



1. Loi normale centrée réduite

E.5468 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

- ① À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs arrondies au millièm des intégrales suivantes :

(a) $\int_{-1}^1 f(t) dt$ (b) $\int_{-2}^2 f(t) dt$ (c) $\int_{-3}^3 f(t) dt$
 (d) $\int_{-4}^4 f(t) dt$ (e) $\int_{-5}^5 f(t) dt$ (f) $\int_{-9}^9 f(t) dt$

- ② Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x f(t) dt$$

E.5467 On considère une variable aléatoire suivant une loi de probabilité $\mathcal{N}(0; 1)$. À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs des probabilités suivantes arrondies au millièm :

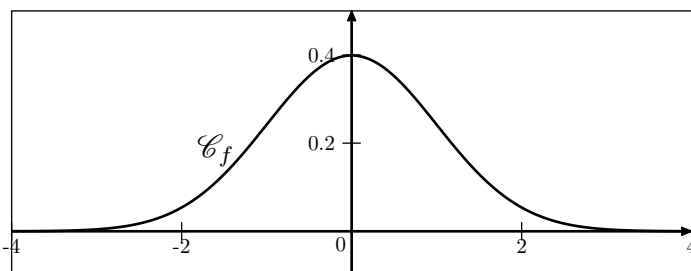
(a) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq -1)$ (b) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 2)$ (c) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 1)$

E.2654 On considère une variable aléatoire suivant une loi de probabilité $\mathcal{N}(0; 1)$. À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs des probabilités suivantes arrondies au millièm :

(a) $\mathcal{P}(-2 \leq \mathcal{X} \leq 3)$ (b) $\mathcal{P}(0 \leq \mathcal{X} \leq 2)$ (c) $\mathcal{P}(-4 \leq \mathcal{X} \leq 4)$

E.5470 On considère une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite ($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(0; 1)$).

- ① Donner la valeur de : $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 0)$.
 ② On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la densité f de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:



- (a) Interpréter graphiquement le nombre $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 2)$.
 (b) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur de $\mathcal{P}(0 \leq \mathcal{X} \leq 2)$ arrondie au millièm près.
 (c) En déduire la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 2)$, arrondie au millier près.

E.5471 On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale centrée réduite ($\mathcal{N}(0; 1)$). On donne la probabilité arrondie au millièm :

$$\mathcal{P}\left(\mathcal{X} \leq \frac{1}{2}\right) \approx 0,691$$

Sans la calculatrice, déterminer la valeur des probabilités suivantes :

(a) $\mathcal{P}(0 \leq \mathcal{X} \leq \frac{1}{2})$ (b) $\mathcal{P}(-\frac{1}{2} \leq \mathcal{X} \leq 0)$ (c) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq -\frac{1}{2})$

E.6953 Ci-dessous est donné le tableau de valeurs d'une variable $\mathcal{X}$ suivant une loi normale centrée réduite :

$t_1 \backslash t_2$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-2,0	0,0228	0,0233	0,0239	0,0244	0,025	0,0256	0,0262	0,0268	0,0274	0,0281
-1,9	0,0287	0,0294	0,0301	0,0307	0,0314	0,0322	0,0329	0,0336	0,0344	0,0351
-1,8	0,0359	0,0367	0,0375	0,0384	0,0392	0,0401	0,0409	0,0418	0,0427	0,0436
-1,7	0,0446	0,0455	0,0465	0,0475	0,0485	0,0495	0,0505	0,0516	0,0526	0,0537
-1,6	0,0548	0,0559	0,0571	0,0582	0,0594	0,0606	0,0618	0,063	0,0643	0,0655
-1,5	0,0668	0,0681	0,0694	0,0708	0,0721	0,0735	0,0749	0,0764	0,0778	0,0793
-1,4	0,0808	0,0823	0,0838	0,0853	0,0869	0,0885	0,0901	0,0918	0,0934	0,0951
-1,3	0,0968	0,0985	0,1003	0,102	0,1038	0,1056	0,1075	0,1093	0,1112	0,1131
-1,2	0,1151	0,117	0,119	0,121	0,123	0,1251	0,1271	0,1292	0,1314	0,1335
-1,1	0,1357	0,1379	0,1401	0,1423	0,1446	0,1469	0,1492	0,1515	0,1539	0,1562
-1,0	0,1587	0,1611	0,1635	0,166	0,1685	0,1711	0,1736	0,1762	0,1788	0,1814
-0,9	0,1841	0,1867	0,1894	0,1922	0,1949	0,1977	0,2005	0,2033	0,2061	0,209
-0,8	0,2119	0,2148	0,2177	0,2206	0,2236	0,2266	0,2296	0,2327	0,2358	0,2389
-0,7	0,242	0,2451	0,2483	0,2514	0,2546	0,2578	0,2611	0,2643	0,2676	0,2709
-0,6	0,2743	0,2776	0,281	0,2843	0,2877	0,2912	0,2946	0,2981	0,3015	0,305
-0,5	0,3085	0,3121	0,3156	0,3192	0,3228	0,3264	0,33	0,3336	0,3372	0,3409
-0,4	0,3446	0,3483	0,352	0,3557	0,3594	0,3632	0,3669	0,3707	0,3745	0,3783
-0,3	0,3821	0,3859	0,3897	0,3936	0,3974	0,4013	0,4052	0,409	0,4129	0,4168
-0,2	0,4207	0,4247	0,4286	0,4325	0,4364	0,4404	0,4443	0,4483	0,4522	0,4562
-0,1	0,4602	0,4641	0,4681	0,4721	0,4761	0,4801	0,484	0,488	0,492	0,496
-0,0	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,591	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,648	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,67	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,695	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,719	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,791	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,834	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,898	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,937	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq t_1 + t_2) \quad \mathcal{X} \sim \mathcal{N}(0; 1)$$

- ① À l'aide du tableau de valeurs, donner les probabilités suivantes :

(a) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 0,7)$ (b) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 1,47)$ (c) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq -0,44)$

- ② Les probabilités seront arrondies à 10^{-3} . En justifiant votre démarche, déterminer les probabilités suivantes :

- ☐ a $\mathcal{P}(\mathcal{X} > 1,5)$
☐ b $\mathcal{P}(\mathcal{X} > -0,37)$
☐ c $\mathcal{P}(-1 \leq \mathcal{X} \leq 1)$
☐ d $\mathcal{P}(-0,55 \leq \mathcal{X} < 1,2)$

E.5480   On considère la variable aléatoire centrée et réduite ($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(0; 1)$). Quelle est la probabilité que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ ait une valeur inférieure à 0,5 sachant

qu'elle a une valeur inférieure à 2?

- ☐ 0,706
☐ 0,707
☐ 0,708
☐ 0,709

2. Loi normale inverse centrée réduite

E.5469   Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$. Pour chaque question et à l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de a , arrondie au millièm, vérifiant les égalités :

- ☐ a $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq a) = 0,3$
☐ b $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq a) = 0,5$
☐ c $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq a) = 0,68$

E.5472   On considère une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite ($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(0; 1)$).

Dans chaque cas et à l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur, arrondie au millièm près, du nombre réel x réalisant les égalités suivantes :

- ☐ a $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq x) = 0,65$
☐ b $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq x) = 0,65$
☐ c $\mathcal{P}(-x \leq \mathcal{X} \leq x) = 0,65$
☐ d $\mathcal{P}(-x \leq \mathcal{X} \leq x) = 0,95$

Indication : on essayera de se ramener à des équations de la forme $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq x) = \alpha$

3. Loi normale et loi normale centrée réduite

E.5483   Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètre μ et σ^2 ($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$). On note $\mathcal{Z}$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite ($\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0; 1)$).

En centrant et en réduisant la variable aléatoire $\mathcal{X}$, établir l'égalité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq \mu) = 0,5$$

E.5478   Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres 3 et 4 ($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(3; 4)$) et $\mathcal{Z}$ une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite ($\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0; 1)$)

1 Exprimer les probabilités ci-dessous en fonction de la variable aléatoire $\mathcal{Z}$:

- ☐ a $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 2)$
☐ b $\mathcal{P}(\mathcal{X} < -2)$
☐ c $\mathcal{P}(-2 \leq \mathcal{X} \leq 3)$

2 À l'aide du tableau ci-dessous et en laissant les traces de votre démarche, déterminer les probabilités de la question 1.

$t_1 \backslash t_2$	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20
-3,00	0,0013	0,0016	0,0019	0,0022	0,0026
-2,75	0,003	0,0035	0,004	0,0047	0,0054
-2,50	0,0062	0,0071	0,0082	0,0094	0,0107
-2,25	0,0122	0,0139	0,0158	0,0179	0,0202
-2,00	0,0228	0,0256	0,0287	0,0322	0,0359
-1,75	0,0401	0,0446	0,0495	0,0548	0,0606
-1,50	0,0668	0,0735	0,0808	0,0885	0,0968
-1,25	0,1056	0,1151	0,1251	0,1357	0,1469
-1,00	0,1587	0,1711	0,1841	0,1977	0,2119
-0,75	0,2266	0,242	0,2578	0,2743	0,2912
-0,50	0,3085	0,3264	0,3446	0,3632	0,3821
-0,25	0,4013	0,4207	0,4404	0,4602	0,4801
0,00	0,5	0,5199	0,5398	0,5596	0,5793
0,25	0,5987	0,6179	0,6368	0,6554	0,6736
0,50	0,6915	0,7088	0,7257	0,7422	0,758
0,75	0,7734	0,7881	0,8023	0,8159	0,8289
1,00	0,8413	0,8531	0,8643	0,8749	0,8849
1,25	0,8944	0,9032	0,9115	0,9192	0,9265
1,50	0,9332	0,9394	0,9452	0,9505	0,9554
1,75	0,9599	0,9641	0,9678	0,9713	0,9744
2,0	0,9772	0,9798	0,9821	0,9842	0,9861
2,25	0,9878	0,9893	0,9906	0,9918	0,9929
2,50	0,9938	0,9946	0,9953	0,996	0,9965
2,75	0,997	0,9974	0,9978	0,9981	0,9984

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq t_1 + t_2) \quad \mathcal{X} \sim \mathcal{N}(0; 1)$$

4. Loi normale

E.5473   On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de paramètre 10 et 9 . ($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(10; 9)$).

- Donner l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer les probabilités suivantes arrondies au millième près :

(a) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 9)$ (b) $\mathcal{P}(0 \leq \mathcal{X} \leq 12)$

E.5474   On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de paramètre 3 et 4. ($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(3; 16)$).

- Donner l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
- On donne la probabilité arrondie au millième : $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 4) \approx 0,691$

Sans l'aide de la calculatrice, déterminer les probabilités suivantes :

(a) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 3)$ (b) $\mathcal{P}(3 \leq \mathcal{X} \leq 4)$
(c) $\mathcal{P}(2 \leq \mathcal{X} \leq 3)$ (d) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 2)$

E.5479   On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de paramètres -3 et 5 ($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(-3; 5)$).

- Donner la moyenne, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
- Sans l'aide de la calculatrice, parmi les probabilités ci-dessous, lesquelles ont une valeur strictement supérieure à $0,5$:

(a) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 0)$ (b) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 2)$ (c) $\mathcal{P}(\mathcal{X} > -4)$

E.6960    La société "Bonne Mamie" utilise une machine pour remplir à la chaîne des pots de confiture. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui à chaque pot de confiture produit associe la masse de confiture qu'il contient exprimée en grammes.

Dans le cas où la machine est correctement réglée, on admet que $\mathcal{X}$ suit une loi normale de moyenne $\mu = 125$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

On estime qu'un pot de confiture est conforme lorsque la masse de confiture qu'il contient est comprise entre 120 et 130 grammes.

On choisit au hasard un pot parmi ceux qui ont une masse de confiture inférieure à 130 grammes. Quelle est la probabilité que ce pot ne soit pas conforme? On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} .

E.5484



Une société de livraison dépose régulièrement ses colis à la mairie d'une ville. Deux trajets sont possibles au livreur pour se rendre à la mairie. Après des relevés effectués sur plusieurs livraisons, le manager fait les propositions suivantes :

- On note $\mathcal{X}$ est la variable aléatoire modélisant en minute la durée du trajet A. La variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi normale de paramètre 41 et 25 ($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(41; 25)$).
- On note $\mathcal{Y}$ est la variable aléatoire modélisant en minute la durée du trajet B. La variable aléatoire $\mathcal{Y}$ suit une loi

normale de paramètre 43 et 4 ($\mathcal{Y} \sim \mathcal{N}(43; 4)$).

Les colis doivent être livrés avant 12 h afin que la société ne paye pas de pénalité.

- En partant de l'entreprise à 11 h 16 min, quel trajet doit choisir le livreur pour avoir le plus de chance d'arriver à l'heure?
- En partant de l'entreprise à 11 h 15 min, quel trajet doit choisir le livreur pour avoir le plus de chance d'arriver à l'heure?

5. Loi normale: intervalle et écart-type

E.5481



Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres -2 et 4. ($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(-2; 4)$).

Sans calculatrice, donner les probabilités suivantes arrondies au centième près :

- (a) $\mathcal{P}(-4 \leq \mathcal{X} \leq 0)$ (b) $\mathcal{P}(-6 \leq \mathcal{X} \leq 2)$ (c) $\mathcal{P}(-8 \leq \mathcal{X} \leq 4)$

6. Loi normale: détermination d'un intervalle

E.5480



Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètre 2 et 9. ($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(2; 9)$).

