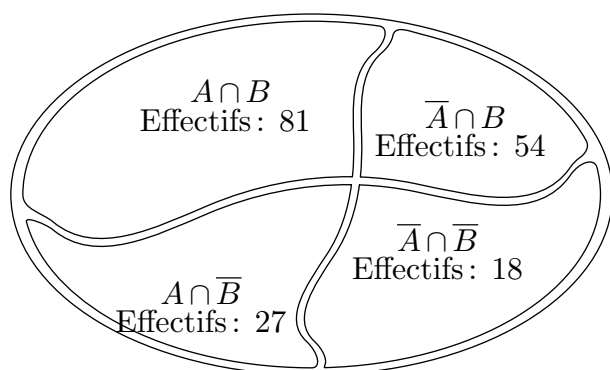


1. Introduction aux probabilités conditionnelles

E.7127 Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B qui réalise la partition de l'univers représentée ci-dessous :



1 Déterminer les probabilités suivantes :

a $\mathcal{P}(A)$ b $\mathcal{P}(\bar{B})$ c $\mathcal{P}(A \cap \bar{B})$

2 On modifie l'expérience aléatoire en ne considérant que l'univers constitué de l'événement A . On note $\mathcal{P}'$ la nouvelle probabilité sur A . Déterminer la probabilité suivante :

$\mathcal{P}'(B)$

3 De même, on ne considère que les événements issus de $\bar{B}$ et on note $\mathcal{P}''$ la probabilité sur cet univers. Déterminer la probabilité suivante : $\mathcal{P}''(\bar{A})$

2. Calcul de probabilité conditionnelle

E.7134 Un serveur, travaillant dans une pizzeria, remarque qu'en moyenne, 40 % des clients sont des familles, 25 % des clients sont des personnes seules et 35 % des clients sont des couples.

Il note aussi que :

- 70 % des familles laissent un pourboire ;
- 90 % des personnes seules laissent un pourboire ;
- 40 % des couples laissent un pourboire.

Un soir donné, ce serveur prend au hasard une table occupée dans la pizzeria.

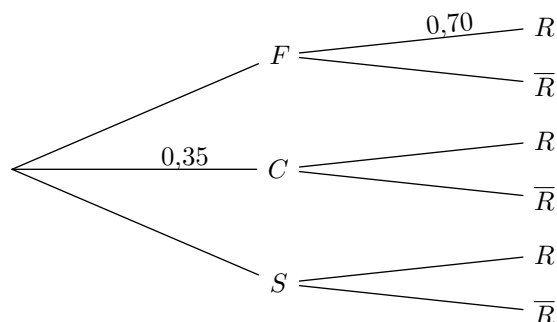
On s'intéresse aux événements suivants :

- F : "la table est occupée par une famille"
- S : "la table est occupée par une personne seule"
- C : "la table est occupée par un couple"
- R : "le serveur reçoit un pourboire"

On note $\bar{A}$ l'événement contraire de A et $p_B(A)$ la probabilité de A , sachant B .

1 D'après les données de l'énoncé, préciser les probabilités $p(F)$ et $p_S(R)$.

2 Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



3 Calculer $p(F \cap R)$

E.7157 La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.

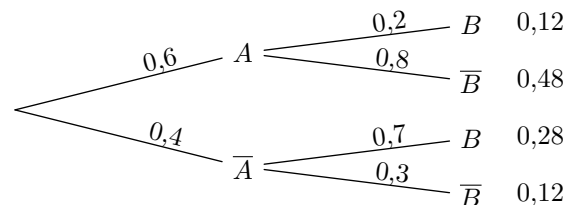
Pour $t=1$ ou $t=2$, on note E_t l'événement : "Le touriste se dirige vers l'Est le t -ème jour" et O_t l'événement : "Le touriste se dirige vers l'Ouest le t -ème jour".

1 Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.

2 Déterminer les probabilités suivantes : $\mathcal{P}(E_1)$; $\mathcal{P}_{E_1}(O_2)$; $\mathcal{P}(E_1 \cap E_2)$.

3 Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage deux jours consécutifs.

