

1. Limites de suites

E.43    la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme $u_0=800$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1}=0,6 \cdot u_n+400$$

- 1 Calculer u_1 et u_2 .
- 2 On définit une autre suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ en posant pour tout entier naturel n : $v_n=1000-u_n$.
 - a Calculer les trois premiers termes de cette suite (v_n) .
 - b Montrer que cette suite (v_n) est géométrique et en déduire l'expression de v_n en fonction n .
- 3 a Déduire des résultats précédents que :

$$u_n=1000-200 \times (0,6)^n$$
 b Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

E.59    On considère la suite (u_n) définie par $u_0=8$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=\frac{1}{2} \cdot u_n-5.$$

- 1 a Calculer les termes u_1 et u_2 .
 b La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? On justifiera les réponses.
- 2 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n=u_n+10$.
 a Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et calculer le premier terme v_0 .
 b Exprimer le terme général v_n en fonction de n .
- 3 Déterminer la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n)

E.42   

Partie A : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme $u_0=800$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1}=0,6 \cdot u_n+400.$$

- 1 Calculer u_1 et u_2 .
- 2 On définit une autre suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ en posant pour tout entier naturel n , : $v_n=1000-u_n$.
 - a Calculer les trois premiers termes de cette suite (v_n) .
 - b Montrer que cette suite (v_n) est géométrique et en déduire l'expression de v_n en fonction de n .
- 3 a Déduire des résultats précédents que :

$$u_n=1000-200 \times (0,6)^n.$$
 b Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Partie B : application

Le président d'une association culturelle constate que chaque année l'association garde 60 % de ses anciens adhérents et que 400 personnes nouvelles adhèrent. On suppose que ces données chiffrées restent les mêmes au fil des ans. À la création de cette association, en janvier 2001, il y avait 800 adhérents.

- 1 Calculer le nombre d'adhérents en janvier 2002.
- 2 Quel sera le nombre d'adhérents en janvier 2003?
- 3 En quelle année verra-t-on pour la première fois l'effectif de l'association dépasser 990?

E.86    Soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0=6$ et par la relation de récurrence :

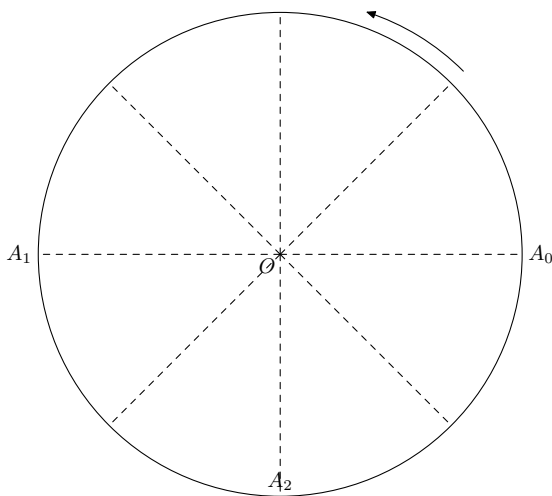
$$u_{n+1}=\frac{1}{4} \cdot u_n+3 \quad (n \text{ entier naturel})$$

- 1 On pose : $v_n=u_n-4$.
 - a Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b Montrer que $v_n=2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
 - c Déterminer la limite de la suite (v_n) , puis celle de la suite (u_n)
- 2 On pose : $a_n=\ln v_n$
 - a Montrer que la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison $-2 \cdot \ln 2$.
 - b Déterminer l'expression de a_n en fonction de n .
 - c Déterminer la valeur de n pour laquelle a_n est égale à $-13 \cdot \ln 2$.

E.1891



Un robot miniature se déplace sur un cercle de centre O et de rayon 1 mètre. Il est déposé au point A_0 puis il parcourt le cercle en tournant dans le sens direct (*sens de la flèche sur la figure*). Il est décidé que son trajet s'effectuera en plusieurs étapes (*voir figure*).



- **Étape 1 :** il parcourt le demi-cercle de A_0 à A_1 , la distance parcourue est notée d_1 .
- **Étape 2 :** il parcourt le quart de cercle de A_1 à A_2 , la distance parcourue est notée d_2 .
- **Étape n , avec $n \geq 2$:** il parcourt l'arc de cercle allant de A_{n-1} à A_n , la distance parcourue, notée d_n , étant la moitié de celle parcourue à l'étape précédente.

Rappels :

- Le périmètre d'un cercle de rayon 1 mètre est égal à 2π mètres.
- $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, pour tout nombre réel $q \neq 1$.

- 1 a Exprimer d_1 et d_2 en fonction de π .
b Reproduire la figure, puis placer le point A_3 . Justifier que : $d_3 = \frac{\pi}{4}$.
- 2 a Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Justifier la réponse donnée.
b Montrer que, pour tout nombre entier $n \geq 1$:
$$d_n = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

2. Somme des termes

E.56



L'unité est le centimètre

On considère un triangle $A_0B_0C_0$ rectangle isocèle en A_0 tel que : $A_0B_0 = A_0C_0 = 20$.

- 1 Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
- 2 Soit A_1 le milieu du segment $[B_0C_0]$, B_1 le milieu du segment $[A_0C_0]$ et C_1 le milieu du segment $[A_0B_0]$.
a Tracer le triangle $A_1B_1C_1$ est un triangle rectangle

- 3 On s'intéresse à la distance totale, notée D_n , parcourue par le robot sur le cercle à la fin de l'étape n .

a Calculer D_2 .

b Démontrer que, pour tout nombre entier $n \geq 1$:

$$D_n = 2\pi \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right].$$

c Déterminer la limite de la suite (D_n) .

d Justifier que, pour tout nombre entier $n \geq 1$:

$$D_n < 2\pi$$

Que peut-on en déduire pour le déplacement du robot sur le cercle?

E.1889



Le service commercial d'un journal a constaté que chaque année, il enregistre 1 000 nouveaux abonnés, mais 50 % des anciens abonnés environ ne renouvellent pas leur abonnement.

L'objet de cet exercice est d'étudier l'évolution du nombre d'abonnés si cette situation perdure sachant qu'au cours de l'année écoulée, le journal comptait 4 000 abonnés.

Dans ce but, on considère la suite (U_n) définie par :

$$u_0 = 4 \text{ et, pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = 0,5u_n + 1$$

- 1 Expliquer pourquoi, pour tout entier $n \geq 0$, u_n est une approximation du nombre de milliers d'abonnés au bout de n années.
- 2 Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5
u_n						

- 3 À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :

$$\text{Pour tout entier naturel } n : u_n > 2$$

- 4 Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 2$.

a Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5.

Préciser la valeur de v_0 .

b En déduire l'expression de v_n en fonction de n .

- 5 a En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer que :

$$\text{Pour tout entier naturel } n : u_n = 2 \cdot (1 + 0,5^n)$$

b Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

c Donner une interprétation de cette limite.

isocèle en A_1 .

- b Montrer que le triangle $A_1B_1C_1$ est un triangle rectangle isocèle en A_1 .

c Calculer l'aire de $A_1B_1C_1$ notée u_1 et l'aire de $A_0B_0C_0$ notée u_0 .

d Exprimer u_1 en fonction de u_0 .