On répondra aux questions à l'aide de la calculatrice :

- Déterminer la valeur de x , arrondie au centième près, vérifiant l'égalité : $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq x) = 0,24$
- Déterminer la valeur de x , arrondie au centième près, vérifiant l'égalité : $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq x) = 0,7$
- Déterminer la valeur de x , arrondie au centième près, vérifiant l'égalité : $\mathcal{P}(2-x \leq \mathcal{X} \leq 2+x) = 0,5$

Exprimer ces conditions sous la forme $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq x)$

E.5520



Une gaine est considérée comme conforme pour le diamètre lorsque le diamètre intérieur, exprimé en millimètres, appartient à l'intervalle $[8,12; 8,48]$.

On note $\mathcal{X}$, la variable aléatoire qui, à chaque gaine prélevée

au hasard dans la production d'une journée, associe son diamètre intérieur.

On admet que $\mathcal{X}$ suit la loi normale de moyenne 8,33 et d'écart type 0,09.

- Calculer la probabilité qu'une gaine ainsi prélevée soit conforme pour son diamètre intérieur.

On utilisera le tableau de valeur ci-dessous où la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ suit une loi normale centrée et réduite ($\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0; 1)$).

k	-3,52	-2,33	-1,96	-0,45	0,32	1,24	1,67	1,96
$\mathcal{P}(\mathcal{Z} \leq k)$	0,004	0,009	0,025	0,326	0,626	0,893	0,953	0,975

- Calculer le réel h positif tel que :
 $\mathcal{P}(8,33-h \leq \mathcal{X} \leq 8,33+h) = 0,95$
Interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.

7. Loi normale: recherche d'un paramètre

E.5512



L'entreprise Fructidoux fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination "compote allégée".

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production, associe sa teneur en sucre.

On suppose que $\mathcal{X}$ suit une loi normale d'espérance $m = 0,17$ et d'écart-type σ .

On suppose de plus que la probabilité, qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production soit conforme, est égale à 0,99.

Soit $\mathcal{Z}$ la variable aléatoire définie par : $\mathcal{Z} = \frac{\mathcal{X}-m}{\sigma}$.

- Quelle loi la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ suit-elle?
- Déterminer, en fonction de σ l'intervalle auquel appartient $\mathcal{Z}$ lorsque $\mathcal{X}$ appartient à l'intervalle $[0,16; 0,18]$.
- En déduire la valeur de σ arrondie à 10^{-3} près.

On pourra utiliser le tableau ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

$\mathcal{P}(-\beta \leq Z \leq \beta)$	β
0,985	2,4324
0,986	2,4573
0,987	2,4838
0,988	2,5121
0,989	2,5427

$\mathcal{P}(-\beta \leq Z \leq \beta)$	β
0,990	2,5758
0,991	2,6121
0,992	2,6521
0,993	2,6968
0,994	2,7478

E.5485   On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de paramètre 0 et σ^2 . ($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$).

On cherche à déterminer la valeur de σ de sorte qu'on ait la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 4) = 0,7$$

On note $\mathcal{Z}$ une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètre 0 et 1. ($\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0; 1)$)

- 1 Déterminer la valeur de x , arrondie au millièmè près, tel que : $\mathcal{P}(\mathcal{Z} \leq x) = 0,7$
- 2 En déduire une valeur approchée au millièmè près de l'écart-type σ recherché.

E.6954    Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques.

Le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire $\mathcal{Y}$ qui suit une loi normale d'espérance $\mu=1$ et d'écart type σ , σ étant un réel strictement positif.

Sachant que $\mathcal{P}(0,9 \leq \mathcal{Y} \leq 1,1) = 0,98$, déterminer la valeur de σ , arrondi au millièmè près.

E.6963    La durée de stationnement d'une voiture dans un parking de centre-ville est modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi normale d'espérance μ et

d'écart-type σ .

On sait que la moyenne du temps de stationnement dans ce parking est égale à 30 minutes et que 75 % des voitures ont un temps de stationnement inférieur à 37 minutes.

Le gestionnaire du parking vise l'objectif que 95 % des voitures aient un temps de stationnement entre 10 et 50 minutes. Cet objectif est-il atteint?

E.5486   On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de paramètre 3 et σ^2 .

Déterminer une valeur de σ arrondie au millièmè près afin que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ vérifie les probabilités suivantes :

$$\text{a) } \mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 2) = 0,4 \quad \text{b) } \mathcal{P}(|\mathcal{X} - 3| \leq 1) = 0,45$$

E.6328    Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité x (en cl) de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance 110 cl, peut être modélisée par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ de la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma=2$.

La législation impose qu'il y ait moins de 0,1 % de bouteilles contenant moins d'un litre.

À quelle valeur de la moyenne μ , arrondie à l'unité près, doit-on régler la machine pour respecter cette législation?

E.6327    La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus. Les spécifications impliquent que 80 % de la production des appareils a une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5 % de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

- 1 Quelles sont les valeurs de μ et σ^2 ? (On arrondira ces valeurs au dixième près)
- 2 Quelle est la probabilité, arrondie au millièmè près, d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours?

8. Loi binomiale et théorème de Moivre-Laplace

E.5494   On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètres 75 et 0,4 ($\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(75; 0,4)$).

- 1 Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ (on donnera les valeurs arrondies au millièmè près).
- 2 Déterminer, à l'aide de la calculatrice, les probabilités arrondies au millièmè près :
 a) $\mathcal{P}(18 \leq \mathcal{X} \leq 46)$ b) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 25)$ c) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 23)$

Rappels : on a les deux propriétés suivantes de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire $\mathcal{W}$:

$$E(a \cdot \mathcal{W} + b) = a \cdot E(\mathcal{W}) + b \quad ; \quad V(a \cdot \mathcal{W} + b) = a^2 \cdot V(\mathcal{W})$$

où a et b sont des nombres réels.

En notant $\mathcal{Z}$ la variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite ($\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0; 1)$), on considère la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ définie par la relation :

$$\mathcal{Y} = \sigma(\mathcal{X}) \cdot \mathcal{Z} + E(\mathcal{X})$$

- 3 a) Établir les égalités suivantes :

$$E(\mathcal{Y}) = E(\mathcal{X}) \quad ; \quad V(\mathcal{Y}) = V(\mathcal{X})$$

- b) Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ suit une loi normale de paramètres 30 et 18.
- c) Donner les probabilités arrondies au millièmè près :
 $\mathcal{P}(18 \leq \mathcal{Y} \leq 46)$; $\mathcal{P}(\mathcal{Y} \leq 25)$; $\mathcal{P}(\mathcal{Y} \geq 23)$
- 4 a) Pour tous nombres réels a et b vérifiant $a < b$, émettre une conjecture quant à la comparaison des deux probabilités ci-dessous :
 $\mathcal{P}(a \leq \mathcal{X} \leq b)$; $\mathcal{P}(a \leq \mathcal{Y} \leq b)$
- b) Quel théorème du cours permet de justifier cette conjecture?

E.5513



Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p=0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

- 1 Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\frac{\mathcal{X}-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.

On note $\mathcal{Z}$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Le tableau suivant donne les probabilités de l'événement $\{\mathcal{Z} < x\}$ pour quelques valeurs du nombre réel x .

x	-1,55	-1,24	-0,93	-0,62	-0,31	0,00
$\mathcal{P}(\mathcal{Z} < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500

x	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$\mathcal{P}(\mathcal{Z} < x)$	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

- 2 Calculer, au moyen de l'approximation proposée, une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'événement: "le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15".

E.5522



Une usine fabrique, en grande quantité, des rondelles d'acier pour la construction. Leur diamètre est exprimé en millimètres.

Les rondelles sont commercialisées par lot de 1 000.

On prélève au hasard un lot de 1 000 dans un dépôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1 000 rondelles.

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui, à tout prélèvement de 1 000 rondelles, associe le nombre de rondelles non conformes parmi ces 1 000 rondelles.

On admet que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit la loi binomiale de paramètres $n=1000$ et $p=0,02$.

- 1 Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
- 2
 - a Justifier l'approximation suivante: $\mathcal{P}(0 \leq \mathcal{X} \leq 15) \approx \mathcal{P}(-4,518 \leq \mathcal{Z} \leq -1,129)$ où $\mathcal{Z}$ suit une loi normale de paramètre 0 et 1.
 - b Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 15 rondelles non conformes dans le lot de 1 000 rondelles, arrondi au centième près.

E.6955



Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques.

Les billes passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune

ou rouge. Après avoir été mélangés, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.

Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

- 1 Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.
 - a On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3} .
 - b Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes?
- 2 Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99%, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif?

E.5493



On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètres 42 et 0,3 ($\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(42; 0,3)$).

- 1 Déterminer l'espérance, la variance et l'écart type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ au millièmè près.
- 2 À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur des probabilités suivantes au millièmè près:

$$\text{a) } \mathcal{P}(\mathcal{X}=13) \quad \text{b) } \mathcal{P}(8 \leq \mathcal{X} \leq 19)$$

- 3 a Pour tous réels a et b vérifiant $a < b$, justifier l'approximation suivante:

$$\mathcal{P}\left(a < \frac{\mathcal{X} - E(\mathcal{X})}{\sigma(\mathcal{X})} < b\right) \approx \mathcal{P}(a \leq \mathcal{Z} \leq b) \quad \text{où } \mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0; 1)$$

- b Établir les deux approximations suivantes:
 - $\mathcal{P}(8 \leq \mathcal{X} \leq 19) \approx \mathcal{P}(-1,549 \leq \mathcal{Z} \leq 2,155)$
 - $\mathcal{P}(7,5 \leq \mathcal{X} \leq 19,5) \approx \mathcal{P}(-1,717 \leq \mathcal{Z} \leq 2,323)$
- c Parmi les deux approximations précédentes, laquelle est la plus proche du résultat exact obtenu à la question 2 b?
- 4
 - Justifier que l'approximation suivante n'a pas de sens: $\mathcal{P}(13 \leq \mathcal{X} \leq 13) \approx \mathcal{P}(0,135 \leq \mathcal{Z} \leq 0,135)$
 - Justifier l'approximation suivante puis donner sa valeur au millièmè près: $\mathcal{P}(12,5 \leq \mathcal{X} \leq 13,5) = \mathcal{P}(-0,033 \leq \mathcal{Z} \leq 0,303)$

Remarque: l'utilisation de Moivre-Laplace permet d'approximer la variable $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale (donc discrète à valeurs entières) par une variable $\mathcal{X}_c$ suivant une loi normale (donc continue).

On ne peut pas approximer la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}=13)$ par la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}_c=13)$ car la variable $\mathcal{X}_c$ est continue et:

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}_c=13) = 0$$

A la place, on l'approxime par: $\mathcal{P}(12,5 \leq \mathcal{X}_c \leq 13,5)$

De même, on établira l'approximation:

$$\mathcal{P}(8 \leq \mathcal{X} \leq 19) = \mathcal{P}(7,5 \leq \mathcal{X}_c \leq 19,5)$$

Ce principe d'approximation s'appelle "correction de continuité"

9. Loi normale : intervalle de fluctuation de la fréquence

E.5517   On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}_n$ suivant une loi binomiale de paramètre n et p ($\mathcal{X}_n \sim \mathcal{B}(n; p)$).

On considère la variable aléatoire $\mathcal{Z}_n$ définie par :

$$\mathcal{Z}_n = \frac{\mathcal{X}_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

- ① En utilisant les propriétés de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire :

$$E(a \cdot \mathcal{X} + b) = a \cdot E(\mathcal{X}) + b \quad ; \quad V(a \cdot \mathcal{X} + b) = a^2 \cdot V(\mathcal{X})$$

Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\mathcal{Z}_n$.

- ② **a** Que peut-on dire de la valeur de la limite suivante :
- $$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(a \leq \mathcal{Z}_n \leq b)$$

- b** En déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(-1,96 \leq \mathcal{Z}_n \leq 1,96)$$

- ③ On note $\mathcal{F}_n = \frac{\mathcal{X}_n}{n}$. Démontrer que pour un entier n assez grand, on a :

$$\mathcal{P}\left(p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \mathcal{F}_n \leq p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \approx 0,95$$

E.5518   Une loterie propose 200 tickets dont 50 sont des tickets gagnants. On considère la variable $\mathcal{X}$ donnant, sur un lot de 40 tickets choisi au hasard, le nombre de tickets gagnants. On suppose que le nombre de tickets est suffisamment grand pour assimiler le tirage des 40 tickets à un jeu de tirage avec remise (*le fait de tirer un ticket ne modifie par les probabilités du jeu*).

- ① Préciser la loi suivie par la variable aléatoire $\mathcal{X}$, son espérance et son écart-type.
- ② En étudiant la loi binomiale, donner l'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 %.
- ③ **a** Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence au seuil de 95 %. (*on arrondit les bornes au millièème près*).
- b** Un grand joueur achète 40 tickets, mais ne possède que 7 tickets remportant un lot. Son tirage est-il représentatif au seuil de 95 % (*on utilisera l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %*).

E.6072    À des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : "88 % de notre thé garanti sans trace de pesticides".

Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. À cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides.

On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à 0,88.

On note $\mathcal{F}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides.

- ① Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire $\mathcal{F}$ au seuil de 95 %. (*on utilisera les valeurs approchées au millièème près*).
- ② L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95 %, que la publicité est mensongère ?