E.7124 Dans une expérience aléatoire, on considère les deux événements A et B . L'étude de cette expérience aléatoire a permis de produire l'arbre de probabilité ci-dessous :



Donner, si possible, par lecture de l'arbre les probabilités suivantes :

a $\mathcal{P}(A)$ b $\mathcal{P}(\bar{A} \cap B)$ c $\mathcal{P}(A \cap \bar{B})$

d $\mathcal{P}_B(\bar{A})$ e $\mathcal{P}_A(B)$ f $\mathcal{P}_{\bar{A}}(B)$

3. Probabilité conditionnelle et construction d'arbre

E.7125



Une agence de location de voitures dispose de trois types de véhicules : berline, utilitaire ou luxe, et propose, au moment de la location, une option d'assurance sans franchise.

Une étude statistique a permis d'établir que :

- 30 % des clients ont loué une berline et 10 % ont loué un véhicule de luxe.
- 40 % des clients qui ont loué une berline ont choisi l'option d'assurance sans franchise.
- 9 % des clients ont loué un véhicule de luxe et ont choisi l'option d'assurance sans franchise.
- 21 % des clients ont loué un véhicule utilitaire et ont choisi l'option d'assurance sans franchise.

On prélève au hasard la fiche d'un client et on considère les événements suivants :

- B : le client a loué une berline.
- L : le client a loué un véhicule de luxe.
- U : le client a loué un véhicule utilitaire.

4. Formule des probabilités totales

E.7135



Un investisseur souhaite acheter un appartement dans l'objectif est de le louer. Pour cela, il s'intéresse à la rentabilité locative de cet appartement. Les trois parties peuvent être traitées indépendamment. Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-4} .

On considère deux types d'appartement :

- Les appartements d'une ou deux pièces, notés respectivement $T1$ et $T2$;
- Les appartements de plus de deux pièces.

Une étude des dossiers d'appartements loués dans un secteur ont montré que :

- 35 % des appartements loués sont de type $T1$ et $T2$;
- 45 % des appartements loués de type $T1$ ou $T2$ sont rentables ;
- 30 % des appartements loués, qui ne sont ni de type $T1$ ni de type $T2$, sont rentables.

On choisit un dossier au hasard et on considère les événements suivants :

- T : "l'appartement est de type $T1$ ou $T2$ " ;
- R : "l'appartement loué est rentable" ;
- $\bar{T}$ est l'événement contraire de T et $\bar{R}$ est l'événement contraire de R .

- Traduire cette situation par un arbre pondéré.
- Montrer que la probabilité qu'un appartement loué soit rentable est égale à 0,3525.

- A : le client a choisi l'option d'assurance sans franchise.

Produire un arbre de probabilités représentant la situation ci-dessus et intégrant les données de l'énoncé.

E.7126



Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires.

La totalité de la production est réalisée par deux machines M_A et M_B .

La machine M_A fournit 40 % de la production totale et M_B le reste.

La machine M_A produit 2 % de médailles défectueuses et la machine M_B produit 3 % de médailles défectueuses.

On prélève au hasard une médaille produite par l'entreprise et on considère les événements suivants :

- A : "la médaille provient de la machine M_A " ;
- B : "la médaille provient de la machine M_B " ;
- D : "la médaille est défectueuse" ;
- $\bar{D}$ est l'événement contraire de l'événement D .

Traduire cette situation par un arbre pondéré.

E.7110



À une sortie d'autoroute, la gare de péage comporte trois voies.

Une étude statistique a montré que :

- 28 % des automobilistes empruntent la voie de gauche, réservée aux abonnés ; un automobiliste empruntant cette voie franchit toujours le péage en moins de 10 secondes ;
- 52 % des automobilistes empruntent la voie du centre, réservée au paiement par carte bancaire ; parmi ces derniers, 75 % franchissent le péage en moins de 10 secondes ;
- les autres automobilistes empruntent la voie de droite en utilisant un autre moyen de paiement (*pièces ou billets*).

On choisit un automobiliste au hasard et on considère les événements suivants :

- G : "l'automobiliste emprunte la voie de gauche" ;
- C : "l'automobiliste emprunte la voie du centre" ;
- D : "l'automobiliste emprunte la voie de droite" ;
- T : "l'automobiliste franchit le péage en moins de 10 secondes".