- 3 Soit A_2 le milieu du segment $[B_1C_1]$, B_2 le milieu du segment $[A_1C_1]$ et C_2 le milieu de $[A_1B_1]$.

a Calculer l'aire du triangle $A_2B_2C_2$ notée u_2 .

(b) Exprimer u_2 en fonction de u_0 .

(4) En répétant cette construction, on définit un triangle $A_n B_n C_n$ rectangle isocèle en A_n . On note u_n l'aire de ce triangle $A_n B_n C_n$.

(a) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} et montrer que pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 200$.

(b) Déterminer le plus petit entier p tel que $u_p < 10^{-3}$.

(c) Exprimer en fonction de n la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_n$. En déduire la limite de cette somme quand n tend vers $+\infty$.

Rappel :

- Suites arithmétiques de premier terme u_0 et de raison a :

$$u_{n+1} = u_n + a \quad ; \quad u_n = u_0 + n \cdot a$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Suites géométriques de premier terme u_0 et de raison b :

$$u_{n+1} = b \cdot u_n \quad ; \quad u_n = u_0 \cdot b^n$$

$$\text{Si } b \neq 1 : 1 + b + b^2 + b^3 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$$

$$\text{Si } b = 1 : 1 + b + b^2 + b^3 + \dots + b^n = n + 1$$

E.31    La population d'une ville augmente régulièrement de 10 % par an. En 2000, elle était de 8 000 habitants.

(1) On désigne par u_n le nombre théorique d'habitants estimé pour l'année $(2000+n)$. On a donc $u_0 = 8000$.

(a) Calculer les termes u_1 et u_2 .

(b) Exprimer le terme u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire l'expression du terme u_n en fonction de n .

(c) Calculer le nombre d'habitants prévu pour l'année 2006, arrondie à l'unité près.

(d) Déterminer en quelle année la population aura doublé

(2) On note v_n l'augmentation par rapport à l'année précédente du nombre d'habitants constatée l'année $(2000+n)$. On a donc, pour tout entier naturel n non nul :

$$v_n = u_n - u_{n-1}.$$

(a) Calculer les termes v_1 et v_2 .

(b) Exprimer le terme général v_n en fonction de n .

(c) Calculer la somme $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ en fonction de n . Vérifier, pour le cas particulier n égal à 6, le résultat obtenu en (1) (c)

E.45



(1) On considère une suite arithmétique (u_n) de premier terme 20 et de raison -1 .

(a) Exprimer u_n en fonction de n .

(b) Donner l'expression de la somme des n premiers termes.

(c) En déduire la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

(2) On considère une suite géométrique (v_n) de premier terme 20 et de raison 0,6.

(a) Exprimer v_n en fonction de n .

(b) Donner l'expression de la somme des n premiers termes de la suite (v_n) .

(c) En déduire la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

E.60



Gaston hésite entre deux contrats d'embauche pour lesquels le salaire du premier mois est de 1600 euros.

- Contrat n^o1 : chaque mois à partir du deuxième mois le salaire mensuel augmente de 10 euros.

- Contrat n^o2 : chaque mois à partir du deuxième mois le salaire augmente de 0,6% par rapport au mois précédent.

(1) Pour chacun des deux contrats, déterminer la nature de la suite des salaires mensuels, préciser le premier terme et la raison.

(2) Pour chacun des deux contrats, calculer le total des salaires perçus pendant la première année.

(3) À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quel mois le salaire mensuel correspondant au contrat n^o2 devient supérieur à celui du contrat n^o1 . Justifier correctement la réponse.

On rappelle :

- La somme S des n premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q ($q \neq 1$) est :

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

- La somme S' des n premiers termes d'une suite arithmétique (v_n) de raison r :

$$S' = v_1 + v_2 + \dots + v_n = n \cdot v_1 + r \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

E.66



Un globe-trotter a parié de parcourir 5 000 km à pied.

Il peut, frais et dispos, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1 % tous les jours.

On notera d_n la distance parcourue durant le n -ième jour.

- 1 Calculer les distances d_1, d_2, d_3 parcourues durant les trois premiers jours.
- 2 Expliquer pourquoi : $d_{n+1} = 0,99 \cdot d_n$.
En déduire la nature de la suite (d_n) et l'expression de d_n en fonction de n .
 - a Calculer, en fonction de n , le nombre total L_n de kilomètres parcourus au bout de n jours.
$$L_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$$
 - b En déduire la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Le globe-trotter peut-il gagner?
- 3 À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir 4 999 km

On rappelle que :

- La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r est :

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2}$$

- La somme S' des n premiers termes d'une suite géométrique (v_n) de raison q ($q \neq 1$) est :

$$S' = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

E.34



Partie A :

Une retenue d'eau artificielle est alimentée par un ruisseau dont le débit diminue de 20 % d'un jour sur l'autre à cause de la chaleur. Pour la journée du 1^{er} juin le débit D_0 est égal à 300 m^3 par jour.

- 1 Calculer le débit D_1 pour le 2 juin.
- 2 Soit D_n le débit pour le n ^{ième} jour après le 1^{er} juin. Exprimer D_{n+1} en fonction de D_n . Quelle est la nature de la suite (D_n) ?
- 3 Exprimer D_n en fonction de n . Calculer le débit D_{29} pour la journée du 30 juin, arrondi au dixième de mètre cube près.
- 4 Calculer le volume d'eau apporté dans la retenue au cours des 30 jours du mois de juin, arrondi au mètre cube près.

On rappelle que : $1 + b + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Partie B :

À partir du 1^{er} juillet, le débit du ruisseau peut être considéré comme nul (*inférieur à $0,5 \text{ m}^3/\text{jour}$*).

La chaleur provoque dans la retenue une évaporation de 4 % du volume total de l'eau par jour.

De plus, on doit libérer de la retenue 500 m^3 d'eau chaque soir, après évaporation, à cause de la sécheresse.

Le 1^{er} juillet au matin, la retenue contient $V_0 = 100\,000 \text{ m}^3$ d'eau.

- 1 Soit V_n le volume d'eau au n ^{ième} matin après le 1^{er} juillet.
 - a Montrer que V_1 est égal à $95\,500 \text{ m}^3$.
 - b Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n .
- 2 On considère la suite de terme général U_n définie pour tout entier n par : $U_n = V_n + 12\,500$.
Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 0,96 dont on calculera le premier terme U_0 .
- 3 Exprimer le terme général U_n en fonction de n . En déduire l'expression de V_n en fonction de n .
- 4 Calculer V_{31} le volume restant au matin du 1^{er} août. (*On arrondira le résultat au mètre cube*)
- 5 À quelle date la retenue sera-t-elle à "sec"?

E.1838



Soit a un nombre réel, avec $a \neq 1$.

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

E.44    Dans cet exercice, les deux parties sont indépendantes.

Les résultats demandés seront arrondis au centième.

Pour effectuer un achat dont le coût s'élève à 1 600 €, un client a le choix entre deux formes de paiement.

On admettra que le dernier versement permet de dépasser le montant de l'achat, incluant les frais du crédit.