E.6074    Dans une usine, on utilise une machine pour fabriquer des pièces. On estime que la machine est convenablement réglée si 90 % des pièces qu'elle fabrique sont conformes.

On décide de contrôler cette machine en examinant n pièces choisies au hasard (n entier naturel) dans la production de la machine. On assimile ces n tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise.

On note $\mathcal{X}_n$ le nombre de pièces qui sont conformes dans l'échantillon de n pièces, et $\mathcal{F}_n = \frac{\mathcal{X}_n}{n}$ la proportion correspondante.

- ① Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}_n$ suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
- ② Dans cette question, on prend $n = 150$. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de la variable aléatoire $\mathcal{F}_{150}$ (*on utilisera les valeurs approchées au millièème*).
- ③ Un test qualité permet de dénombrer 21 pièces non conformes sur un échantillon de 150 pièces produites. Cela remet-il en cause le réglage de la machine ? Justifier la réponse.

10. Loi normale : hypothèse et intervalle de fluctuation

E.5516   On considère qu'une pièce est équilibrée. On lance 100 fois cette pièce et on considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ comptant le nombre de fois où la face "pile" est apparue.

- ① Donner la loi de la variable aléatoire $\mathcal{X}$, son espérance, sa variance et son écart-type.

- ② On définit la variable aléatoire $\mathcal{F}$ définie par : $\mathcal{F} = \frac{\mathcal{X}}{100}$

- a** Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence au seuil de 95 %.

- b** Après 100 lancers de pièces, Jean obtient 38 fois la face

"pile".

Peut-on rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la pièce est équilibrée ?

E.6959    Un fabricant d'ampoules cherche à améliorer sa qualité et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

- 1 Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.
- 2 A-t-on raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise?

E.6424   On sait que 39 % de la population française est du groupe sanguin A+.

On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.

On interroge 183 donneurs de sang et parmi eux, 34 % sont du groupe sanguin A+.

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse et justifier

la réponse :

“On ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population.”

E.6969    Un logiciel détecte les messages indésirables appelés spams (*messages malveillants, publicités, ...*) et les déplace dans un fichier appelé “dossier spam”. Le fabricant estime que 2,7 % des messages déplacés vers le dossier spam sont des messages fiables.

Une entreprise, équipée de ce logiciel, teste l'efficacité du logiciel. Le secrétariat prend la peine de compter le nombre de messages fiables parmi les messages déplacés. Il trouve 13 messages fiables parmi les 231 messages déplacés pendant une semaine.

Ces résultats remettent-ils en cause l'affirmation du fabricant?

11. Loi normale: intervalle de confiance de la proportion

E.6079    On cherche à étudier le nombre d'étudiants d'une université connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi les trois réponses possibles.

Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent correctement, parmi les 400 interrogés.

Donner un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de la proportion p des étudiants connaissant ce sigle dans cette université.

E.5521    Une entreprise fabrique en grande série des pièces de bois.

Dans cette partie, on considère une grande quantité de pièces devant être livrées à une chaîne d'hypermarchés. On considère un échantillon de 1000 pièces prélevées au hasard dans cette livraison.

La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.

On constate que 961 pièces sont sans défaut.

- 1 Quelle est la fréquence des pièces sans aucun défaut parmi cette livraison?
- 2 On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 pièces prélevées au hasard et avec remise dans cette livraison, associe la fréquence des pièces de cet échantillon qui sont sans défaut.

Déterminer l'intervalle de confiance à 95 % de la proportion p de pièces sans défaut dans la grande quantité devant être livrées.

E.6956    Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

On suppose que n personnes ont répondu à la question, et on admet que ces personnes constituent un échantillon aléatoire de taille n (où n est un entier naturel supérieur à 50).

Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet d'aménagement.

- 1 Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale.
- 2 Déterminer la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04.

E.5523



Une entreprise fabrique en grande série des plaques métalliques rectangulaires pour l'industrie automobile.

On considère une grande quantité de plaques devant être livrées à une chaîne de montage de véhicules électriques. On considère un échantillon de 10 000 plaques prélevées au hasard dans cette livraison. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.

On constate que 9394 plaques sont sans défaut.

- ① Dans cet échantillon, quelle est la proportion de plaques sans défaut?
- ② Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 10 000 pièces prélevées au hasard et avec remise dans cette livraison, associe la fréquence des pièces de cet échantillon qui sont sans défaut.

À la vue de l'échantillon prélevé, déterminer un intervalle de confiance à 95 % de pièces sans défaut contenues dans la grande quantité devant être livrées.

E.5519



Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante. Les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2} .

Partie A : loi normale

On prélève au hasard une botte de paille dans la production du 20 juillet 201.

Pour répondre aux questions suivantes, on se servira du tableau ci-dessous où la variable Z est une variable aléatoire normale centrée et réduite.

x	-3	-2	-1,242	-0,556	0,556	1,242	2	3
$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq x)$	0,001	0,023	0,107	0,289	0,711	0,893	0,977	0,999

- ① On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque botte prélevée son épaisseur, exprimée en millimètres. On admet que $\mathcal{X}$ suit la loi normale de moyenne 360 et d'écart-type 18.
Calculer la probabilité : $\mathcal{P}(350 \leq \mathcal{X} \leq 370)$.
- ② On note $\mathcal{Y}$, la variable aléatoire qui, à chaque botte prélevée dans la production de cette journée, associe sa densité exprimée en kg/m^3 . On admet que $\mathcal{Y}$ suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 5.
Calculer la probabilité qu'une botte, prélevée dans la production de cette journée ait une densité comprise entre $90 \text{ kg}/\text{m}^3$ et $110 \text{ kg}/\text{m}^3$.

Partie B : Loi binomiale

On considère un stock important de bottes de paille, dont une partie est destinée à un usage d'isolation. On note E l'événement : "une botte prélevée au hasard dans le stock est conforme aux normes d'isolation".

On suppose : $p(E) = 0,4$.

On prélève au hasard 5 bottes de paille dans le stock pour vérification de la conformité aux normes d'isolation. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 5 bottes.

On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement de 5 bottes ainsi défini, associe le nombre de bottes de paille conformes aux normes d'isolation.

- ① Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

- ② Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, toutes les bottes de paille soient conformes aux normes d'isolation.
- ③ Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins quatre bottes de paille soient conformes aux normes d'isolation.

Partie C : Intervalle de confiance

Dans cette partie, on considère les bottes de paille produites le 22 juillet 2011. On note p la proportion inconnue des bottes de paille de cette production qui sont conformes aux normes d'isolation.

On prélève au hasard un échantillon de 50 bottes de paille dans cette production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On constate que 37 bottes de paille de cet échantillon sont conformes aux normes d'isolation.

- ① Déterminer la fréquence observée de bottes conformes dans cet échantillon.
- ② Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p au niveau de confiance de 95 %.

E.7805



Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On note : $J = \int_0^1 g(x) dx$

Le but de cette partie est d'évaluer l'intégrale J à l'aide de la méthode probabiliste décrite ci-après.

On choisit au hasard un point $M(x; y)$ en tirant de façon indépendante ses coordonnées x et y au hasard selon la loi uniforme sur $[0; 1]$.

On admet que la probabilité p qu'un point tiré de cette manière soit situé sous la courbe $\mathcal{C}_g$ est égale à l'intégrale J .

En pratique, on initialise un compteur c à 0, on fixe un entier naturel n et on répète n fois le processus suivant :

- on choisit au hasard et indépendamment deux nombres x et y , selon la loi uniforme sur $[0; 1]$;
- si $M(x; y)$ est au-dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$, on incrémente le compteur c de 1.

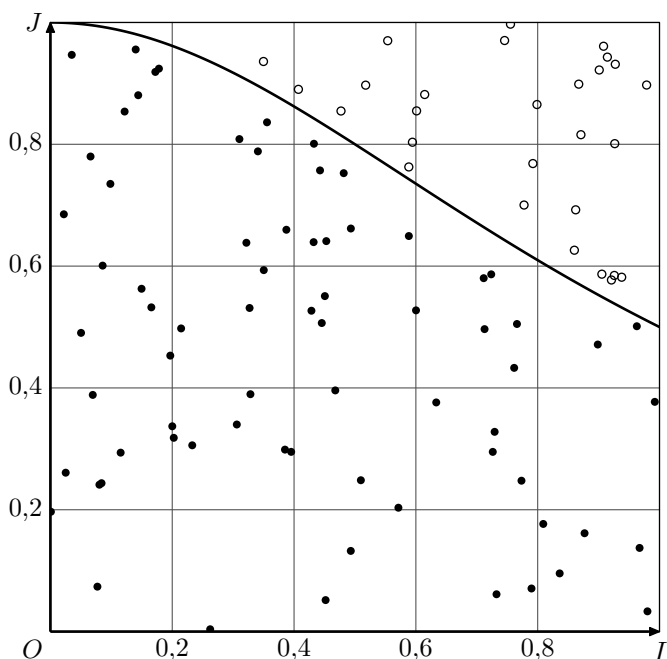
On admet que $f = \frac{c}{n}$ est une valeur approchée de J . C'est le principe de la méthode dite de Monte-Carlo.

La figure ci-dessous illustre la méthode présentée pour $n = 100$.

100 points ont été placés aléatoirement dans le carré.

Les disques noirs correspondent aux points sous la courbe, les disques blancs aux points au-dessous de la courbe.

Le rapport du nombre de disques noirs par le nombre total de disques donne une estimation de l'aire sous la courbe.



- 1 Recopier et compléter l'algorithme ci-après afin que la fonction `estimation()` retourne une valeur approchée

de J .

```
def estimation(n)
    c ← ...
    Pour i allant de 1 à ... faire
        x ← valeur aléatoire entre 0 et 1
        y ← ...
        Si ... alors
            ... prend la valeur ...
        Fin Si
    Fin Pour
    Renvoyer ...
```

L'argument n indiqué lors de l'appel à la fonction `estimation()` est le nombre de points choisis pour réaliser cette approximation.

- 2 Pour $n = 1000$, l'algorithme ci-dessus a donné pour résultat: $f = 0,781$.
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de J .
- 3 Quelle doit-être au minimum, la valeur de n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,02?

12. Loi normale centrée réduite et calculatrice

E.7398 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs des intégrales arrondies au millièmè près :

a $\int_{-1}^1 f(x) dx = \dots$ b $\int_{-2}^2 f(x) dx = \dots$ c $\int_{-9}^9 f(x) dx = \dots$

E.7399 On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$

suivant une loi de probabilité de moyenne 0 et d'écart-type 1. À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs des probabilités suivantes arrondies au millièmè :

a $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq -1)$ b $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 2)$ c $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 1)$

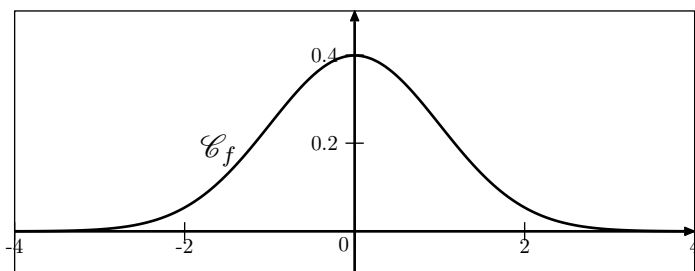
E.7400 On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi de probabilité de moyenne 0 et d'écart-type 1. À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs des probabilités suivantes arrondies au millièmè :

a $\mathcal{P}(-2 \leq \mathcal{X} \leq 3)$ b $\mathcal{P}(0 \leq \mathcal{X} \leq 2)$ c $\mathcal{P}(-4 \leq \mathcal{X} \leq 4)$

13. Loi normale centrée réduite, propriétés et calculatrice

E.7401 On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

- 1 Donner la valeur de: $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 0)$.
- 2 On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la densité f de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:



- a Interpréter graphiquement le nombre $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 2)$.
- b À l'aide de la calculatrice, donner la valeur de $\mathcal{P}(0 \leq \mathcal{X} \leq 2)$ arrondie au millièmè près.
- c En déduire la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 2)$ arrondie au millièmè près.

E.7402 On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1. On donne la probabilité arrondie au millièmè près: $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq \frac{1}{2}) \approx 0,691$

Sans la calculatrice, déterminer la valeur des probabilités suivantes :

a $\mathcal{P}(0 \leq \mathcal{X} \leq \frac{1}{2})$ b $\mathcal{P}(-\frac{1}{2} \leq \mathcal{X} \leq 0)$ c $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq -\frac{1}{2})$

14. Loi normale et calculatrice

E.7403   On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi normale de moyenne 10 et d'écart-type 3.

À l'aide de la calculatrice, déterminer les probabilités suivantes arrondies au millièème près :

- (a) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 9)$ (b) $\mathcal{P}(0 \leq \mathcal{X} \leq 12)$

E.7438   Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 3$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Déterminer les probabilités suivantes arrondies au millièème près :

- (a) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 2)$ (b) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 3,5)$ (c) $\mathcal{P}(2,5 \leq \mathcal{X} \leq 4)$

E.7439    Un étui est considéré comme conforme si son épaisseur est comprise entre 19,8 mm et 20,2 mm. Le fournisseur B souhaite qu'au moins 95 % des étuis produits soient conformes. Pour cela, il veut vérifier les réglages des machines de production.

On choisit un étui au hasard dans la production du fournisseur B .

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associée à l'épaisseur (en mm)

de l'étui. On admet que $\mathcal{X}$ suit une loi normale d'espérance 20 mm.

