

1. Axiome de continuité

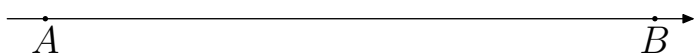
E.2285   Considérons un point X se déplaçant de A vers B en décrivant l'intégralité du segment.

On décompose le parcours du point de la manière suivante :

- On dira que ce point arrivera à la première étape, lorsqu'il aura parcouru la moitié de $[AB]$: on notera X_1 ce point.
- Il sera à la seconde étape lorsqu'il aura parcouru la moitié du chemin restant, c'est-à-dire la moitié de $[X_1B]$: ce point sera noté X_2 .
- La troisième étape sera la moitié de $[X_2B]$: la moitié de la distance restante...
- Et ainsi de suite.

On considère X_0 comme étant le point A de départ.

- ① Placer sur la droite ci-dessous les points X_1, X_2, X_3 et X_4 .



- ② On supposera désormais que la distance AB mesure 1 mètre.

- a Donner la distance X_0X_1, X_1X_2, X_2X_3 et X_3X_4 .
- b Par extrapolation, donner les mesures de X_4X_5, X_5X_6, X_6X_7 et X_7X_8 .
- c Pour $n \in \mathbb{N}$, faites une conjecture quant à la distance $X_{n-1}X_n$.

- ③ On se propose d'étudier la somme infinie de termes :

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Pour cela, pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la somme à n termes :

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

- a Écrire, sans calculer, les sommes S_3, S_4 et S_5 .
- b Établir la formule : $S_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot S_n$
- c Donner une raison pour laquelle les nombres S_n se rapprochent de la valeur 1 lorsque le nombre d'étapes devient très grande.
On dira que S_n admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.
- d En notant S la valeur limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$: on notera $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$. Par passage à la limite de la formule ②, on obtient l'égalité :
$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot S.$$

Retrouver la valeur de S .

On vient de mettre en évidence une des propriétés de l'hypothèse du continu :

Tout segment peut être découpé en une infinité de segments tous de longueurs non-nulle.

E.2286  

Définition : (du petit Robert) dichotomie :

Division, subdivision binaire (entre deux éléments qu'on sépare nettement et qu'on oppose)

En admettant la thèse de la continuité, tout objet est divisible à l'infini. On sait que $\sqrt{2} \in [1; 2]$ car :

$$1^2 < (\sqrt{2})^2 < 2^2$$

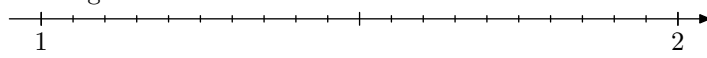
Deux nombres et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

Mise en place de l'algorithme :

- À l'étape 0 (l'étape initiale), on sait que $\sqrt{2}$ est contenu dans l'intervalle $[1; 2]$
- Pour passer à l'étape suivante, on considère le milieu de cet intervalle 1,5. Puis, on compare 1,5 et $\sqrt{2}$ afin de savoir si $\sqrt{2}$ est contenu dans l'intervalle $[1; 1,5]$ ou l'intervalle $[1,5; 2]$.
- On obtient ainsi un nouvel intervalle correspondant à l'étape 1.

On réitère ce procédé une infinité de fois. On notera $[a_n; b_n]$ l'intervalle correspondant à l'étape n et u_n sa longueur.

- ① a Donner la valeur de u_0, u_1 et u_2 .
b Placer les points a_0, b_0, a_1, b_2, a_3 et b_4 sur la droite graduée ci-dessous.
- 
- ② a Donner la valeur de u_n en fonction de n .
b Donner un encadrement de $b_n - a_n$ pour $n=10$.
En déduire la précision de l'approximation de $\sqrt{2}$ par u_{10} .
 - ③ Que devient la valeur de u_n lorsque n croît vers $+\infty$ (on dit que n tend vers l'infini). C'est-à-dire quel est la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Si la tortue a de l'avance sur Achille, celui-ci ne pourra jamais la rattraper, quelle que soit sa vitesse; car qu'Achille court pour atteindre le point d'où est partie la tortue, celle-ci avance de telle sorte qu'Achille ne pourra jamais annuler cette avance

On suppose que la tortue a pris un mètre d'avance, qu'Achille court à la vitesse de 2 m/s et la tortue à une vitesse de 1 m/s .

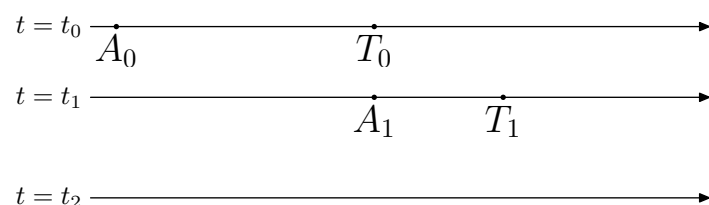
On note t_0 l'instant de départ, A_0 la position initiale d'Achille et T_0 celle de la tortue.

t_1 est l'instant où Achille atteint la position précédente de la Tortue. Notons A_1 cette position, la tortue continuant à avancer se trouve en T_1 .