Partie A

Dans cette question, le premier versement s'élève à 150 € et on effectue une suite de versements notée (a_n) qui vérifie $a_0 = 150$ et, pour tout entier n :

$$a_{n+1} = 0,95 \cdot a_n + 100$$

- 1 Calculer le deuxième versement a_1 et le troisième a_2 .
- 2 Montrer qu'avec cinq versements, la somme de 1 600 € est remboursée.

Partie B

Dans cette question, le premier versement s'élève à 200 €, puis chaque versement est égal au précédent diminué de 5%.

On note (b_n) la suite des versements avec $b_0 = 200$.

- 1 Vérifier que $b_1 = 190$ et calculer b_2 et b_3 .
- 2 Exprimer le terme b_{n+1} en fonction de b_n .
En déduire la nature de la suite (b_n) et donner l'expression du terme général b_n en fonction de n .
- 3 Calculer en fonction de n la somme S_n égale à :

$$b_0 + b_1 + \dots + b_n$$

des $(n+1)$ premiers versements. Calculer les sommes S_8 et S_9 et interpréter le résultat.

E.46    Soit OA_0A_1 un triangle rectangle isocèle en A_1 .

Extérieurement au triangle OA_0A_1 , on construit sur le côté $[OA_1]$ un triangle OA_1A_2 rectangle isocèle en A_2 .

- 1 On pose $OA_0 = 1$. Montrer que : $OA_1 = A_0A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- 2 On itère le procédé et on trace une suite de triangles rectangles isocèles. Si $OA_{n-1}A_n$ est un triangle rectangle isocèle en A_n , on trace alors extérieurement à celui-ci, le triangle OA_nA_{n+1} rectangle isocèle en A_{n+1} .
Établir que : $OA_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} OA_n$

Dans la suite de l'exercice, on note (u_n) , la suite telle que $u_0 = OA_0$, $u_1 = OA_1$, ..., $u_n = OA_n$

- 3 a Déduire de la question précédente que la suite (u_n) est une suite géométrique et la caractériser.
- b On note L_n la longueur de la ligne brisée $OA_0A_1 \dots A_{n-1}A_n$, c'est-à-dire :

$$L_n = OA_0 + A_0A_1 + \dots + A_{n-1}A_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$\text{Établir que : } L_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

En déduire la limite de la suite (L_n) lorsque n tend vers $+\infty$

Formulaire

- Si $0 < b < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^n = 0$
- Si (v_n) est une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$) et de premier terme v_0 , alors :
$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

E.53    Urbain et Valérie ont obtenu le même diplôme la même année et ont été embauchés, tous les deux, le 1^{er} janvier 2000, dans deux entreprises différentes, sous deux contrats à durée indéterminée différents :

- la première année, le salaire annuel net d'Urbain s'élève à 14 000 € et ce salaire augmente de 4 % chaque année au 1^{er} janvier par rapport au salaire annuel précédent.
- Valérie débute avec un salaire annuel net de 14 500 € et ce salaire augmente de 500 € chaque année au 1^{er} janvier.

On appelle u_n le salaire annuel net d'Urbain en euros pour l'année $(2000+n)$ et v_n celui de Valérie.

Avec ces notations, on a : $u_0 = 14\,000$; $v_0 = 14\,500$.

- 1 a Calculer les termes u_1 et u_2 .
b Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison
c Exprimer le terme général u_n en fonction de n .
- 2 a Calculer les termes v_1 et v_2 .
b Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on donnera la raison.
c Exprimer le terme général v_n en fonction de n .
- 3 Calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_8$ et $v_0 + v_1 + \dots + v_8$.
Interpréter ces résultats.
La situation est-elle la même à la fin de l'année suivante?

E.1837  

① Développer : $(n+1)(n+2)$.

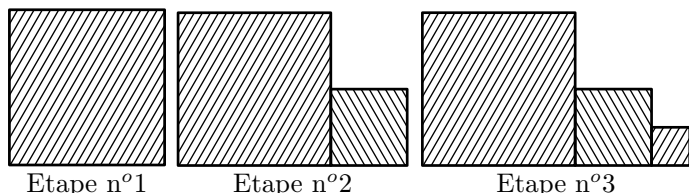
② Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

E.4627   On construit successivement une figure de la manière suivante :

- On part d'un carré dont le côté mesure 4 cm ;
- À l'étape suivante, on rajoute un nouveau carré dont le côté mesure la moitié du carré précédemment ajouté.

Voici les trois premières étapes de cette construction représentées :



On note u_n l'aire totale de la figure construite à l'étape n : on vient de construire la suite (u_n) de nombres réels.

- ① On note (v_n) la suite des aires des carrés rajoutés à chaque étape de cette construction.
 - a Donner les cinq premiers termes de la suite (v_n) .
 - b Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
 - c Donner la formule explicite associant chaque terme de la suite (v_n) en fonction de son rang.
- ② a Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
 - b Montrer que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
- ③ La formule explicite définissant la suite (u_n) est de la forme :

$$u_n = \alpha \cdot (1 - \beta^{n+1}) \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}.$$
 Déterminer la valeur de α et β .

E.54    Il est assez curieux qu'une infinité de termes positifs que l'on ajoute au fur et à mesure puisse donner un résultat fini. Ainsi le Grec Zénon prétendait, au IV^{ème} siècle avant J.C., démontrer qu'il est impossible d'aller d'un point à un autre, car "avant d'atteindre le but, il faut arriver au milieu de la route, puis atteindre le milieu du trajet à parcourir, et ainsi de suite : comme il y a une infinité d'étapes à observer, on ne peut arriver au bout de son voyage".

Les nombres et leurs mystères - A. Warusfel.

I- Construction de la figure

Construire un segment $[AB]$ puis

- ① le milieu A_0 de $[AB]$,
- ② le milieu A_1 de $[A_0B]$,
- ③ le milieu A_2 de $[A_1B]$.

II- Utilisation d'une suite numérique :

On construit ainsi une suite de points A_n tels que pour tout n entier supérieur ou égal à 1, A_n est le milieu du segment $[A_{n-1}B]$.

On suppose que $AB=2$. On pose :

$$d_0 = AA_0 \quad ; \quad d_1 = A_0A_1 \quad ; \quad d_2 = A_1A_2$$

et pour tout entier $n \geq 1$: $d_n = A_{n-1}A_n$.

- ① On a $d_0=1$, calculer d_1 et d_2 .
- ② On admet que, pour tout entier naturel n :

$$d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n.$$
 - a En déduire que la suite (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b Donner l'expression de d_n en fonction de n .
- ③ On pose : $S_n = d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_n$.
 - a Vérifier que : $S_n = 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$.
 - b Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini?
 - c En donner une interprétation géométrique.