On note $\bar{T}$ l'événement contraire de l'événement T .

- Construire un arbre pondéré traduisant cette situation. Cet arbre sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
- Calculer la probabilité $p(C \cap T)$.
- L'étude a aussi montré que 70 % des automobilistes passent le péage en moins de 10 secondes.
 - Justifier que $p(D \cap T) = 0,03$.
 - Calculer la probabilité qu'un automobiliste empruntant la voie de droite passe le péage en moins de 10 secondes.

E.7115



Une agence de location de voitures dispose de trois types de véhicules : berline, utilitaire ou luxe, et propose, au moment de la location, une option d'assurance sans franchise.

Une étude statistique a permis d'établir que :

- 30 % des clients ont loué une berline et 10 % ont loué un véhicule de luxe.
- 40 % des clients qui ont loué une berline ont choisi l'option d'assurance sans franchise.
- 9 % des clients ont loué un véhicule de luxe et ont choisi l'option d'assurance sans franchise.
- 21 % des clients ont loué un véhicule utilitaire et ont choisi l'option d'assurance sans franchise.

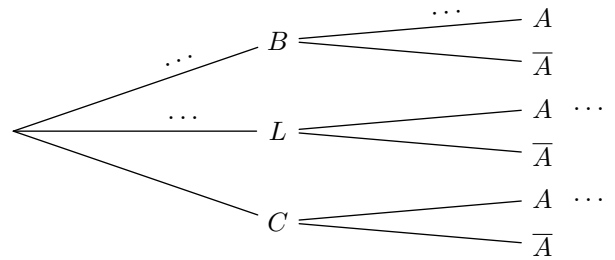
On prélève au hasard la fiche d'un client et on considère les événements suivants :

- B : le client a loué une berline.
- L : le client a loué un véhicule de luxe.

U : le client a loué un véhicule utilitaire.

A : le client a choisi l'option d'assurance sans franchise.

- Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre avec les données de l'énoncé.



- Quelle est la probabilité que le client ait loué une berline et ait choisi l'option d'assurance sans franchise?
- Calculer la probabilité qu'un client ait choisi l'option d'assurance sans franchise.
- Calculer $\mathcal{P}_L(A)$, la probabilité que le client ait souscrit une assurance sans franchise sachant qu'il a loué une voiture de luxe.

5. Inversion de la condition

E.7138



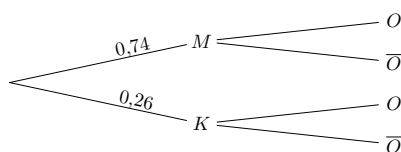
D'après une étude récente, il y a 216 762 médecins en France métropolitaine parmi lesquels 0,6 % pratiquent l'ostéopathie et on compte 75 164 kinésithérapeutes parmi lesquels 8,6 % pratiquent l'ostéopathie.

On choisit une personne au hasard parmi les médecins et les kinésithérapeutes.

On note les événements suivants :

- M : "la personne choisie est médecin";
- K : "la personne choisie est kinésithérapeute";
- O : "la personne choisie pratique l'ostéopathie".

On représente la situation à l'aide de l'arbre pondéré suivant :



- Reproduire l'arbre de probabilité puis le compléter.
- Montrer que la probabilité $\mathcal{P}(O)$ est égale à 0,0268.
- Un patient vient de suivre une séance d'ostéopathie chez un praticien d'une des deux catégories. Détermine la probabilité que le praticien soit un kinésithérapeute. Donner le résultat arrondi au centième.

E.7111



Un fabricant produit des pneus de deux catégories, la catégorie "pneu neige" et la catégorie "pneu classique". Sur chacun d'eux, on effectue des tests de qualité pour améliorer la sécurité.

On dispose des informations suivantes sur le stock de production :

- le stock contient 40 % de pneus neige;
- parmi les pneus neige, 92 % ont réussi les tests de qualité.
- parmi les pneus classiques, 96 % ont réussi les tests de qualité.

Un client choisit un pneu au hasard dans le stock de production. On note :

- N l'événement : "Le pneu choisi est un pneu neige"
- C l'événement : "Le pneu choisi est un pneu classique"
- Q l'événement : "Le pneu choisi a réussi les tests de qualité".