En observant les réglages des machines de production, le fournisseur B constate que l'écart-type de $\mathcal{X}$ est égal à 0,2.

Justifier qu'il faut revoir les réglages des machines.

E.7845    En janvier 2015, le directeur d'un musée d'art contemporain commande une enquête concernant les habitudes des visiteurs.

Pour gérer les flux des visiteurs, une partie de l'enquête a porté sur la durée d'une visite de ce musée. Il a été établi que la durée D d'une visite, en minutes, suit la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type $\sigma = 15$.

- Déterminer $\mathcal{P}(90 \leq D \leq 120)$ puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- Le directeur précise qu'il augmentera la capacité d'accueil de l'espace restauration du musée si plus de 2 % des visiteurs restent plus de 2 heures et 30 minutes par visite. Quelle sera alors sa décision?

15. Loi normale et propriété de la moyenne

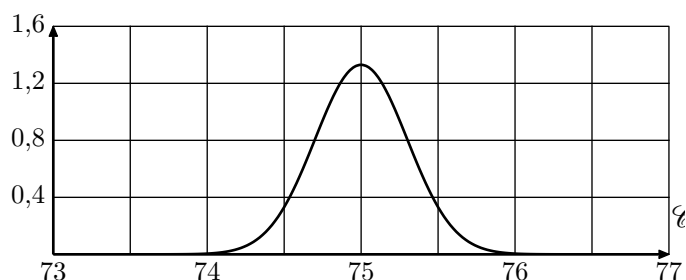
E.7442    Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} .

Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires.

Le diamètre exprimé en millimètre, d'une médaille fabriquée par cette entreprise est conforme lorsqu'il appartient à l'intervalle $[74,4; 75,6]$.

On note $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire qui, à chaque médaille prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre en millimètre. On suppose que la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type 0,25.

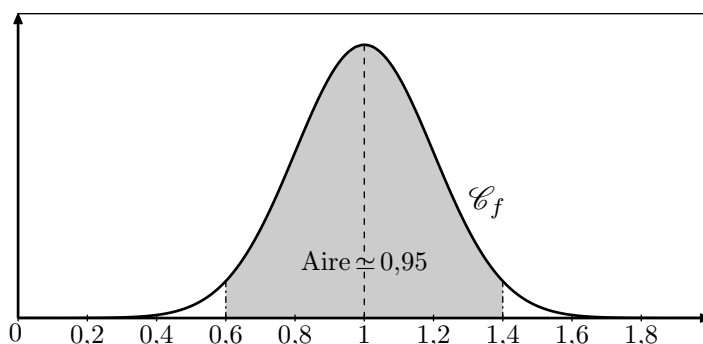
La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la densité de probabilité de $\mathcal{Y}$.



- Indiquer par lecture graphique la valeur de μ .
- Déterminer à l'aide de la calculatrice la probabilité

$$\mathcal{P}(74,4 \leq \mathcal{Y} \leq 75,6).$$

E.7393    On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale. La courbe de la figure ci-dessous représente la fonction de densité f associée à la variable $\mathcal{X}$:



Parmi les quatre propositions ci-dessous, une seule est correcte. Laquelle?

- L'espérance de $\mathcal{X}$ est 0,4.
- L'espérance de $\mathcal{X}$ est 0,95.
- L'écart-type de $\mathcal{X}$ est environ 0,4.
- L'écart-type de $\mathcal{X}$ est environ 0,2.

(On pourra utiliser la calculatrice pour justifier son choix.)

16. Loi normale et propriété de symétrie

E.7404   On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de moyenne 3 et d'écart-type 2.

On donne la probabilité arrondie au millièème près :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 4) \approx 0,691$$

Sans l'aide de la calculatrice, déterminer les probabilités suivantes :

- $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 3)$
- $\mathcal{P}(3 \leq \mathcal{X} \leq 4)$
- $\mathcal{P}(2 \leq \mathcal{X} \leq 3)$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 2)$

17. Loi normale et comparaison graphique

E.7488



Une étude est menée par une association de lutte contre la violence routière. Des observateurs, sur un boulevard d'une grande ville, se sont intéressés au comportement des conducteurs d'automobile au moment de franchir un feu tricolore.

On désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui compte le nombre de voitures par heure à proximité d'un feu.

On admet que $\mathcal{X}$ suit la loi normale de moyenne 3000 et d'écart-type 150.

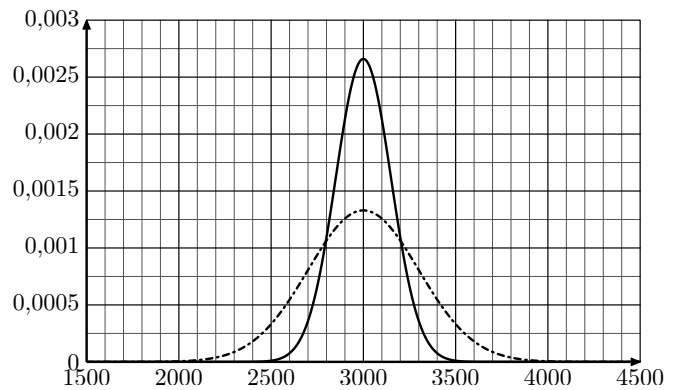
On arrondira les valeurs au millième près.

- 1 À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité de compter entre 2800 et 3200 voitures par heure à cet endroit.
- 2 À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité de compter plus de 3100 voitures par heure à cet endroit.
- 3 **Indication :** Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

À un autre endroit du boulevard, à proximité d'un pont, la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ qui compte le nombre de voitures par heure suit une loi normale de moyenne 300 et d'écart-type σ strictement supérieur à 150.

Sur le graphique ci-dessous, la courbe correspond à $\mathcal{X}$ est en traits pleins et la courbe correspondant à $\mathcal{Y}$ est en pointillés.

Déterminer à quel endroit du boulevard, à proximité du feu ou du pont, la probabilité pour qu'il passe en une heure, entre 2800 et 3200 voitures, est la plus grande. Justifier à l'aide du graphique.



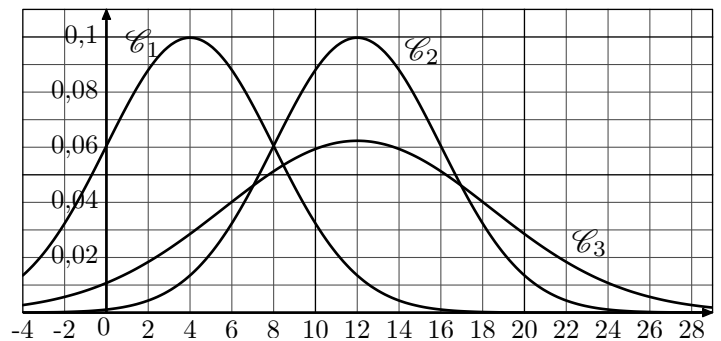
E.7391



L'AFDIAG a fait une enquête et a constaté que la maladie coeliaque était diagnostiquée en moyenne 11 ans après les premiers symptômes.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire représentant le temps en années mis pour diagnostiquer la maladie coeliaque à partir de l'apparition des premiers symptômes.

On admet que la loi de $\mathcal{X}$ peut être assimilée à la loi normale d'espérance $\mu = 12$ et d'écart-type $\sigma = 4$.



- 1 Justifier que la courbe $\mathcal{C}_1$ n'est pas la courbe de la densité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
- 2 a À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité $\mathcal{P}(10 \leq \mathcal{X} \leq 12)$.
b Des deux courbes $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, laquelle est la courbe représentative de la densité de $\mathcal{X}$.

18. Loi normale, écart-type et intervalle centrée

E.7843



Une entreprise spécialisée dans la personnalisation des étuis de smartphones fait ses achats chez un fournisseur.

Un étui est considéré conforme si son épaisseur est comprise entre 19,8 mm et 20,2 mm.

Le fournisseur souhaite qu'au moins 95 % des étuis produits soient conformes. Pour cela, il veut vérifier les réglages des machines de production.

On choisit un étui au hasard dans la production du fournisseur.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associée à l'épaisseur (en mm) de l'étui. On admet que $\mathcal{X}$ suit une loi normale d'espérance 20 mm.

- 1 En observant les réglages des machines de production, le fournisseur B constate que l'écart-type de $\mathcal{X}$ est égal à

0,2.

Justifier qu'il faut revoir les réglages des machines.

- 2 Déterminer une valeur de l'écart-type de $\mathcal{X}$ pour laquelle la probabilité qu'un étui soit conforme est environ égale à 0,95.

E.7491



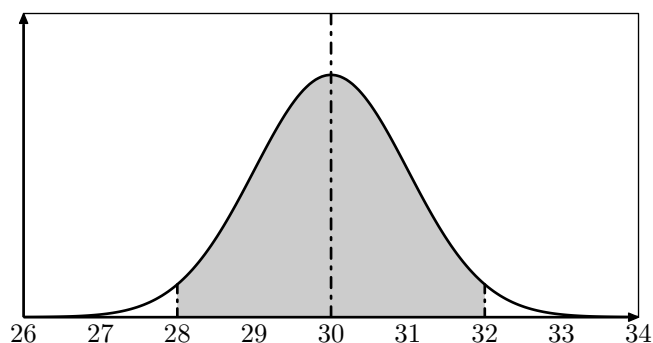
Une clé est dite conforme pour la lecture lorsque sa vitesse de lecture, exprimée en M/s , appartient à l'intervalle $[98; 103]$. Une clé est dite conforme pour l'écriture lorsque sa vitesse d'écriture exprimée en M/s appartient à l'intervalle $[28; 33]$.

- 1 On note $\mathcal{R}$ la variable aléatoire qui, à chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse de lecture. On suppose que la variable aléatoire R suit la loi normale d'espérance $\mu=100$ et d'écart-type $\sigma=1$.

Calculer la probabilité qu'une clé soit conforme pour la lecture.

- 2 On note $\mathcal{W}$ la variable aléatoire qui, chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse d'écriture. On suppose que la variable aléatoire $\mathcal{W}$ suit une loi normale.

Le graphique ci-après représente la densité de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{W}$.



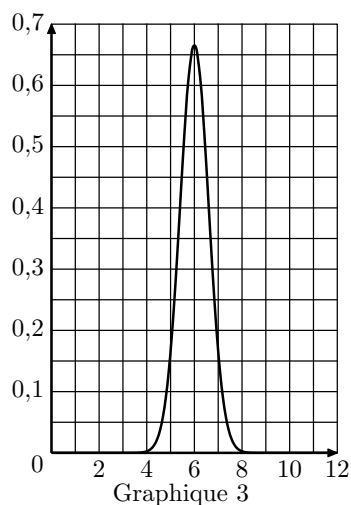
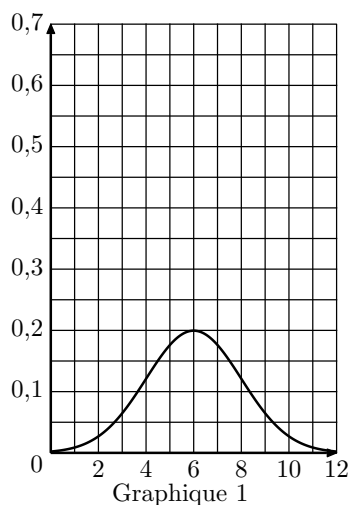
L'unité d'aire est choisie de façon à ce que l'aire sous la courbe soit égale à un et l'aire grisée est environ égale à 0,95 unité d'aire. La droite d'équation $x=30$ est un axe de symétrie de la courbe.

Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{W}$. Justifier

E.7394



Le temps hebdomadaire d'entraînement des coureurs du parcours rouge, exprimé en heure, peut être modélisé par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui suit la loi normale dont l'espérance est de 6 heures et l'écart type est de 2 heures.



Lequel des deux graphiques suivants, représente la fonction de densité de la loi normale de paramètres $\mu=6$ et $\sigma=2$? Justifier la réponse.

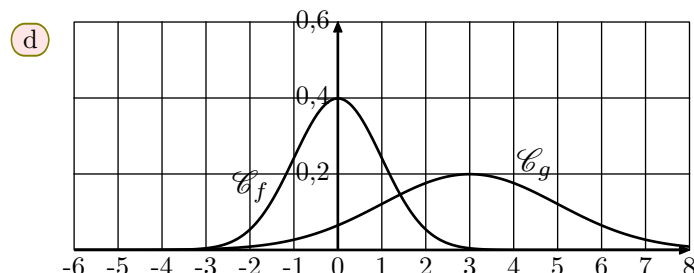
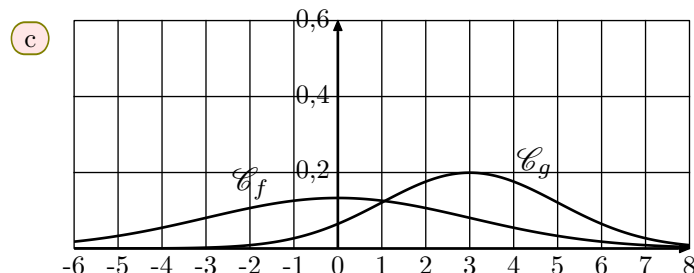
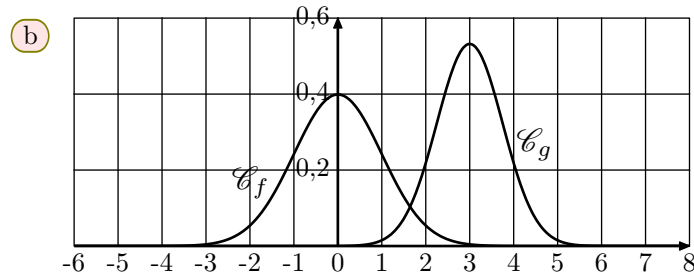
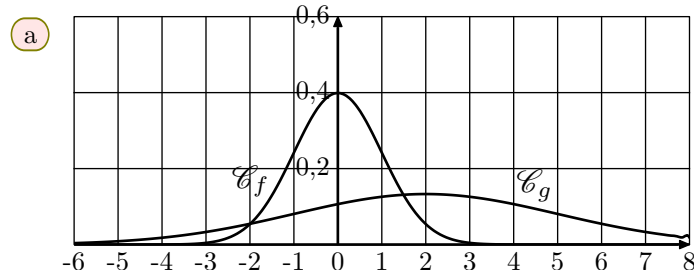
E.7437



Pour la proposition ci-dessous, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Laquelle? Justifier votre réponse.