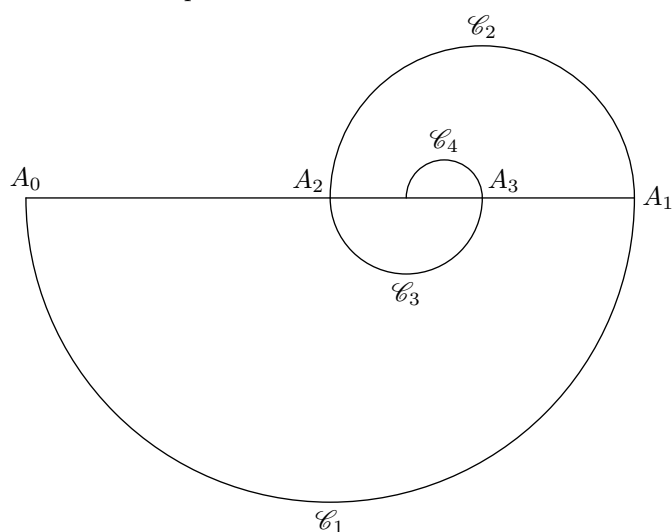
Formulaire : Somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q (avec $q \neq 1$) :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

E.30    Un paysagiste doit créer dans un jardin une spirale plantée d'arbustes.

Il veut connaître la longueur de cette spirale pour évaluer le nombre d'arbustes à planter.

Voici le schéma qu'il dresse :



Cette spirale est constituée de demi-cercles construits de la manière suivante :

- le diamètre $[A_0A_1]$ du demi-cercle $\mathcal{C}_0$ a pour milieu A_2 ;
- le diamètre $[A_1A_2]$ du demi-cercle $\mathcal{C}_1$ a pour milieu A_3 ;

Ainsi de suite, on construit les demi-cercles $\mathcal{C}_n$ (n est un entier naturel).

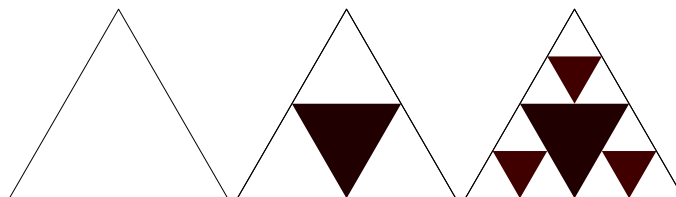
L'unité de longueur est le mètre. On donne $A_0A_1 = 100$.

- 1 On note ℓ_n la longueur du demi-cercle $\mathcal{C}_n$.
 - a Calculer ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 , arrondies au centimètre près.
 - b Exprimer ℓ_{n+1} en fonction de ℓ_n . Indiquer la nature de la suite (ℓ_n) en précisant sa raison.
 - c Montrer que, pour tout entier n : $\ell_n = 50 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- 2 Le paysagiste décide de ne tracer que les huit demi-cercles $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots, \mathcal{C}_7$.
On appelle $\mathcal{L}$ la longueur de la spirale obtenue avec ces huit demi-cercles.
 - a Calculer : $\mathcal{L} = \ell_0 + \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_7$.
Donner l'arrondi de $\mathcal{L}$ à 10^{-1} .
 - b Sachant que le paysagiste doit planter un arbuste tous les cinquante centimètres à partir de A_0 , en déduire le nombre d'arbustes à planter.

Formule : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$

E.39    On divise un triangle équilatéral en quatre triangles équilatéraux obtenus en traçant les segments joignant les milieux des côtés et on noircit le triangle central.

Chaque triangle non noirci est alors divisé en quatre triangles équilatéraux selon le même procédé et on noircit le triangle central comme précédemment.



- 1 a Réaliser la 3^{ème} étape en partant d'un triangle équilatéral de côté 16 cm. Combien de triangles noircis ont-ils été rajoutés?
b Combien de triangles noircis seront-ils rajoutés à la quatrième étape?
- 2 On note T_n le nombre de triangles noircis rajoutés à la n -ième étape où n est un entier supérieur ou égal à 1. La suite (T_n) , ainsi définie, est une suite géométrique de raison 3.
 - a Donner la valeur de T_1, T_2, T_3 .
 - b Exprimer T_n en fonction de n . Vérifier les résultats trouvés à la question 1.
- 3 Calculer le nombre total de triangles noircis après la dixième étape.

E.7811  

Le salaire minimum de croissance (SMIC) correspond au salaire horaire minimum légal que le salarié doit percevoir.

Source : <http://service-public.fr>

En 2018, le montant net du SMIC est de 1187€ et l'augmentation est fixée à 0,9 % par an. On note u_n le montant du SMIC à l'année 2018+n.

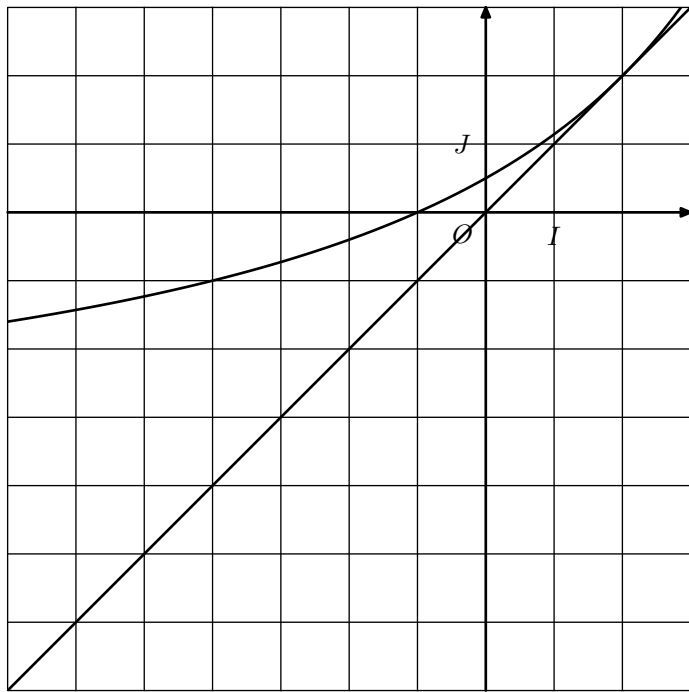
- 1 Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner les éléments caractéristiques de la suite (u_n) .
- 2 a Donner l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction n .
b Déterminer le montant du SMIC en 2030, arrondi au centime près.
- 3 À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année pour laquelle le SMIC dépassera pour la première fois le montant de 1400€.

3. Suite homographique

E.2413    On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence suivante : $u_{n+1} = \frac{4u_n + 4}{-u_n + 8}$ et dont le premier terme vaut : $u_0 = -6$

- 1 Le graphique ci-dessous, représente la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{4x + 4}{-x + 8}$$



- a Placer sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de cette suite.
- b Faire une conjecture quant à la limite de la suite lorsque n tend vers $+\infty$.
- 2 Déterminer la valeur des trois premiers termes de la suite (u_n) .
- 3 On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme de rang n est définie par : $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$
- a Déterminer la valeur des trois premiers termes de la suite (v_n) .
- b Établir la relation suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:
- $$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{6}$$
- c En déduire la nature de la suite (v_n) ainsi que la formule explicite définissant le terme de rang n en fonction de n .
- 4 a Établir la formule suivante : $u_n = \frac{1+2v_n}{v_n}$
- b En déduire la formule explicite définissant la suite (u_n) .
- 5 Donner la limite de la suite (u_n) .

E.2416 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{8u_n + 1}{-u_n + 10}$$

dont le premier terme a pour valeur : $u_0 = -5$

- 1 Donner la valeur des trois premiers termes de la suite (u_n) .
- 2 On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation :
- $$v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$
- a Déterminer les trois premiers termes de la suite (v_n) .