Dans tout cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

- Illustrer la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
- Calculer la probabilité de l'événement $N \cap Q$ et interpréter ce résultat par une phrase.
- Montrer que : $p(Q) = 0,944$
- Sachant que le pneu choisi a réussi les tests de qualité, quelle est la probabilité que ce pneu soit un pneu neige?

E.7112



On s'intéresse à l'ensemble des demandes de prêts immobiliers auprès de trois grandes banques.

Une étude montre que 42 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Karl, 35 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Lofa, alors que cette proportion est de 23 % pour la banque Miro.

Par ailleurs :

- 76 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Karl sont acceptées ;
- 65 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Lofa sont acceptées ;
- 82 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Miro sont acceptées.

On choisit au hasard une demande de prêt immobilier parmi celles déposées auprès des trois banques.

On considère les événements suivants :

- K : “la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Karl” ;
- L : “la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Lofa” ;
- M : “la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Miro” ;
- A : “la demande de prêt est acceptée.”

Dans tout l'exercice, on donnera, si nécessaire, des valeurs arrondies au millième des résultats.

- 1 Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
- 2 Calculer la probabilité que la demande de prêt soit déposée auprès de la banque Karl et soit acceptée.
- 3 Montrer que : $\mathcal{P}(A) \approx 0,735$
- 4 La demande de prêt est acceptée. Calculer la probabilité qu'elle ait été déposée à la banque Miro.

E.7113



Un téléphone portable contient en mémoire 3 200 chansons archivées par catégories : rock, techno, rap, reggae... dont certaines sont interprétées en français.

Parmi toutes les chansons enregistrées, 960 sont classées dans la catégorie rock.

Une des fonctionnalités du téléphone permet d'écouter de la musique en mode “lecture aléatoire” : les chansons écoutées sont choisies au hasard et de façon équiprobable parmi l'ensemble du répertoire.

Au cours de son footing hebdomadaire, le propriétaire du téléphone écoute une chanson grâce à ce mode de lecture.

On note :

- R l'événement : “la chanson écoutée est une chanson de la catégorie rock” ;
- F l'événement : “la chanson écoutée est interprétée en français”.

- 1 Calculer $p(R)$, la probabilité de l'événement R .
- 2 35 % des chansons de la catégorie rock sont interprétées en français ; traduire cette donnée en utilisant les événements R et F .
- 3 Calculer la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock et qu'elle soit interprétée en français.
- 4 Parmi toutes les chansons enregistrées 38,5 % sont interprétées en français.
Montrer que : $p(F \cap \overline{R}) = 0,28$
- 5 En déduire $p_{\overline{R}}(F)$ et exprimer par une phrase ce que signifie ce résultat.

E.7109



Un centre de loisirs destiné aux jeunes de 11 ans à 18 ans compte 60 % de collégiens et 40 % de lycéens.

Le directeur a effectué une étude statistique sur la possession de téléphones portables. Cette étude a montré que 80 % des jeunes possèdent un téléphone portable et que, parmi les collégiens, 70 % en possèdent un.

On choisit au hasard un jeune du centre de loisirs et on s'intéresse aux événements suivants :

- C : “le jeune choisi est un collégien” ;
- L : “le jeune choisi est un lycéen” ;
- T : “le jeune choisi possède un téléphone portable”.

Rappels : si A et B sont deux événements, $p(A)$ désigne la probabilité que l'événement A se réalise et $p_B(A)$ désigne la probabilité de A sachant que l'événement B est réalisé. On note aussi $\overline{A}$ l'événement contraire de A .

- 1 Donner les probabilités : $p(C)$, $p(L)$, $p(T)$, $p_C(T)$.
- 2 Faire un arbre de probabilités représentant la situation et commencer à la renseigner avec les données de l'énoncé.
- 3 Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien possédant un téléphone portable.
- 4 Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien sachant qu'il possède un téléphone portable.
- 5 a Calculer $p(T \cap L)$, en déduire $p_L(T)$.
b Compléter l'arbre construit dans la question 2.