La fonction f est la fonction densité de probabilité associée à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. La fonction g est la fonction de densité de probabilité associée à la loi normale de moyenne $\mu=3$ et d'écart-type $\sigma=2$.

La représentation graphique de ces deux fonctions est :



19. Loi normale et probabilité conditionnelle

E.7489



Un client du magasin s'inquiète de la durée de vie du téléphone qu'il vient de s'offrir de type T_1 .

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque téléphone mobile de type T_1 prélevé au hasard dans la production, associe sa durée de vie, en mois.

On admet que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit la loi normale

d'espérance $\mu = 48$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

- 1 Justifier que la probabilité que le téléphone de type T_1 prélevé fonctionne plus de 3 ans, c'est-à-dire 36 mois, est d'environ 0,885.
- 2 On sait que le téléphone de type T_1 prélevé a fonctionné plus de 3 ans. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne moins de 5 ans?

20. Loi normale inverse

E.7834



Un marathon est une épreuve sportive de course à pied.

On suppose que le temps en minute mis par un marathonien pour finir le marathon de Tartonville est modélisé par une variable aléatoire $\mathcal{T}$ qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart type $\sigma = 39$.

- Calculer : $\mathcal{P}(\mathcal{T} \leq 300)$
- Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel t , arrondi à l'unité, vérifiant : $\mathcal{P}(\mathcal{T} \geq t) = 0,9$.
- Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.

E.7167



Des bateaux électriques sont équipés d'une batterie d'une autonomie moyenne de 500 minutes.

Les batteries des bateaux sont rechargées uniquement à la fin de chaque journée d'utilisation.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire correspondant à la durée de fonctionnement de la batterie d'un bateau, exprimée en minutes. On admet que $\mathcal{X}$ suit la loi normale d'espérance $\mu = 500$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

On souhaite connaître la durée d'utilisation, en minutes, par jour de chaque bateau afin que seuls 1 % des bateaux soient déchargés avant la fin de la journée.

E.7443



Indication : cet exercice est un QCM (*questionnaire à choix multiples*). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapport 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Des chercheurs ont conçu un test pour évaluer la rapidité de lecture d'élèves de CE2. Ce test consiste à chronométrer la lecture d'une liste de 20 mots. On a fait passer ce test à un très grand nombre d'élèves de CE2. On appelle $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui donne le temps en seconde mis par un élève de CE2 pour passer le test. On admet que $\mathcal{X}$ suit la loi normale d'espérance $\mu = 32$ et d'écart-type $\sigma = 13$.

- 1 La probabilité $\mathcal{P}(19 \leq \mathcal{X} \leq 45)$ arrondie au centième est :
 (a) 0,50 (b) 0,68 (c) 0,84 (d) 0,95
- 2 On note t la durée de lecture vérifiant $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq t) = 0,9$. La valeur de t arrondie à l'entier est :
 (a) $t = 32s$ (b) $t = 45s$ (c) $t = 49s$ (d) $t = 58s$

21. Loi normale : annales

E.6985



Une base nautique propose la location de différentes embarcations pour visiter les gorges du Verdon. Les touristes peuvent louer des kayaks, des pédalos ou des bateaux électriques, pour une durée de 1 heure ou 2 heures.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une étude statistique met en évidence que :

- 40 % des embarcations louées sont des pédalos ;
- 35 % des embarcations louées sont des kayaks ;
- Les autres embarcations louées sont des bateaux électriques ;
- 60 % des pédalos sont loués pour une durée de 1 heure ;
- 70 % des kayaks sont loués pour une durée de 1 heure ;
- la moitié des bateaux électriques sont loués pour une durée de 1 heure.

On interroge au hasard un touriste qui vient pour louer une embarcation. On note A , B , C , D et E les événements suivants :

- A : "l'embarcation louée est un pédalo" ;
- B : "l'embarcation louée est un kayak" ;
- C : "l'embarcation louée est un bateau électrique" ;
- D : "l'embarcation est louée pour une durée de 1 heure" ;
- E : "l'embarcation est louée pour une durée de 2 heures".

- 1 Traduire la situation par un arbre pondéré.
- 2 Calculer la probabilité que l'embarcation soit louée pour une durée de 2 heures est égale à 0,39.
- 3 Sachant que l'embarcation a été louée pendant 2 heures, quelle est la probabilité que ce soit un bateau électrique? Arrondir le résultat au centième.
- 4 La base nautique pratique les tarifs suivants :

	1 heure	2 heures
Pédalo	15 €	25 €
Kayak	10 €	16 €
Bateau électrique	35 €	60 €

En moyenne, 200 embarcations sont louées par jour. Déterminer la recette journalière que peut espérer la base nautique

Partie B

Dans cette partie les résultats seront arrondis au millième

Les bateaux électriques sont équipés d'une batterie d'une autonomie moyenne de 500 minutes.

Les batteries des bateaux sont rechargées uniquement à la fin de chaque journée d'utilisation.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire correspondant à la durée de fonctionnement de la batterie d'un bateau, exprimée en minutes. On admet que $\mathcal{X}$ suit la loi normale d'espérance $\mu=500$ et d'écart-type $\sigma=10$.

- 1 À l'aide de la calculatrice, calculer $\mathcal{P}(490 < \mathcal{X} < 520)$.
- 2 Chaque jour, les bateaux sont utilisés pendant une durée de 8 heures sans être rechargés.
Déterminer la probabilité que la batterie d'un bateau soit déchargée avant la fin de la journée.
- 3 Déterminer l'entier a tel que : $\mathcal{P}(\mathcal{X} < a) \approx 0,01$
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

E.6991



Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

D'après le "bilan des examens du permis de conduire" pour l'année 2014 publiée par le ministère de l'Intérieur en novembre 2015, 20 % des personnes qui se sont présentées à l'épreuve pratique du permis de conduire avaient suivi la filière de l'apprentissage anticipée de la conduite (AAC).

Parmi ces candidats, 75 % ont été reçus à l'examen. Pour les candidats n'ayant pas suivi la filière AAC, le taux de réussite à l'examen était seulement de 56,6 %.

On choisit au hasard l'un des candidats à l'épreuve pratique du permis de conduire en 2014.

On considère les événements suivants :

- A "le candidat a suivi la filière AAC" ;
- R "le candidat a été reçu à l'examen".

On rappelle que si E et F sont deux événements, la probabilité de l'événement contraire de E .

- 1 a Donner les probabilités $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}_A(R)$ et $\mathcal{P}_{\bar{A}}(R)$.
b Traduire la situation par un arbre pondéré.
- 2 a Calculer la probabilité $\mathcal{P}(A \cap R)$.
b Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.
- 3 Justifier que : $\mathcal{P}(R) = 0,6028$
- 4 Sachant que le candidat a été reçu à l'examen, calculer la probabilité qu'il ait suivi la filière AAC, puis donner sa valeur arrondie à 10^{-4} près.

Partie B

Un responsable d'auto-école affirme que pour l'année 2016, la probabilité d'être reçu à l'examen est égale à 0,62.

Ayant des doutes sur cette affirmation, une association d'automobilistes décide d'interroger 400 candidats à l'examen parmi ceux de 2016. Il s'avère que 220 d'entre eux ont effectivement obtenu le permis de conduire.

- 1 Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de candidats reçus dans un échantillon aléatoire de 400 candidats.
- 2 Peut-on émettre des doutes sur l'affirmation du responsable de cette auto-école?
Justifier votre réponse.

Partie C

Selon une enquête menée en 2013 par l'association "Prévention routière", le coût moyen d'obtention du permis de conduire atteignait environ 1 500 €. On décide de modéliser le coût d'obtention du permis de conduire par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui suit la loi normale d'espérance $\mu=1\,500$ et d'écart-type $\sigma=410$.

- 1 Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-2} près, que le coût du permis de conduire soit compris entre 1 090 € et 1 910 €.
- 2 Déterminer : $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 1\,155)$
On donnera le résultat arrondi à 10^{-2} près.
- 3 a Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel a arrondi à l'unité, vérifiant :
 $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq a) = 0,2$.

b Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

E.6972    Un marathon est une épreuve sportive de course à pied.

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Une étude portant sur le marathon de Tartonville montre que :

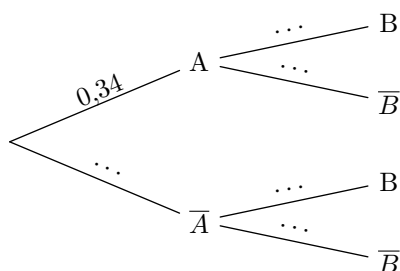
- 34 % des coureurs terminent la course en moins de 234 minutes ;
- parmi les coureurs qui terminent la course en moins de 234 minutes, 5 % ont plus de 60 ans ;
- parmi les coureurs qui terminent la course en plus de 234 minutes, 84 % ont moins de 60 ans.

On sélectionne au hasard un coureur et on considère les événements suivants :

- A : “le coureur a terminé le marathon en moins de 234 minutes” ;
- B : “le coureur a moins de 60 ans”.

On rappelle que si E et F sont deux événements, la probabilité de l'événement E est notée $\mathcal{P}(E)$ et celle de E sachant F est notée $\mathcal{P}_F(E)$. De plus, $\bar{E}$ désigne l'événement contraire de E .

- 1 Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous associé à la situation de l'exercice :



- 2 a Calculer la probabilité que la personne choisie ait terminé le marathon en moins de 234 minutes et soit âgée de plus de 60 ans.
- b Vérifier que : $\mathcal{P}(\bar{B}) = 0,123$
- c Calculer $\mathcal{P}_{\bar{B}}(A)$ et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

Partie B

On suppose que le temps en minutes mis par un marathonien pour finir le marathon de Tartonville est modélisé par une variable aléatoire $\mathcal{T}$ qui suit une loi normale d'espérance $\mu=250$ et d'écart-type $\sigma=39$.

- 1 Calculer $\mathcal{P}(210 \leq \mathcal{T} \leq 270)$
- 2 Un coureur est choisi au hasard parmi les coureurs qui ont mis entre 210 minutes et 270 minutes pour finir le marathon.
- Calculer la probabilité que ce coureur ait terminé la course en moins de 240 minutes.
- 3 a Calculer $\mathcal{P}(\mathcal{T} \leq 300)$
- b Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel t , arrondi à l'unité, vérifiant : $\mathcal{P}(\mathcal{T} \geq t) = 0,9$

c Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.

E.6977    D'après l'AFDIAG (*Association Française Des Intolérants au Gluten*), la maladie coeliaque, aussi appelée intolérance au gluten, est une des maladies digestives les plus fréquentes. Elle touche environ 1 % de la population.

On estime que seulement 20 % des personnes intolérantes au gluten passent le test pour être diagnostiquées.

On considère que si une personne n'est pas intolérante au gluten, elle ne passe pas le test pour être diagnostiquée.

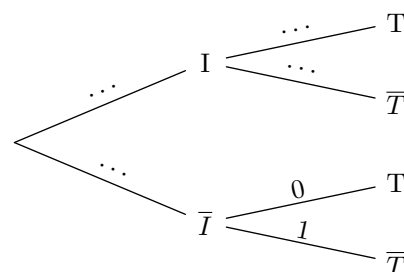
On choisit au hasard une personne dans la population française qui compte environ 66,6 millions d'habitants au 1^{er} janvier 2016.

On considère les événements :

- I : “la personne choisie est intolérante au gluten” ;
- T : “la personne choisie passe le test pour être diagnostiquée”

Partie A

- 1 Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :



- 2 Calculer la probabilité que la personne choisie soit intolérante au gluten et ne passe pas le test pour être diagnostiquée.
- 3 Montrer que : $\mathcal{P}(T) = 0,002$

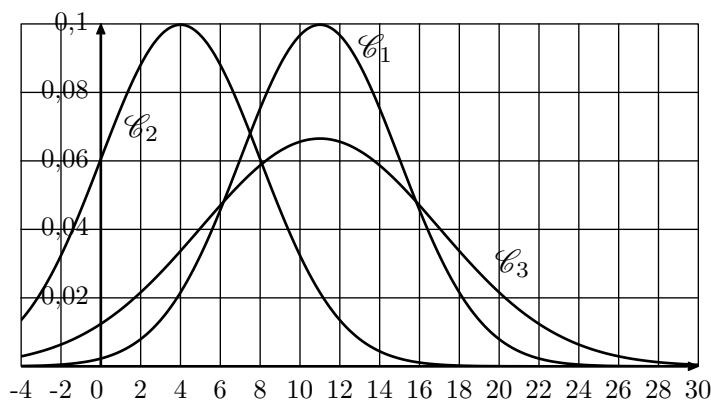
Partie B

L'AFDIAG a fait une enquête et a constaté que la maladie coeliaque était diagnostiquée en moyenne 11 ans après les premiers symptômes.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire représentant le temps en années mis pour diagnostiquer la maladie coeliaque à partir de l'apparition des premiers symptômes.