- b Établir la relation suivante :

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{9}$$

- c Donner la nature de la suite (v_n) et donner l'expression du terme v_n en fonction de n .

- 3 a Établir la relation suivante :

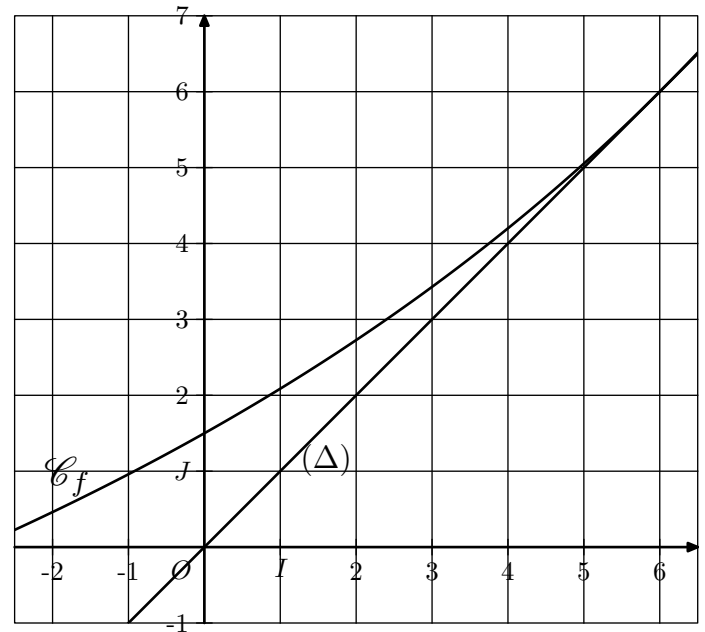
$$u_n = \frac{1 + v_n}{v_n}$$

- b Exprimer le terme u_n en fonction de n .

- 4 Donner la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

E.2983 Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = -\frac{12x + 36}{x - 24}$$



La droite (Δ) est la première bissectrice du plan.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad u_0 = -2$$

- 1 Graphiquement, placer sur l'axe des abscisses les cinq premières valeurs de la suite (u_n) .
- 2 Déterminer, par le calcul, la valeur des trois premiers termes de la suite (u_n) .
- 3 On définit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$w_n = \frac{1}{u_n - 6}$$

- a Établir l'égalité suivante : $w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{18}$
- b Donner la nature et les caractéristiques de la suite (w_n) ainsi que l'expression du terme w_n en fonction de n .
- c Déterminer l'expression du terme u_n en fonction de n .
- 4 En déduire la limite de la suite (u_n)

4. Suites adjacentes

E.654    On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n , par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

- 1 Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2 .
- 2 Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :
 $w_n = v_n - u_n$.
 - a Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
 - b Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n)
- 3 Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) , démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on déduire?

E.3464   On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

- 1
 - a Établir que la suite (u_n) est décroissante.
 - b Établir que la suite (v_n) est croissante.
- 2
 - a Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.
 - b Que peut-on dire de la convergence de ces deux suites?

E.3466   On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x-2}{x}$$

- 1
 - a Dresser le tableau de variations de la fonction f .
 - b En déduire que pour tout nombre $x \in \left[\frac{3}{2}; 4\right]$, on a :
 $f(x) \in \left[\frac{3}{2}; 4\right]$

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{3 \cdot u_n - 2}{u_n} \end{cases} ; \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{3 \cdot v_n - 2}{v_n} \end{cases}$$

- 2 Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a :
 $u_n \in \left[\frac{3}{2}; 4\right]$

De même, on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \in \left[\frac{3}{2}; 4\right]$

- 3 Déterminer la valeur des trois premiers termes de chacune de ces suites.
- 4
 - a Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 - b Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
 - c Établir l'encadrement suivant, par un raisonnement par récurrence, pour tout entier naturel n :
 $0 \leq v_n - u_n \leq 3 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n$
 - d Établir que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
- 5
 - a Justifier que la limite ℓ vérifie : $\ell = \frac{3 \cdot \ell - 2}{\ell}$
 - b Justifier que la limite des deux suites (u_n) et (v_n) est 2.

E.3467   On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot u_n + 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n + 2 \end{cases}$$

- 1 Montrer que (u_n) est croissante.
- 2 Montrer que (v_n) est décroissante.
- 3 Montrer que, pour tout entier naturel, on a l'encadrement :
 $0 \leq v_n - u_n \leq 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- 4 Établir que les deux suites (u_n) sont adjacentes.
- 5 En déduire que ces deux suites convergent vers un même nombre ℓ ; déterminer la valeur de ℓ .

E.3516



On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3 \cdot u_n + 1}{4} \end{cases} \forall n \in \mathbb{N} ; \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3 \cdot v_n + 1}{4} \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$$

1 Calculer u_1, u_2, u_3 d'une part et v_1, v_2, v_3 d'autre part.

2 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm) tracer les droites D et Δ d'équations respectives :

$$y = \frac{3x+1}{4} ; \quad y = x$$

Utiliser D et Δ pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 ainsi que les points B_1, B_2, B_3 d'abscisses respectives v_1, v_2, v_3 .

Les tracés seront effectués sur une feuille de papier millimétré.

3 On considère la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$s_n = u_n + v_n$$

a Calculer s_0, s_1, s_2, s_3 . À partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite (s_n) ?

b À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (s_n) est une suite constante.

4 On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par :

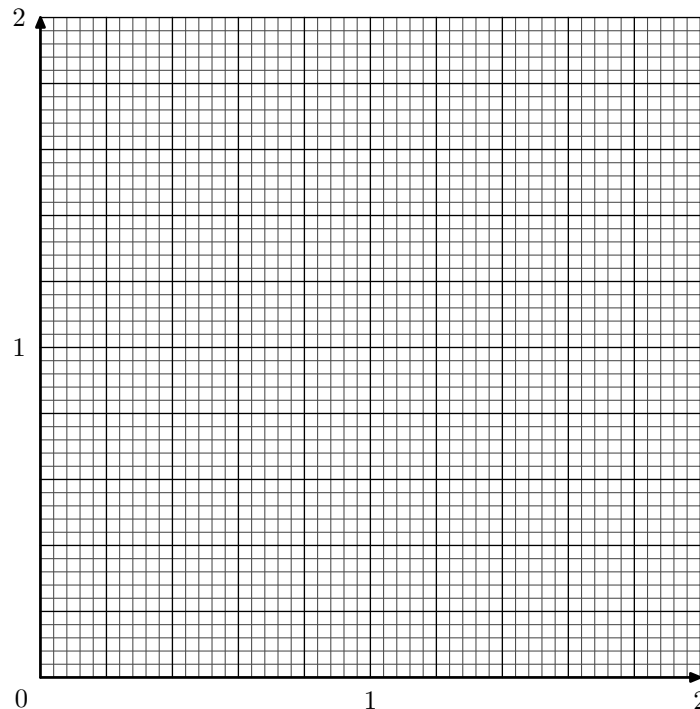
$$d_n = v_n - u_n$$

a Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique.

b Donner l'expression de d_n en fonction de n .

