}$ et $x = 1$.
- 3 calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n$ et interpréter le résultat obtenu.

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non-nul, par :

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n \cdot e^t dt.$$

- ① Montrer que la fonction $f: t \mapsto (2-t) \cdot e^t$ est une primitive de $g: (1-t) \cdot e^t$ sur $[0; 1]$.
En déduire la valeur de u_1 .

- ② Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non-nul :

$$u_{n+1} = (n+1) \cdot u_n - 1 \quad (R)$$

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par	
	la première calculatrice	la deuxième calculatrice
1	7,1828182845E-01	7,1828182846E-01
2	4,3656365691E-01	4,3656365692E-01
3	3,0969097075E-01	3,0969097076E-01
4	2,3876388301E-01	2,3876388304E-01
5	1,9381941508E-01	1,9381941520E-01
6	1,6291649051E-01	1,6291649120E-01
7	1,4041543358E-01	1,4041543840E-01
8	1,2332346869E-01	1,2332350720E-01
9	1,0991121828E-01	1,0991156480E-01
10	9,9112182825E-02	9,9115648000E-01
11	9,0234011080E-02	9,0272128000E-02
12	8,2808132963E-02	8,3265536000E-02
13	7,6505728522E-02	8,2451968000E-02
14	7,1080199309E-02	1,5432755200E-01
15	6,6202989636E-02	1,3149132800E+00
16	5,9247834186E-02	2,0038612480E+01
17	7,2131811612E-03	3,3965641216E+02
18	-8,7016273909E-01	6,1128154189E+03
19	-1,7533092042E+01	1,1614249296E+05
20	-3,5166184085E+02	2,3228488592E+06
21	-7,3858986580E+03	4,8779825043E+07
22	-1,6249077047E+05	1,0731561499E+09
23	-3,7372887209E+06	2,4682591448E+10
24	-8,9694930302E+07	5,9238219474E+11
25	-2,2423732585E+09	1,4809554869E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice?

Partie C

Dans cette partie, on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la définition :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*: \quad u_n = \int_0^1 (1-t)^n \cdot e^t dt$$

- ① Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq 0$.
- ② a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$
- b) En déduire que pour tout n non-nul : $u_n \leq \frac{e}{n+1}$.
- ③ Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n) :

$$u_{n+1} = (n+1) \cdot u_n - 1$$

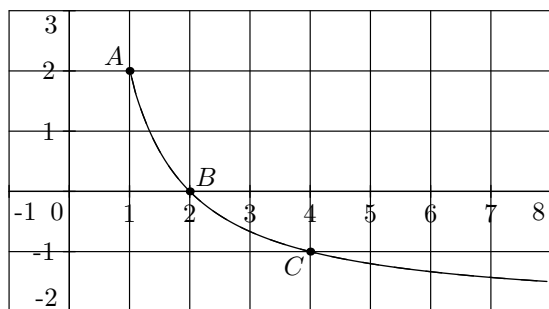
Étant donné un réel a , on considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = a \quad ; \quad v_{n+1} = (n+1) \cdot v_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

- ① En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non-nul n :
- $$v_n = u_n + (n!) \cdot (a + 2 - e)$$
- où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non-nuls.
- ② Étudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a . (On rappelle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$)
- ③ En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

**Partie I**

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[1; 8]$, strictement décroissante, dont la représentation graphique $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé est donnée ci-contre. La courbe $\mathcal{C}$ contient les points $A(1; 2)$, $B(2; 0)$ et $C(4; -1)$.



① En utilisant la représentation graphique, donner, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$.

② On suppose que, pour tout x de l'intervalle $[1; 8]$ $f(x)$ s'écrit : $f(x) = -2 + \frac{4}{x}$

Retrouver par le calcul, le résultat du ①.

Partie II

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[1; 8]$ par :

$$F(x) = 5 - 2x + 4 \ln(x).$$

① Montrer que F a pour dérivée la fonction f de la partie I.

② Étudier les variations de la fonction F sur l'intervalle

$[1; 8]$, puis dresser son tableau de variation.

③ $\mathcal{C}_F$ désigne la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthogonal d'unités graphiques : en abscisse 1 cm, en ordonnée 2 cm.

a) Soit la droite Δ , tangente à la courbe $\mathcal{C}_F$ en son point d'abscisse 1. Montrer que le coefficient directeur de la droite Δ est égal à 2.

b) Tracer la courbe $\mathcal{C}_F$ et la droite Δ .

Formulaire :

La dérivée de la fonction $\ln$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ est la fonction qui, à x , associe $\frac{1}{x}$.

E.4014



Restitution organisée de connaissances :

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a; b]$.

Soient les deux intégrales définies par :

$$I = \int_0^\pi e^x \cdot \sin x \, dx \quad ; \quad J = \int_0^\pi e^x \cdot \cos x \, dx$$

① Démontrer que : $I = -J$; $I = J + e^\pi + 1$

② En déduire les valeurs exactes de I et de J .

E.3996



Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I .

Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a; b]$ de I .