Et ainsi de suite.

En se basant sur le fait qu'on puisse découper en autant de bout le parcours d'Achille et de la tortue (*hypothèse de la continuité*), on croit qu'Achille ne rattrapera jamais la tortue puisqu'il lui restera toujours une part du chemin à parcourir. Autre embêtement, tous ses petits segments mis bout à bout ont quelle mesure? Autrement dit, Achille rattrapera la tortue à l'infini?

- ① Placer sur la dernière droite graduée le point A_2 et T_2 .



- ② Donner les valeurs de $T_0 - A_0$, $T_1 - A_1$, $T_2 - A_2$.

- ③ On accepte le fait que, à tout rang d'étude, on a :

$$u_n = T_n - A_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Nous allons calculer à quelle distance du point d'Achille, les participants vont se rejoindre. On note :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

- a Développer : $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times S_n$

- b En déduire : $S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$

- c Donner la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini qu'on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_n.$$

Remarque :

- Les paradoxes de Zénon ont été rapportés par Aristote dans son livre sur la physique (*Livre VI*).
- On aurait aussi pu considérer les deux fonctions qui au temps associe la position d'Achille et de la tortue sur la droite et déterminer le point d'intersection.

E.2284   L'hypothèse du continu suppose que toute partie de droite peut être découpée indéfiniment et que chaque partie à une longueur non-nulle.

Cette hypothèse va à l'encontre de la conception de la matière en tant que composée d'atome; En théorie quantique, la lumière est vue comme une particule (*un photon*), mais également comme un phénomène vibratoire continu (*une onde*).

Le calcul infinitésimal est la branche des mathématiques qui étudient l'infiniment loin et l'infiniment proche.

(paradoxe de Zénon d'Élée)

"Il n'y a point de mouvement, car il faut que le mobile arrive au milieu de son parcours avant d'atteindre la fin"

Ce paradoxe est censé mettre en échec la continuité: on ne peut diviser indéfiniment une longueur.

Le Concept de la continuité est à l'opposé du discret (*théorie atomiste*).

2. Exercices non-classés

E.334   On considère un entier X formé de quatre chiffres:

$$X = x_3x_2x_1x_0.$$

Par exemple, 1579 vérifie :

$$x_3 = 1 \quad ; \quad x_2 = 5 \quad ; \quad x_1 = 7 \quad ; \quad x_0 = 9$$

- ① Parmi les deux phrases suivantes, dites celle qui est vraie :

- Si x_0 vaut zéro alors X est divisible par 5.
- Si X est divisible par 5 alors x_0 vaut zéro

- ② Parmi les deux phrases suivantes, dites celle qui est vraie :

- Pour que x_0 vaille 0, il est nécessaire que X soit divisible par 5.
- Pour que x_0 vaille 0, il est suffisant que X soit divisible par 5.

On dit alors (*ayer la mention inutile*):

" X est divisible par 5"

est une condition Nécessaire
Suffisante
pour que " x_4 vaille 0".

- ③ Parmi les deux phrases suivantes, donner celle qui est vraie :

- Pour que X soit divisible par 5, il est nécessaire que x_0 vaille 0.
- Pour que X soit divisible par 5, il est suffisant que x_0 vaille 0.

On dit alors (*ayer la mention inutile*):

" x_0 vaut 0"

est une condition Nécessaire
Suffisante

pour que “ X soit divisible par 5.”

4 On considère

Lorsque P est une condition à la fois nécessaire et à la fois suffisante pour Q , on dira que ces deux propriétés sont équivalentes et on notera :

$$P \iff Q$$

Compléter les pointillés afin d’obtenir l’équivalence suivante :

“ X est divisible par 5”

est équivalent à

“ x_0 vaut ”

E.301   La phrase “Je te colle si, et seulement si, tu parles” se décompose en deux phrases :

- Je te colle si tu parles
- Je te colle seulement si tu parles

Traduire chacune de ces deux phrases en une phrase s’écrivant sous la forme “Si ... Alors ...”

(un changement de temps peut être utile pour la traduction)

E.1868   Pour chacun des couples de propositions suivantes, dites si :

- A est nécessaire pour B ;
- A est suffisant pour B ;
- A est équivalent à B .

	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$
1	Le triangle ABC est rectangle	$AB^2 = AC^2 + BC^2$
2	$2x + 5 = 3$	$x = -1$
3	$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$	I milieu de $[AB]$
4	$x \geq 0$	$x \geq 3$
5	$a = 5$	$a^2 = 25$

E.1888   

$P \Rightarrow Q$ se lit “ P implique Q ”

Signifie que si on a la propriété P est vraie alors Q sera vraie.