E.6829



Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive. Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

Pour augmenter la difficulté, le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit "liftées", soit "coupées". La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche. Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24 ;
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

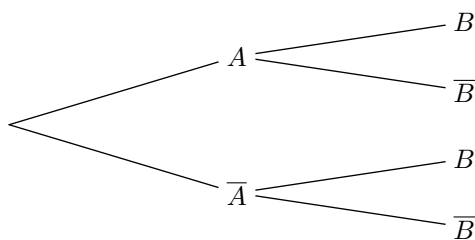
E.5559



Lors d'une expérience aléatoire, on considère les deux événements A et B dont on dispose les informations ci-dessous :

$$\mathcal{P}(A) = 0,7 \quad ; \quad \mathcal{P}_A(B) = 0,2 \quad ; \quad \mathcal{P}_{\bar{A}}(B) = 0,9$$

- À l'aide des informations de l'énoncé, compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



- Déterminer la probabilité $\mathcal{P}(A \cap B)$.
- Montrer que : $\mathcal{P}(B) = 0,41$
- Montrer que : $\mathcal{P}_B(A) = \frac{14}{41}$

E.4257



Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.

Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.

- Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.
- Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la

probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3} .

E.5525



L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination "compote allégée".

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2 .

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1 . Elle est cependant moins rapide.

Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2 .

La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %. On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les événements :

- E : "Le petit pot provient de la chaîne F_2 " ;
- C : "Le petit pot est conforme".

- Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
- Calculer la probabilité de l'événement : "Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1 ".
- Déterminer la probabilité de l'événement C .
- Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement E sachant que l'événement C est réalisé.

E.3729



Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

On note :

- D : l'événement "le composant est défectueux" ;
- F_1 : l'événement "le composant provient du premier fournisseur" ;
- F_2 : l'événement "le composant provient du second fournisseur".

- Dresser un arbre de probabilité correspondant à cette situation.
- Calculer $\mathcal{P}(D \cap F_1)$, puis démontrer : $\mathcal{P}(D) = 0,0225$
- Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ? On arrondira sa valeur au millième près.

6. Définition de l'indépendance

E.3778



Prérequis : On rappelle que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité p si, et seulement, si :

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$$

Soient A et B deux événements associés à une expérience aléatoire :

- 1 Justifier que : $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B \cap A) + \mathcal{P}(B \cap \bar{A})$
- 2 Démontrer que, si les événements A et B sont indépendants pour la probabilité p , alors les événements $\bar{A}$ et B le sont également.

E.6362



Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Dans l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B .

“Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ sont aussi indépendants.”

7. Répétitions indépendantes d'expériences aléatoires

E.3746



Une urne contient 50 boules blanches, 25 boules noires et 25 boules rouges. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue 3 tirages indépendants et avec remise.

- 1 Déterminer la probabilité de l'événement :
 A : “les trois boules tirées sont blanches”.
- 2 Déterminer la probabilité de l'événement :
 B : “aucune des boules tirées est blanche”.
- 3 a Déterminer la probabilité de l'événement :
 C_1 : “La première boule tirée est blanche ; les deux autres ne sont pas blanches”.
- b En déduire la probabilité de l'événement :
 C : “une seule des boules tirées est blanche”.
- 4 En déduire la probabilité de l'événement :
 D : “deux boules tirées sont blanches et une boule n'est pas blanche”.
- 5 Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées :
a Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire

$\mathcal{X}$.

- b Déterminer l'espérance de la variable $\mathcal{X}$.

E.3747



Un jeu consiste à lancer 3 fois un dé équilibré. On suppose les différents lancers indépendants et assimilables à des tirages avec remises.

- 1 a On considère les événements :
 - A : “Le joueur réalise trois fois le nombre 6”.
 - B : “Le joueur réalise deux fois le nombre 6”
 Déterminer les probabilités de ces événements.
- 2 La mise de ce jeu est fixé à 3 euros. Chaque gagnant remporte :
 - 500 euros lorsque le joueur fait trois fois le nombre 6.
 - 5 euros lorsque le joueur fait deux fois le nombre 6.
 On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associée au gain d'une partie ; le gain est la différence de la somme gagnée par la mise.
 - a Dans un tableau, donner la loi de probabilité de la variable $\mathcal{X}$.
 - b Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.