5 En utilisant les résultats des questions 3 b et 4 b donner l'expression de u_n et v_n en fonction de n .

6 Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent. Préciser leurs limites.



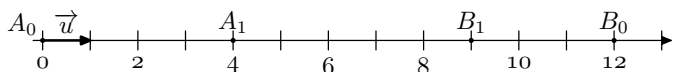
5. Suites adjacentes - Annales

E.3184



Partie A

On considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante : sur un axe orienté $(O; \vec{u})$ donné ci-dessous, le point A_0 a pour abscisse 0 et le point B_0 a pour abscisse 12.



Le point A_{n+1} est le barycentre des points $(A_n; 2)$ et $(B_n; 1)$, le point B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n; 1)$ et $(B_n; 3)$.

1 Sur le graphique, placer les points A_2, B_2 .

2 On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives des points A_n et B_n . Montrer que :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$$

$$\text{On admet de même que : } b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$$

Partie B

1 On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$u_n = b_n - a_n$$

a Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.

b Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier na-

turel n .

c Déterminer la limite de (u_n) . Interpréter géométriquement ce résultat.

2 a Démontrer que la suite (a_n) est croissante (on pourra utiliser le signe de u_n).

b Étudier les variations de la suite (b_n) .

3 Que peut-on déduire des résultats précédents quant à la convergence de suites (a_n) et (b_n) ?

Partie C

1 On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = 3a_n + 4b_n$$

Montrer que la suite (v_n) est constante.

2 Déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n) .

E.3227    On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n , par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

- 1 Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2 .
- 2 Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :
 $w_n = v_n - u_n$.
 - a Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
 - b Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n)
- 3 Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) , démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on déduire?
- 4 On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n , par :
 $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$
 - a Démontrer que la suite (t_n) est constante.
 - b En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n) .

E.3235    Le graphique de l'annexe sera complétée et remis avec la copie.

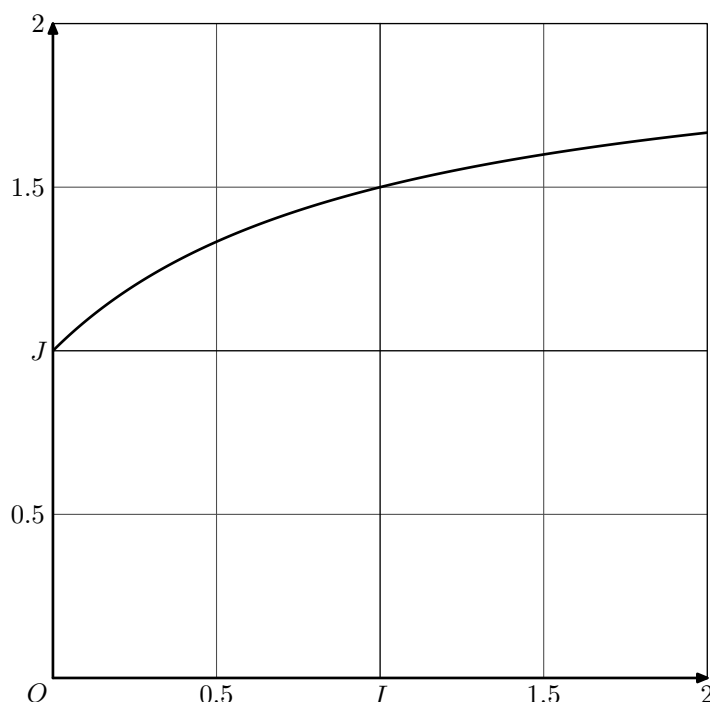
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

- 1 Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 2]$. Montrer que si $x \in [1; 2]$ alors $f(x) \in [1; 2]$.
- 2 (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
 - $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = f(v_n)$.
- a Le graphique donné en annexe représente la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$.
 Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
 À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?
- b Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
 - Pour tout entier naturel n : $1 \leq v_n \leq 2$.
 - Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} \leq v_n$.
 On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
 - Pour tout entier naturel n : $1 \leq u_n \leq 2$.
 - Pour tout entier naturel n : $u_n \leq u_{n+1}$.
- c Montrer que pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}.$$
 En déduire que pour tout entier naturel n :

$$v_n - u_n \geq 0 \quad ; \quad v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$$
- d Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
- e Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α .
 Déterminer la valeur exacte de α .



E.3270    On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$, $b_0 = 7$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot (a_n + 2 \cdot b_n) \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Soit D une droite munie d'un repère $(O; \vec{i})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n .

- 1 Placer les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2 .
- 2 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
Exprimer u_n en fonction de n .
- 3 Comparer a_n et b_n . Étudier le sens de variation des suites (a_n) et (b_n) . Interpréter géométriquement ces résultats.
- 4 Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
- 5 Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (v_n) est une suite constante. En déduire que les segments $[A_n B_n]$ ont tous le même milieu I .
- 6 Justifier que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculer leur limite. Interpréter géométriquement ce résultat.

E.3243    Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :

- (1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;
- (2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a :
 $u_n \leq v_n$;
- (3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

“Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite”.

Partie B

On considère une suite (u_n) , définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

- 1 Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
- 2 Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1 .
- 3 Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
- 4 Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

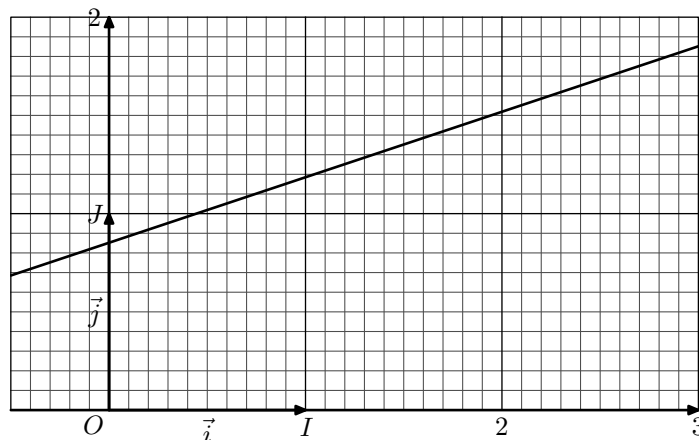
E.3997   

- 1 La suite u est définie par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + \frac{23}{27} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- a On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan, la droite d'équation $y = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{23}{27}$ et le point A de coordonnées $(2; 0)$.
Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u .
- b Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $\ell = \frac{23}{18}$.
- c Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :
 $u_n \geq \frac{23}{18}$
- d Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.
- 2 a Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :
$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

c'est-à-dire que :
$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$
- b La suite v est définie par $v_n = 1,2777\dots 7$ avec n décimales consécutives égales à 7. Ainsi :
 $v_0 = 1,2 \quad ; \quad v_1 = 1,27 \quad ; \quad v_2 = 1,277$
En utilisant la question a) démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers.).
- 3 La suite u définie au 1) et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.



E.3245



Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes et sont notées sur un point chacune. Pour chaque question, il y a exactement deux propositions correctes. Le candidat doit indiquer sur sa copie les deux propositions vraies. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point, chaque réponse fausse enlève 0,25 point. Donner trois propositions ou plus d'une question, ou bien n'en donner aucune, ne rapporte aucun point.

Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

- 1 Les suites suivantes sont convergentes :

a $\left(\frac{2^n}{n^{2005}}\right)_{n>0}$ b $\left(\frac{2n + (-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$
 c $\left(n \cdot \sin \frac{1}{n}\right)_{n>0}$ d $\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$

- 2 On construit trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) ayant, pour tout entier naturel n , les propriétés suivantes :

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -1 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n) = 1$$

Alors :

- a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = 0$
 b La suite (u_n) est minorée.
 c Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $-1 \leq v_n \leq 1$.
 d On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

- 3 Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- a La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y=x$ et $y=2x-1$.
 b La suite (v_n) , définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$, est géométrique.
 c La suite (v_n) est majorée.
 d La suite (w_n) , définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln(u_n - 1)$, est arithmétique.

6. Suite : passage à la limite

E.3413



La suite u est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

- 1 On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan en annexe, la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ et le point A de coordonnées $(2; 0)$. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u .
 2 Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $\ell = \frac{23}{18}$.

- 4 Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies pour $n > 0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

- a Les suites (x_n) et (y_n) sont toutes deux croissantes.
 b $x_3 = \frac{19}{20}$ et $y_3 = \frac{37}{60}$.
 c Les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas majorées.
 d Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

E.3237



- 1 Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0; 1]$:

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$$

- 2 a Calculer $\int_0^1 \frac{1}{x+n} dx$
 b Dédire en utilisant 1, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
 puisque

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

- 3 On appelle U la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

Démontrer que U est décroissante (on pourra utiliser 2 b)

- 4 On désigne par V la suite de terme général :

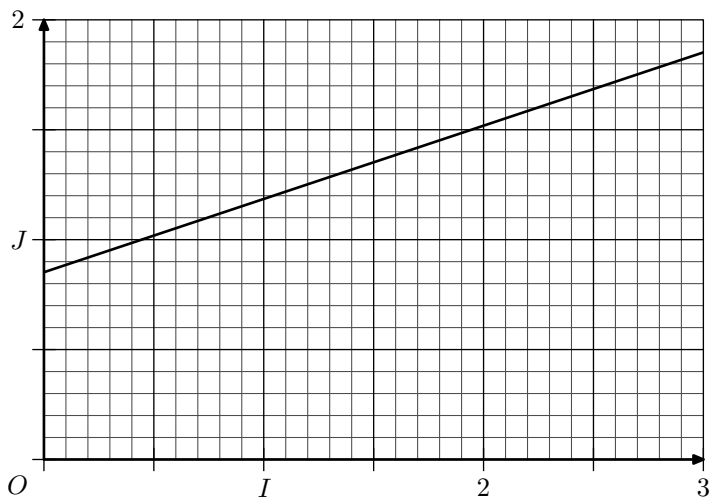
$$V(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

Démontrer que V est croissante.

- 5 Démontrer que U et V convergent vers une limite commune notée γ .
 Par la méthode de votre choix, déterminer la valeur de γ arrondie à 10^{-2} près.

- 3 Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :
- $$u_n \geq \frac{23}{18}$$

- 4 Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.



E.3426   On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2 \cdot u_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Le but de l'exercice est de montrer que la suite (u_n) est divergente ; pour cela, effectuons un raisonnement par l'absurde, supposons que la suite (u_n) converge vers ℓ :

- ① Déterminer la valeur de ℓ .

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
 $v_n = u_n - \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- ② Établir que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.
 ③ En déduire que la suite (u_n) est divergente.

E.3427   On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot u_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- ① Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa valeur de convergence.

Déterminer, par un passage à la limite, la valeur de ℓ .

- ② On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n + 3$

- a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera les caractéristiques.
 b) En déduire l'expression du terme u_n en fonction de n .
 c) Établir la convergence de la suite (u_n) .

E.3456



- ① Si une suite (u_n) converge vers ℓ , vers quelle valeur converge l'expression $\frac{1}{3} \cdot u_n + \frac{1}{3}$.

- ② Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + \frac{1}{3} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On admet que la suite (u_n) converge vers un nombre noté ℓ .

- a) Déterminer la valeur exacte des huit premiers termes de la suite (u_n) .
 b) À l'aide de la calculatrice compléter le tableau suivant en y inscrivant les valeurs approchées à 10^{-2} près.

n	u_n	$\frac{1}{3} \cdot u_n + \frac{1}{3}$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

- c) Émettre une conjecture sur les deux limites suivantes :

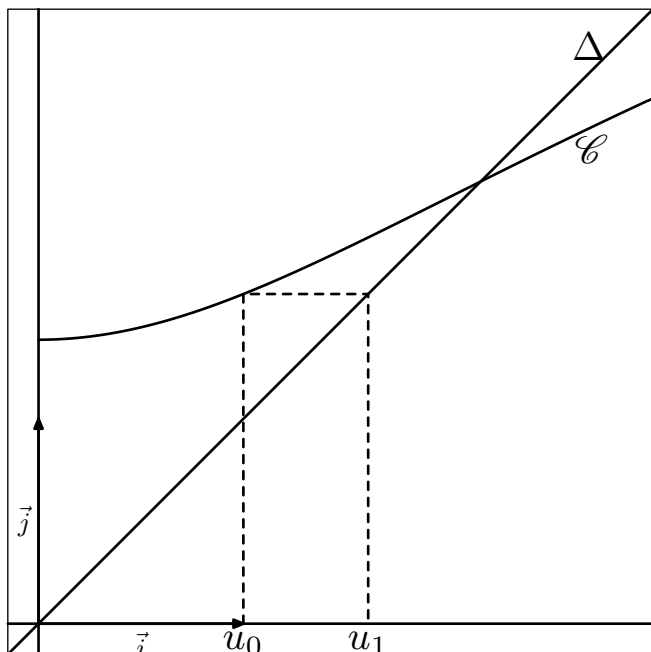
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \cdot u_n + \frac{1}{3}$$

- d) Résoudre l'équation : $x = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{3}$
 e) En déduire la valeur de la limite ℓ .

E.3471



La courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f et la droite Δ sont tracés sur le graphique donné ci-dessous :



On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - x$$

On admet les propriétés suivantes :

- La fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- La fonction g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
- Il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$; le nombre α appartient à l'intervalle $[2; 3]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- 1 À partir de u_0 , en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ , on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière, placer les termes u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de constructions.
- 2 Placer le point I de la courbe $\mathcal{C}$ qui a pour abscisse α .
- 3 a Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $1 \leq u_n \leq \alpha$
 b Démontrer que la suite (u_n) converge.
 c Déterminer sa limite.

7. Suite et passage à la limite - Annales

E.3148



Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right).$$

- 1 a Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$$
 Étudier le sens de variation de f , et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (On prendra comme unité 2 cm).
 b Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $(O; \vec{i})$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3 .
- 2 a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq \sqrt{2}$.
 b Montrer que pour tout $x \geq \sqrt{2}$: $f(x) \leq x$.
 c En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
 d Prouver qu'elle converge.
- 3 Soit ℓ la limite de la suite (u_n) . Montrer que ℓ est solution de l'équation : $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$
 En déduire sa valeur.