Sa réciproque est $Q \Rightarrow P$

1 Voici quelques propriétés représentants des théorèmes connus. Donner le nom de ces théorèmes :

a $AB^2 + CB^2 = AC^2 \implies ABC$ est rectangle en A .

b $\left. \begin{array}{l} (CB) \parallel (MN) \\ M \in [AB] \\ N \in [AC] \end{array} \right\} \implies \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$

c $\left. \begin{array}{l} M \text{ milieu de } [AB] \\ N \in [AC] \\ (MN) \parallel (BC) \end{array} \right\} \implies N \text{ milieu de } [AC].$

2 Dire si la réciproque de ces théorèmes est vraie.

E.1968  

1 Placer 4 points A, B, C et D dans le plan.

2 On considère le point M vérifiant la relation :

$$\overrightarrow{AM} = 3 \cdot \overrightarrow{AC} + 5 \cdot \overrightarrow{CB} + 2 \cdot \overrightarrow{BD}$$

a Montrer que : $\overrightarrow{AM} = 3 \cdot \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{CD}$

b Placer le point M .

3 Soit N le point du plan vérifiant la relation :

$$\overrightarrow{AN} = 5 \cdot \overrightarrow{AC} + 2 \cdot \overrightarrow{CB} - 3 \cdot \overrightarrow{AD}$$

a Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AN}$ en fonction uniquement des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

b Placer le point N dans le plan.

E.2728    Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes :

- a Si $x < 2$ alors $x < 3$
- b Si $x < 3$ alors $x < 2$
- c Si $x \leq 3$ alors $x < 3$
- d Si $x < 3$ alors $x \leq 3$
- e Si $x = 2$ alors $2x + 3 = 7$
- f Si $2x + 3 = 7$ alors $x = 2$
- g Si $2x - 5$ alors $x < 3$
- h Si $x < 3$ alors $2x - 5 < 2$

E.36  

1 En remarquant que $10x = 9x + x$, montrer que la propriété “ $10^n + 1$ est multiple de 9”, dépendant de n , est héréditaire.

2 Pour autant, justifier que cette propriété est toujours fausse?

E.114  

1 On dispose de deux galettes de riz de forme carré : la première a pour côté 10 cm et la seconde 15 cm. On souhaite fabriquer deux galettes ayant même côté dont la somme de leurs aires vaut la somme des deux premières galettes. Quel est ce côté ?

2 Supposons maintenant que les deux galettes est respectivement pour longueur de leurs côtés a et b . Établir alors qu’une galette moyenne aura pour côté :

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

E.2012



Une entreprise de recyclage récupère un lot de digicodes, ayant tous un clavier identique à celui représenté ci-contre.

Chacun de ces digicodes a été programmé pour fonctionner avec un code constitué de deux signes choisis parmi les douze figurants sur ce clavier.

0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	A	B

Par exemple $A0$, BB , 43 sont des codes possibles.

Pour remettre en état de fonctionnement un tel digicode, il faut retrouver son code.

Pour faciliter une telle recherche, a été inscrit sur le boîtier de chaque digicode un nombre R qui dépend du code. Ce nombre a été obtenu de la manière suivante :

- Le code est considéré comme un nombre écrit en base 12 : A est le chiffre dix et B le chiffre 11.
- Le nombre R inscrit sur le boîtier est le reste de la division euclidienne du code, converti en base 10, par 53. R est donc un nombre écrit en base 10 et tel que $0 \leq R \leq 53$.

1 Combien y a-t-il de codes possibles?

2 On suppose que le code d'un digicode est AB .

- Écrire en base 10 le nombre dont l'écriture en base 12 est $(AB)_{\text{douze}}$.
- Déterminer le nombre R inscrit sur le boîtier de ce digicode.

3 Sur le boîtier d'un digicode est inscrit le nombre R égal à 25. Démontrer que $(21)_{\text{douze}}$ peut être le code de ce digicode.

4 On considère la fonction f , extrait d'un algorithme, où l'argument R est un entier naturel :

```

Fonction f(R)
  L ← liste vide
  n ← 0
  Tant que 53n+R ≤ 143
    Ajouter la valeur de 53n+R
      en f in de la liste L
    n ← n+1
  Fin Tant que
  Renvoyer L

```

- Quelle est la liste renvoyée par la fonction f lorsque la fonction f est appelée avec pour argument la valeur $R=25$?
- On suppose que le nombre R inscrit sur le boîtier d'un digicode est 25. Quels sont les trois codes possibles de ce digicode?

5 Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Si l'affirmation est considérée comme étant fausse, en apporter la preuve.

Affirmation : quelle que soit la valeur de R la fonction f permet de trouver trois codes parmi lesquels se trouve le code secret.