On admet que la loi de $\mathcal{X}$ peut être assimilée à la loi normale d'espérance $\mu=11$ et d'écart-type $\sigma=4$.

- 1 Calculer la probabilité que la maladie soit diagnostiquée entre 9 ans et 13 ans après les premiers symptômes. Arrondir le résultat à 10^{-3} .
- 2 Calculer $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 6)$. Arrondir le résultat à 10^{-3} .
- 3 Sachant que $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq a) = 0,84$, donner la valeur de a arrondie à l'unité.
- Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
- 4 Laquelle de ces trois courbes représente la fonction de densité de la loi normale d'espérance $\mu=11$ et d'écart-type $\sigma=4$? Justifier le choix. On pourra s'aider des réponses aux questions précédentes.



E.6979



Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

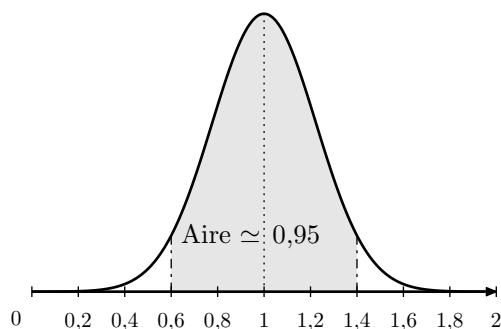
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

- 1 On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2}{x}$$

La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[1; e]$ est :

- 2 On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale. La courbe ci-dessous représente la fonction densité f associée à la variable $\mathcal{X}$.



- 3 À l'occasion de son inauguration, un hypermarché offre à ses clients un ticket à gratter par tranche de 10 euros d'achats. L'hypermarché **affirme** que 15 % des tickets à gratter sont gagnants, c'est-à-dire donneront droit à un bon d'achat de 5 euros.

Amandine a reçu 50 tickets à gratter après un achat de 500 euros dans cet hypermarché. Deux d'entre eux étaient gagnants.

On suppose que le nombre de tickets à gratter est suffisamment important pour considérer qu'un échantillon de 50 tickets correspond à un tirage aléatoire avec remise.

- a L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est $[0,051; 0,249]$, les bornes étant arrondies au millièm.
- b L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est $[0,100; 0,200]$, les bornes étant arrondies au millièm.
- c La fréquence de tickets gagnants reçus par Amandine est $\frac{50}{500}$.
- d Amandine peut annoncer avec un risque de 5 % que l'affirmation de l'hypermarché n'est pas mensongère.

E.6986

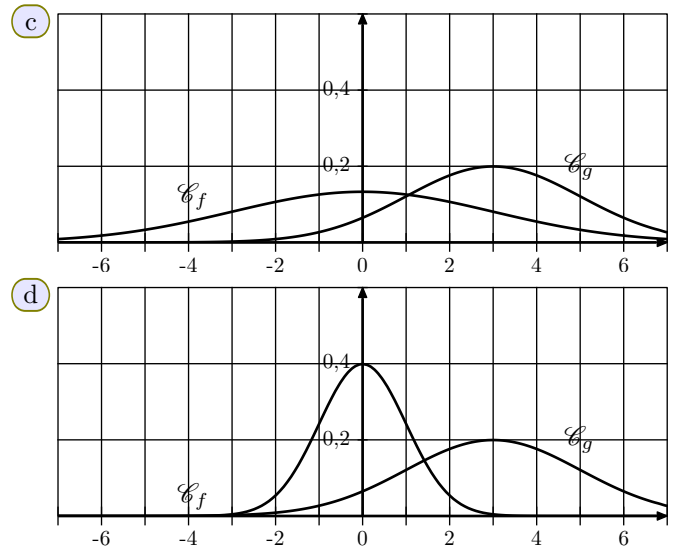
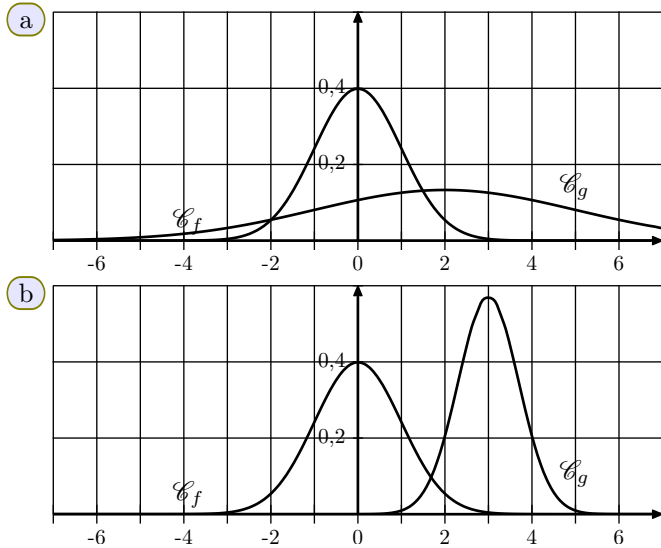


Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

- 1 A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire. On note $\bar{B}$ l'événement contraire de B . On sait que : $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,5$; $P(A \cap B) = 0,42$. On peut affirmer que :
- a $P_A(B) = 0,3$ b $P(A \cup B) = 0,58$
- c $P_B(A) = 0,84$ d $P(A \cap \bar{B}) = 0,28$
- 2 Dans une station de ski, le temps d'attente à un télésiège donné, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 5]$.
- a L'espérance de cette loi $\mathcal{X}$ est $\frac{2}{5}$
- b $P(\mathcal{X} > 2) = \frac{3}{5}$ c $P(\mathcal{X} \leq 2) = \frac{3}{5}$
- d $P(\mathcal{X} \leq 5) = 0$
- 3 Une machine remplit des flacons dont le volume annoncé est de 100 ml . On admet que le volume contenu dans le flacon peut être modélisé par une variable aléatoire $\mathcal{Y}$ qui suit la loi normale d'espérance 100 ml et d'écart-type 2 ml .
- a $P(\mathcal{Y} \leq 100) = 0,45$ b $P(\mathcal{Y} > 98) = 0,75$
- c $P(96 \leq \mathcal{Y} \leq 104) \approx 0,95$ d $P(\mathcal{Y} \leq 110) \approx 0,85$
- 4 Un article de journal affirme, qu'en France, il y a 16 % de gauchers. Un chercheur souhaite vérifier cette affirmation. Pour cela, il veut déterminer la taille de l'échantillon de la population française à étudier qui permettrait d'obtenir un intervalle de confiance d'amplitude égale à 0,1 au niveau de confiance de 0,95. La taille de l'échantillon est :
- a 30 b 64 c 100 d 400
- 5 La fonction f est la fonction densité de probabilité associée à la normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. La fonction g est la fonction de densité de probabilité associée à la loi normale de moyenne $\mu = 3$ et d'écart type

$\sigma = 2$. La représentation graphique de ces fonctions est :



22. Intervalle de fluctuation asymptotique

E.7842    Une entreprise spécialisée dans la personnalisation des étuis de smartphones fait ses achats chez un fournisseur qui lui garantit 94 % d'étuis non défectueux.

Un employé de l'entreprise prélève un échantillon de 400 étuis qui proviennent de son fournisseur.

Il constate que 350 de ces étuis ne sont pas défectueux.

- 1 Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des étuis défectueux dans un échantillon aléatoire de 400 étuis provenant du fournisseur.
On donnera des valeurs approchées au millièème des bornes de cet intervalle.

- 2 Faut-il informer le fournisseur d'un problème?

E.7836    Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Parmi les quatre réponses proposées, une seule est exacte. Laquelle? Justifier votre réponse.

À l'occasion de son inauguration, un hypermarché offre à ses clients un ticket à gratter par tranche de 10 euros d'achats. L'hypermarché affirme que 15 % des tickets à gratter sont gagnants, c'est-à-dire donneront droit à un bon d'achat de 5 euros.

Amandine a reçu 50 tickets à gratter après un achat de 500 euros dans cet hypermarché. Deux d'entre eux étaient gagnants.

On suppose que le nombre de tickets à gratter est suffisamment important pour considérer qu'un échantillon de 50 tickets correspond à un tirage aléatoire avec remise.

- a L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est $[0,051; 0,249]$, les bornes étant arrondies au millièème.
- b L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est $[0,100; 0,200]$, les bornes étant arrondies au millièème.
- c La fréquence de tickets gagnants reçus par Amandine est $\frac{50}{500}$.
- d Amandine peut annoncer avec un risque de 5 % que l'affirmation de l'hypermarché n'est pas mensongère.

E.7839    Un responsable d'auto-école affirme que pour l'année 2016, la probabilité d'être reçu à l'examen est égale à 0,62.

Ayant des doutes sur cette affirmation, une association d'automobilistes décide d'interroger 400 candidats à l'examen parmi ceux de 2016. Il s'avère que 220 d'entre eux ont effectivement obtenu le permis de conduire.

① Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de candidats reçus dans un échantillon aléatoire de 400 candidats.

② Peut-on émettre des doutes sur l'affirmation du responsable de cette auto-école?
Justifier votre réponse.

E.7840    Les résultats seront arrondis au millième près.

Sur la devanture de son magasin, le gérant du supermarché affiche :

23. Intervalle de confiance

E.7835    Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. Laquelle? Justifier votre réponse.

Une entreprise fabrique des tubes métalliques de largeur 2 m. Un tube métallique est considéré comme étant dans la norme si sa longueur est comprise entre 1,98 m et 2,02 m. On prélève au hasard un échantillon de 1 000 tubes, on observe que 954 tubes sont dans la norme.

L'intervalle de confiance de la fréquence des tubes dans la norme pour cette entreprise au niveau de confiance de 95 %, avec les bornes arrondies à 10^{-3} est :

- ☐ a [0,922 ; 0,986] ☐ b [0,947 ; 0,961]
☐ c [1,98 ; 2,02] ☐ d [0,953 ; 0,955]

24. Intervalle de confiance et amplitude

E.7833    Parmi les questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est correcte. Laquelle? Justifier votre réponse.

Une enquête sanitaire a pour objectif d'estimer la proportion de personnes qui respectent le calendrier de vaccinations préconisé par le Haut Conseil de la Santé Publique. Pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude 0,01 au niveau de confiance 0,95 de cette proportion, il faut interroger :

- ☐ a 200 personnes ☐ b 400 personnes
☐ c 10 000 personnes ☐ d 40 000 personnes

E.7838    Un article de journal affirme,

“Plus de 90 % des clients de notre magasin sont satisfaits par la mise en place de nos caisses automatiques”

Une association de consommateurs souhaite examiner cette affirmation. Pour cela, elle réalise un sondage : 860 clients sont interrogés, et 763 d'entre eux se disent satisfaits par la mise en place de ces caisses automatiques.

Cela remet-il en question l'affirmation du gérant?

E.7844    En janvier 2015, le directeur d'un musée d'art contemporain commande une enquête concernant les habitudes des visiteurs.

Sur l'ensemble des musées d'art contemporain, 22 % des visiteurs sont de nationalité étrangère. Sur un échantillon aléatoire de 2 000 visiteurs du musée considéré précédemment, 490 visiteurs sont de nationalité étrangère.

Que peut-on en conclure le directeur de ce musée? Argumenter.

E.7841    Parmi les réponses proposées, une seule est exacte. Laquelle? Justifier votre réponse.

Un institut de sondage réalise une enquête afin de mesurer le degré de satisfaction du service après-vente d'une société. Une première étude portant sur un échantillon aléatoire de 500 clients révèle que l'on dénombre 438 clients satisfaits. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 permettant d'estimer la proportion de clients satisfaits est :

- ☐ a [0,079 ; 0,169] ☐ b [0,455 ; 0,545]
☐ c [0,831 ; 0,921] ☐ d [0,874 ; 0,878]

qu'en France, il y a 16 % de gauchers. Un chercheur souhaite vérifier cette affirmation. Pour cela, il veut déterminer la taille de l'échantillon de la population française à étudier qui permettrait d'obtenir un intervalle de confiance d'amplitude égale à 0,1 au niveau de confiance de 0,95. La taille de l'échantillon est :

- ☐ a 30 ☐ b 64 ☐ c 100 ☐ d 400

E.7848    Un laboratoire désire tester l'efficacité d'un médicament. Le nombre minimal de patients à interroger pour obtenir un intervalle de confiance de longueur inférieure ou égale à 0,01 est :

- ☐ a 200 ☐ b 40 000 ☐ c 4 000 ☐ d 1 000

25. Probabilité : loi continue

E.5539   On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de moyenne 54 et d'écart-type 5 ($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(54; 25)$).

On utilisera le tableau de valeur ci-dessous où la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ suit une loi normale centrée et réduite ($\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0; 1)$):

x	-2,8	-1,8	-1,2	0,4	1,2	2
$\mathcal{P}(\mathcal{Z} \leq x)$	0,003	0,004	0,115	0,655	0,885	0,977

Déterminer les valeurs arrondies au millièmes des probabilités suivantes:

- (a) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 60)$ (b) $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 45)$ (c) $\mathcal{P}(48 \leq \mathcal{X} \leq 56)$

E.5540   On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de moyenne 17 et d'écart-type σ

$$(\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(17; \sigma^2)).$$

Sachant que $\mathcal{P}(14 \leq \mathcal{X} \leq 20) = 0,382$, déterminer la valeur de σ .

On utilisera le tableau de valeur ci-dessous où la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ suit une loi normale centrée et réduite ($\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0; 1)$):

x	-2,25	-1,75	-0,5	0	0,75	1,25	1,75
$\mathcal{P}(\mathcal{Z} \leq x)$	0,012	0,040	0,309	0,5	0,773	0,894	0,960

E.6425   En prévision d'une élection, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs. Parmi les 1200 personnes qui ont répondu au sondage, 52,9 % des électeurs voteraient pour le candidat A.

Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut-il croire en sa victoire?

26. Annales - loi normale et probabilité conditionnelle

E.6073    Une entreprise industrielle fabrique des pièces cylindriques en grande quantité. Pour toute pièce prélevée au hasard, on appelle $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui lui associe sa longueur en millimètre et $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire qui lui associe son diamètre en millimètre.

On suppose que $\mathcal{X}$ suit une loi normale de moyenne $\mu_1 = 36$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,2$ et que $\mathcal{Y}$ suit la loi normale de moyenne $\mu_2 = 6$ et d'écart-type $\sigma_2 = 0,05$.

- Une pièce est dite conforme pour la longueur si sa longueur est comprise entre $\mu_1 - 3\sigma_1$ et $\mu_1 + 3\sigma_1$. Quelle est une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité p_1 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour la longueur?
- Une pièce est dite conforme pour le diamètre si son diamètre est compris entre $5,88 \text{ mm}$ et $6,12 \text{ mm}$. Le tableau donné ci-contre a été obtenu à l'aide d'un tableau. Il indique pour chacune des valeurs de k , la probabilité que $\mathcal{Y}$ soit inférieure ou égale à cette valeur.

k	$\mathcal{P}(\mathcal{Y} \leq k)$	k	$\mathcal{P}(\mathcal{Y} \leq k)$	k	$\mathcal{P}(\mathcal{Y} \leq k)$
5,8	3,16712E-05	5,94	0,11506967	6,08	0,945200708
5,82	0,000159109	5,96	0,211855399	6,1	0,977249868
5,84	0,000687138	5,98	0,344578258	6,12	0,991802464
5,86	0,00255513	6	0,5	6,14	0,99744487
5,88	0,008197536	6,02	0,655421742	6,16	0,999312862
5,9	0,022750132	6,04	0,788144601	6,18	0,999840891
5,92	0,054799292	6,06	0,88493033	6,2	0,999968329

Déterminer la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard ne soit pas acceptée (le résultat sera arrondi à 10^{-2}).

- (b) Justifier que la probabilité, qu'elle soit conforme pour le diamètre sachant qu'elle n'est pas conforme pour la longueur, est égale à p_2 .

Déterminer à 10^{-3} près la probabilité p_2 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour le diamètre (on pourra s'aider du tableau ci-contre).

- On prélève une pièce au hasard. On appelle L l'événement "la pièce est conforme pour la longueur" et D l'événement "la pièce est conforme pour le diamètre".

On suppose que les événements L et D sont indépendants.

- (a) Une pièce est acceptée si elle est conforme pour la longueur et pour le diamètre.

E.5511



L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination "*compote allégée*".

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2 .

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1 . Elle est cependant moins rapide.

Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2 .

La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %. On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les événements :

- E : "Le petit pot provient de la chaîne F_2 ";
- C : "Le petit pot est conforme".

- 1 Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
- 2 Calculer la probabilité de l'événement : "le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1 ".
- 3 Déterminer la probabilité de l'événement C .
- 4 Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement E sachant que l'événement C est réalisé.

Partie B

- 1 On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1 , associe sa teneur en sucre.

On suppose que $\mathcal{X}$ suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,006$.

Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous :

α	β	$\mathcal{P}(\alpha \leq \mathcal{X} \leq \beta)$
0,13	0,15	0,0004
0,14	0,16	0,0478
0,15	0,17	0,4996
0,16	0,18	0,9044
0,17	0,19	0,4996
0,18	0,20	0,0478
0,19	0,21	0,0004

Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

- 2 On note $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2 , associe sa teneur en sucre.

On suppose que $\mathcal{Y}$ suit une loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart-type σ_2 .

On suppose de plus que la probabilité, qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme, est égale à 0,99.

Soit $\mathcal{Z}$ la variable aléatoire définie par : $\mathcal{Z} = \frac{\mathcal{Y} - m_2}{\sigma_2}$.

- a) Quelle loi la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ suit-elle?
- b) Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient $\mathcal{Z}$ lorsque $\mathcal{Y}$ appartient à l'intervalle $[0,16; 0,18]$.
- c) En déduire la valeur de σ_2 arrondie à 10^{-3} près.

On pourra utiliser le tableau ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$\mathcal{P}(-\beta \leq \mathcal{Z} \leq \beta)$
2,4324	0,985
2,4573	0,986
2,4838	0,987
2,5121	0,988
2,5427	0,989
2,5758	0,990
2,6121	0,991
2,6521	0,992
2,6968	0,993

27. Annales - loi normale et loi binomiale

E.6075



Tous les résultats numériques devront être donnés sous forme décimale et arrondis au dix-millième.

Une usine fabrique des billes sphériques dont le diamètre est exprimé en millimètres. Une bille est dite hors norme lorsque son diamètre est inférieur à 9 mm ou supérieur à 11 mm.

Partie A

- 1 On appelle $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque bille choisie au hasard dans la production, associe son diamètre exprimé en mm.

On admet que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,4.

Montrer que la probabilité qu'une bille soit hors norme, arrondie à 0,000 1 est 0,012 4. On pourra utiliser la table de valeurs donnée en annexe.

- 2 On met en place un contrôle de production tel que 98 % des billes hors norme sont écartés et 99 % des billes correctes sont conservées.

On choisit une bille au hasard dans la production. On note :

- N l'événement : "la bille choisie est aux normes" ;
- A l'événement : "la bille choisie est acceptée à l'issue du contrôle".

- a Construire un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé.
- b Calculer la probabilité de l'événement A .
- c Quelle est la probabilité pour qu'une bille acceptée soit hors norme?

Partie B

Ce contrôle de production se révélant trop coûteux pour l'entreprise, il est abandonné : dorénavant, toutes les billes produites sont donc conservées, et elles sont conditionnées par sacs de 100 billes.

On considère que la probabilité qu'une bille soit hors norme est de 0,012 4.

On admettra que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.

On appelle $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire qui à tout sac de 100 billes associe le nombre de billes hors norme de ce sac.

- 1 Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $\mathcal{Y}$?
- 2 Quels sont l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{Y}$?
- 3 Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme?
- 4 Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au plus une bille hors norme?

d	$\mathcal{P}(\mathcal{X} < d)$	d	$\mathcal{P}(\mathcal{X} < d)$	d	$\mathcal{P}(\mathcal{X} < d)$
0	3,06E-138	8	2,87E-07	16	1
1	2,08E-112	9	0,00620967	17	1
2	2,75E-89	10	0,5	18	1
3	7,16E-69	11	0,99379034	19	1
4	3,67E-51	12	0,99999971	20	1
5	3,73E-36	13	1	21	1
6	7,62E-24	14	1	22	1
7	3,19E-14	15	1		

E.5431



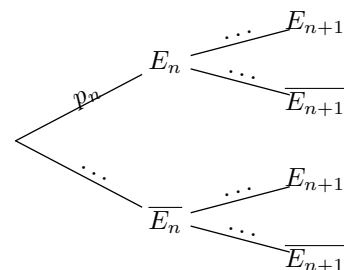
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe :

- Un salarié malade est absent.
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'événement "le salarié est absent pour cause de maladie la n -ième semaine". On note p_n la probabilité de l'événement E_n .

On a ainsi $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n < 1$

- 1 a Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
- b Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
- 2 a Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous :



- b Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $p_{n+1} = 0,2 \cdot p_n + 0,04$.
- c Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r . En déduire l'expression de u_n , puis de p_n en fonction de n et r .
- d En déduire la limite de la suite (p_n) .
- e On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables : K et J sont des entiers naturels
 P est un nombre réel.
 Initialisation : P prend la valeur 0.
 J prend la valeur 1.
 Entrée : Saisir la valeur de K .
 Traitement : Tant que $P < 0,05 - 10^{-K}$
 P prend la valeur $0,2 \times P + 0,04$
 J prend la valeur $J+1$.
 Fin tant que
 Sortie : Afficher J .

À quoi correspond l'affichage final J ?

Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête?

- 3 Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade

une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p=0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

- (a) Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
- (b) On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\frac{\mathcal{X}-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.

On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Le tableau suivant donne les probabilités de l'événement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x .

x	-1,55	-1,24	-0,93	-0,62	-0,31	0,00
$\mathcal{P}(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500

x	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$\mathcal{P}(Z < x)$	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question (b), une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'événement : "le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15".

28. Annales - lois normales et intervalle de fluctuations

E.6761



Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive. Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

- (1) Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite?
- (2) Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite?

Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite.

Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés?

Partie C

Pour augmenter la difficulté, le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit "liftées", soit "coupées". La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.

Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24;
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite?

E.6422



En prévision d'une élection entre deux candidats A et B , un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.

Parmi les 1200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B .

Compte tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B , tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A .

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l'événement "la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A ";
- B l'événement "la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B ";
- V l'événement "la personne interrogée dit la vérité".

- (1) Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
- (2) (a) Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
- (b) Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A .

- (3) Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0,529.

- (4) L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A .

* estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1200 personnes

Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut-il croire en sa victoire? (on utilisera des valeurs approchées au millièmes près)

- (5) Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête

téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4.

L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1200 réponses.

Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif?

E.6766    Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation "pur jus".

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de "pur jus" est notée x , où x est un réel de l'intervalle $[0; 1]$.

Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation "pur jus".

On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les événements suivants :

- R : "la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange";
- J : "la bouteille prélevée est une bouteille de pur jus".

Partie A

- 1 Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
- 2 Déterminer la valeur exacte de x .
- 3 Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de "pur jus".
Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot de 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de "pur jus" dans ce lot.

On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

- 1 Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire $\mathcal{X}$. On en donnera les paramètres.
- 2 Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de "pur jus". On arrondira le résultat au millièm.

Partie C

Un fournisseur assure que 90 % des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2 % de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2 % de pulpe.

- 1 Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe au seuil de 95 %.

- 2 Que penser de l'affirmation du fournisseur?

E.5538    Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millièm le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millièm le plus proche

x	308	385	390	395	400	405	410	415	420
$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

- 1 Calculer $\mathcal{P}(390 \leq \mathcal{X} \leq 410)$.
- 2 Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.
- 3 Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ .

Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 %? On arrondira le résultat au dixièm.

On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque $\mathcal{Z}$ est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart type 1, on a :

$$\mathcal{P}(\mathcal{Z} \leq -1,751) \approx 0,040$$

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables. Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

- 1 Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de 300.
- 2 Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.
Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif est atteint?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire $\mathcal{T}$ qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

- 1 On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millièm.

Dans toute la suite, on prendra : $\lambda = 0,003$

- 2 Quelle est la probabilité que la balance électronique fonc-

tionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours?

- 3 Le vendeur de cette balance électronique a assuré au

boullanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison? Si non, pour combien de jours est-ce vrai?

29. Annales - lois normales et intervalle de confiances

E.6740



Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les trois parties sont relatives à cette situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

- 1 L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.
 - a Quelle est la loi de la variable aléatoire $\mathcal{X}$? Justifier la réponse.
 - b Quelle est la meilleure approximation de $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 400)$ parmi les nombres suivants?
0,92 ; 0,93 ; 0,94 ; 0,95
- 2 Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieur à 0,9 que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400?

Partie B : Proposition de personnes favorables au projet dans la population

Dans cette partie, on suppose que n personnes ont répondu à la question, et on admet que ces personnes constituent un échantillon aléatoire de taille n (où n est un entier naturel supérieur à 50).

Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet d'aménagement.

- 1 Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale.
- 2 Déterminer la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04.

Partie C : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.

L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favor-

able peut :

- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.

Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste, on préfère au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'événement "la personne est en réalité favorable au projet" ;
- $\bar{F}$ l'événement "la personne est en réalité défavorable au projet".
- A l'événement "la personne affirme qu'elle est favorable au projet" ;
- $\bar{A}$ l'événement "la personne affirme qu'elle est défavorable au projet".

Ainsi, d'après les données, on a : $\mathcal{P}(A) = 0,29$.

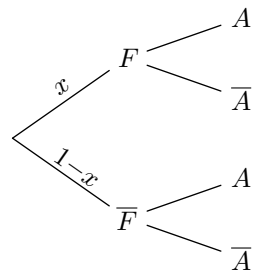
- 1 En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs $\mathcal{P}_F(A)$ et $\mathcal{P}_{\bar{F}}(A)$.

- 2 On pose : $x = \mathcal{P}(F)$.

- a Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

- b En déduire une égalité vérifiée par x .

- 3 Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.



Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et $\mathcal{X}_n$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p . On note $\mathcal{F}_n = \frac{\mathcal{X}_n}{n}$ et f la valeur prise par f la valeur prise par F_n . On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi les trois réponses possibles.

On note r la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard (*de façon équiprobable*).

- 1 On interroge un étudiant au hasard. On note :
 - A : "l'étudiant répond A" ;
 - B : "l'étudiant répond B" ;
 - C : "l'étudiant répond C" ;
 - R : "l'étudiant connaît la réponse" ;
 - $\bar{R}$: l'événement contraire de R.
 - a Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
 - b Montrer que la probabilité de l'événement A est :
$$\mathcal{P}(A) = \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot r).$$
 - c Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisie A connaisse la bonne réponse.
- 2 Pour estimer r , on interroge 400 personnes et on note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiants revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.
 - a Donner la loi de $\mathcal{X}$ et ses paramètres n et p en fonction de r .
 - b Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.
Donner un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de p .
En déduire un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r .
 - c Dans la suite, on suppose que $r=0,4$. Compte tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que $\mathcal{X}$ suit une loi normale.
 - Donner les paramètres de cette loi normale.
 - Donner une valeur approchée de $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 250)$ à 10^{-2} près.
On pourra s'aider du tableau ci-dessous 1, qui donne une valeur approchée de $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq t)$ où $\mathcal{X}$ est la variable aléatoire de la question 2 b.

C3		=LOI.NORMALE(\$A12+\$E\$1;240;RACINE(96);VRAI)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0,0	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2	235	0,305	0,309	0,312	0,316	0,319	0,323	0,327	0,33	0,334	0,338
3	236	0,342	0,345	0,349	0,353	0,357	0,36	0,364	0,368	0,372	0,376
4	237	0,38	0,384	0,388	0,391	0,395	0,399	0,403	0,407	0,411	0,415
5	238	0,419	0,423	0,427	0,431	0,435	0,439	0,443	0,447	0,451	0,455
6	239	0,459	0,463	0,467	0,472	0,476	0,48	0,484	0,488	0,492	0,496
7	240	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,52	0,524	0,528	0,533	0,537
8	241	0,541	0,545	0,549	0,553	0,557	0,561	0,565	0,569	0,573	0,577
9	242	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	0,601	0,605	0,609	0,612	0,616
10	243	0,62	0,624	0,628	0,632	0,636	0,64	0,643	0,647	0,651	0,655
11	244	0,658	0,662	0,666	0,67	0,673	0,677	0,681	0,684	0,688	0,691
12	245	0,695	0,699	0,702	0,706	0,709	0,713	0,716	0,72	0,723	0,726
13	246	0,73	0,733	0,737	0,74	0,743	0,746	0,75	0,753	0,756	0,759
14	247	0,763	0,766	0,769	0,772	0,775	0,778	0,781	0,784	0,787	0,79
15	248	0,793	0,796	0,799	0,802	0,804	0,807	0,81	0,813	0,815	0,818
16	249	0,821	0,823	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839	0,841	0,844
17	250	0,846	0,849	0,851	0,853	0,856	0,858	0,86	0,863	0,865	0,867
18	251	0,869	0,871	0,874	0,876	0,878	0,88	0,882	0,884	0,886	0,888
19	252	0,89	0,892	0,893	0,895	0,897	0,899	0,901	0,903	0,904	0,906
20	253	0,908	0,909	0,911	0,913	0,914	0,916	0,917	0,919	0,921	0,922
21	254	0,923	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932	0,933	0,935	0,936
22	255	0,937	0,938	0,94	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945	0,947	0,948
23	256	0,949	0,95	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,956	0,957	0,958
24	257	0,959	0,96	0,96	0,961	0,962	0,963	0,964	0,965	0,965	0,966
25	258	0,967	0,968	0,968	0,969	0,97	0,97	0,971	0,972	0,972	0,973
26	259	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,977	0,978	0,978	0,979
27	260	0,979	0,98	0,98	0,981	0,981	0,982	0,982	0,983	0,983	0,984

Extrait d'une feuille de calcul

Exemple d'utilisation : au croisement de la ligne 12 et de la colonne E le nombre 0,706 correspond à $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 245,3)$.



Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98 ;
- la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.

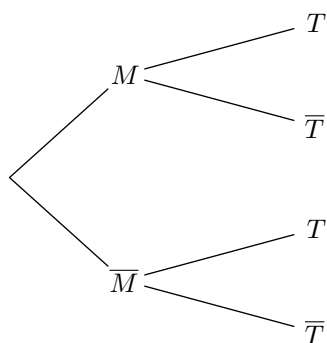
On procède à un test de dépistage systématique dans une population "cible". Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

- M l'événement : "l'individu choisi est atteint du chikungunya"
- T l'événement : "le test de l'individu choisi est positif"

On notera $\bar{M}$ (respectivement $\bar{T}$) l'événement contraire de l'événement M (respectivement T).

On note p ($0 \leq p \leq 1$) la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

- 1 a Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



- b Exprimer $\mathcal{P}(M \cap T)$, $\mathcal{P}(\bar{M} \cap T)$ puis $\mathcal{P}(T)$ en fonction de p .
- 2 a Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :
- $$f(p) = \frac{98 \cdot p}{97 \cdot p + 1}$$
- b Étudier les variations de la fonction f .
- 3 On considère que le test est fiable lorsque la probabilité d'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95. En utilisant les résultats de la question 2, à partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ?

Partie B

En juillet 2014, l'institut de veille sanitaire d'une île, en s'appuyant sur les données remontées par les médecins, publie que 15 % de la population est atteinte par le virus.

Comme certaines personnes ne consultent pas forcément leur médecin, on pense que la proportion est en réalité plus importante.

Pour s'en assurer, on se propose d'étudier un échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard dans cette île. La population est suffisamment importante pour considérer qu'un tel échantillon résulte de tirages avec remise.

On désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1000 personnes choisies au hasard, fait correspondre le nombre de personnes atteintes par le virus et par $\mathcal{F}$ la variable aléatoire donnant la fréquence associée.

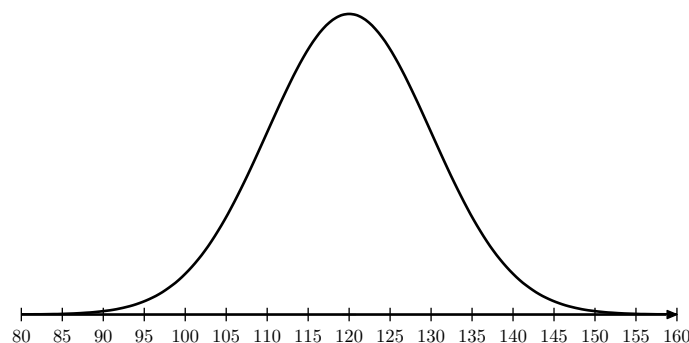
- 1 a Sous l'hypothèse $p = 0,15$, déterminer la loi de $\mathcal{X}$.
- b Dans un échantillon de 1000 personnes choisies au hasard dans l'île, on dénombre 197 personnes atteintes par le virus. Quelle conclusion peut-on tirer de cette observation à propos du chiffre de 15 % publié par l'institut de veille sanitaire ? Justifier. (On pourra s'aider du calcul d'un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %)
- 2 On considère désormais que la valeur de p est inconnue. En utilisant l'échantillon de la question 1 b, proposer un intervalle de confiance de la valeur de p , au niveau de confiance de 95 %.

Partie C

Le temps d'incubation, exprimé en heures, du virus peut être modélisé par une variable aléatoire $\mathcal{T}$ suivant une loi normale d'écart type $\sigma = 10$.

On souhaite déterminer sa moyenne μ .

La représentation graphique de la fonction densité de probabilité $\mathcal{T}$ est donnée ci-dessous :



- 1 a Conjecturer, à l'aide du graphique, une valeur approchée de μ .
- b On donne $\mathcal{P}(\mathcal{T} \leq 110) = 0,18$. Hachurer sur le graphique un domaine dont l'aire correspond à la probabilité donnée.
- 2 On note $\mathcal{T}'$ la variable aléatoire égale à $\frac{\mathcal{T} - \mu}{10}$.
- a Quelle loi la variable aléatoire $\mathcal{T}'$ suit-elle ?
- b Déterminer la moyenne μ de la variable aléatoire $\mathcal{T}$ arrondi à l'unité près et vérifier la conjecture de la question 1.

E.6957



Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

On admet que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

E.7579



On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de paramètre 13 et 1 ($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(13; 1^2)$).

La valeur de la probabilité $\mathcal{P}(11,5 \leq \mathcal{X} \leq 14,5)$ arrondie au millièmè près :

① 0,437

② 0,866

③ 0,954

④ 0,999

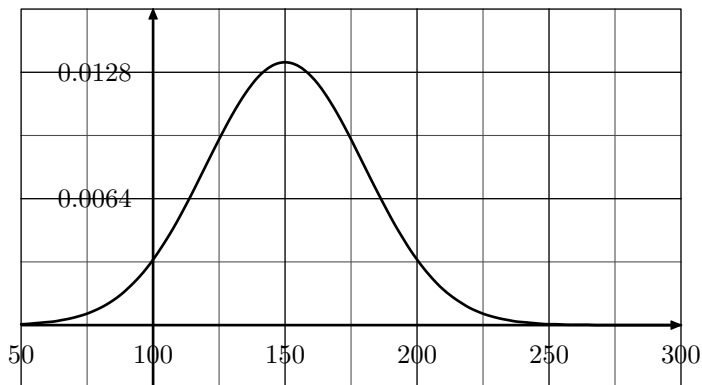
E.5564



On s'intéresse à une espèce de poissons présente dans une zone de la planète.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque poisson observé dans cette zone, associe sa taille en *cm*.

Une étude statistique a montré que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 30$. La courbe de la densité de probabilité associée à $\mathcal{X}$ est représentée ci-dessous :

① Par lecture graphique, donner la valeur de μ .② On pêche au hasard un de ces poissons. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2} , d'avoir un poisson dont la taille est comprise entre 150 *cm* et 210 *cm*.③ Un poisson de cette espèce est considéré comme adulte quand il mesure plus de 120 *cm*.

On pêche un poisson de l'espèce considérée. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2} , de pêcher un poisson adulte.

E.5509



Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi de probabilité $\mathcal{N}(0; 1)$. Pour tout nombre réel $\alpha \in]0; 1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que :

$$\mathcal{P}(-u_\alpha \leq \mathcal{X} \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

E.5510



Soit α un nombre réel appartenant à $]0; 1[$ et $\mathcal{Z}$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite ($\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0; 1)$).

On note u_α l'unique réel positif vérifiant l'égalité :

$$\mathcal{P}(-u_\alpha \leq \mathcal{Z} \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Soit $\mathcal{X}_n$ une variable suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Considérons la variable aléatoire $F_n = \frac{\mathcal{X}_n}{n}$ associée à la fréquence du succès.

Établir la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}\left(p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

E.6070



Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et $\mathcal{X}_n$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p . On note $\mathcal{F}_n = \frac{\mathcal{X}_n}{n}$ et f la valeur prise par $\mathcal{F}_n$. On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

E.5568



Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8h 00min. Pour cela, il utilise un vélo.

On modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire $\mathcal{T}$ qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart-type $\sigma = 1,6$.

Pour répondre aux questions de l'exercice, on utilisera le tableau de valeurs ci-dessous où la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ suit une loi normale centrée réduite :

x	-2	-1,875	-1,75	-1,625	-1,5	-1,375	-1,25
$\mathcal{P}(\mathcal{Z} \leq x)$	0,023	0,030	0,040	0,052	0,067	0,084	0,106

x	1,25	1,375	1,5	1,625	1,75	1,875	2
$\mathcal{P}(\mathcal{Z} \leq x)$	0,089	0,0915	0,933	0,948	0,960	0,970	0,977

On arrondira les probabilités au millièmè près.

① Il part de son domicile à vélo à 7h 40min. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée?

② Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée.

E.6428



Un ostréiculteur affirme que 60% de ses huîtres ont une masse supérieure à 91 g. Un restaurateur souhaiterait lui acheter une grande quantité d'huîtres, mais il voudrait, auparavant, vérifier l'affirmation de l'ostréiculteur.

Le restaurateur achète auprès de cet ostréiculteur 10 douzaines d'huîtres qu'on considèrera comme un échantillon de 120 huîtres tirées au hasard. Sa production est suffisamment importante pour qu'on l'assimile à un tirage avec remise.

Il constate que 65 de ces huîtres ont une masse supérieure à 91 g.

Soit $\mathcal{F}$ la variable aléatoire qui à tout échantillon de 120 huîtres associe la fréquence de celles qui ont une masse supérieure à 91 g.

Après en avoir vérifié les conditions d'application, donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la variable aléatoire $\mathcal{F}$. (on utilisera des valeurs approchées au millièème près).

E.6094



Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante.

Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de 50 ml.

On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de 49 ml de crème.

Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en ml, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale d'espérance $\mu=50$ et d'écart-type σ .

On note $\mathcal{Z}$ la variable égale à $\frac{\mathcal{X}-50}{\sigma}$.

- 1 Préciser la loi que suit la variable aléatoire $\mathcal{Z}$.
- 2 Déterminer une valeur, arrondie au millièème, du réel u tel que: $\mathcal{P}(\mathcal{Z} \leq u) = 0,06$
- 3 On sait que la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme vaut 0,06.

En déduire la valeur, arrondie au millièème, de l'écart-type σ .