E.3902



Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier n par :

$$u_{n+1} = \frac{4 \cdot u_n - 1}{u_n + 2}$$

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $] -2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ alors on a, pour tout nombre entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne en annexe une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

- 1 a Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
 b Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?
- 2 a Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $u_n - 1 > 0$
 b **Indication :** dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
 Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1 b
- 3 Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n .

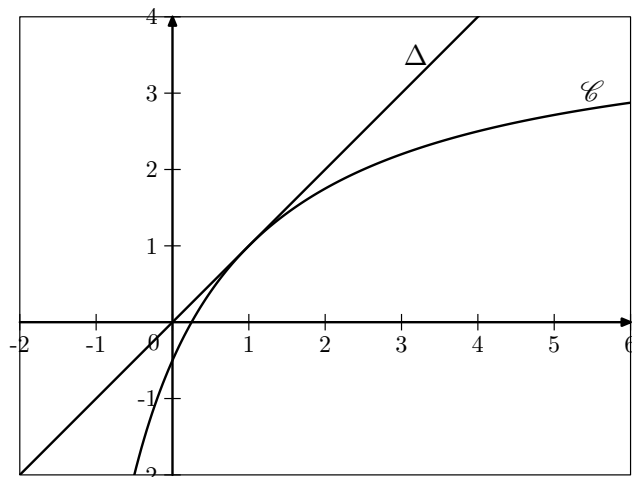
Pour tout nombre entier naturel n , on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

- a Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique

de raison $\frac{1}{3}$.

(b) Pour tout nombre entier naturel n , exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

(c) En déduire la limite de la suite (u_n) .



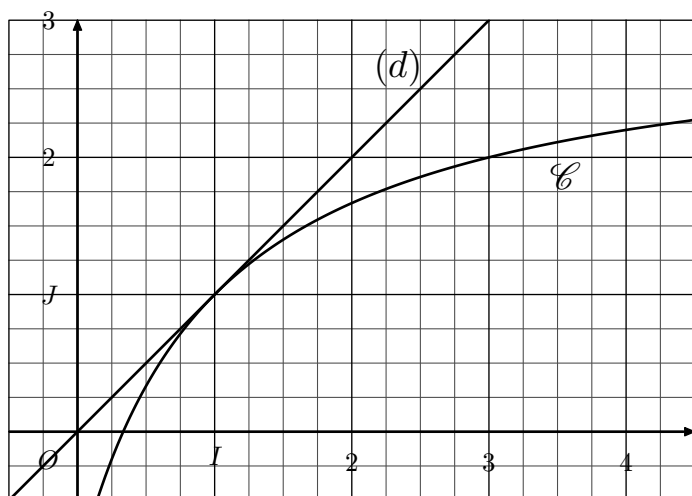
E.5017 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$$

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

(1) On a tracé, ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et la droite (d) d'équation $y = x$.



(a) Sur le graphique, placer sur l'axe des abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3 . Faire apparaître les traits de construction.

(b) Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

(2) Dans cette question, nous allons démontrer les conjectures formulées à la question (1) (b) :

(a) Démontrer par un raisonnement par récurrence que

$u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$. En déduire que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

(c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

E.3242 I. Première partie

On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad ; \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

(1) Étudier les variations de f et de g sur $[0; +\infty[$.

(2) En déduire que pour tout $x \geq 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

II. Deuxième partie

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

(1) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

(2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\ln u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

(3) On pose :

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}$$

À l'aide de la première partie, montrer que :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

(4) Calculer S_n et T_n en fonction de n . En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

(5) Étude de la convergence de la suite (u_n) .

(a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

(b) En déduire que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.

(c) On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \leq w_n$ pour tout n entier naturel, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$$

Montrer alors que $\frac{5}{6} \leq \ln \ell \leq 1$ et en déduire, un encadrement de ℓ .

8. Anciennes annales (avant 2012)

E.5142 Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x$.

- 1 Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.
- 2 Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
- 3 En déduire que si $x \geq e$ alors $f(x) \geq e$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points A_0 , A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0 , u_1 et u_2 . On laissera apparaître les traits de construction.

Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

- 2 a Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq e$.

- b Déterminer les variations de la suite (u_n) .
- c En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- d Déterminer sa limite ℓ .

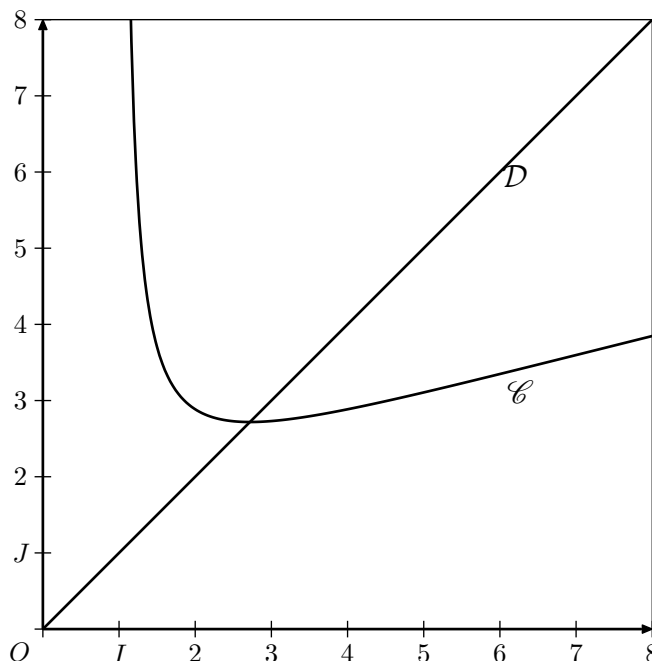
- 3 On donne l'algorithme suivant :

```

X ← 5
Y ← 0
Tant que X > 2;72
    X ← X / ln X
    Y ← Y + 1
Fin Tant que
    
```

À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur de la variable Y à la fin de l'exécution de cet algorithme :

n	u_n
0	5
1	3,106 674 672 8
2	2,740 652 532 3
3	2,718 372 634 6
4	2,718 281 830 01
5	2,718 281 828



E.3964



On considère l'équation notée :
(E) : $\ln x = -x$

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln x.$$

- 1 Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 2 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 3 Vérifier que : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{4x - \ln x}{5}$$

- 1 Étude de quelques propriétés de la fonction g .
 - a Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.
 - c Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ est solution de l'équation (E) si, et seulement si, $g(x) = x$.
- 2 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n , par :
$$u_{n+1} = g(u_n)$$
 - a En utilisant le sens de variation de la fonction g , démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$
 - b En déduire que la suite (u_n) converge vers α .
- 3 Recherche d'une valeur approchée de α :

a) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur u_{10} , arrondie à la sixième décimale.

b) On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α .

En déduire un encadrement de α sous la forme :

$$u \leq \alpha \leq v$$

où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

E.4081



Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1) \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

2) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.

En déduire que si $x \in [0; 1]$ alors $f(x) \in [0; 1]$

Partie B

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$: $u_n \in [0; 1]$

2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

3) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

E.5152



Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 5 \cdot \ln(x+3) - x$

1) a) On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0; +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0; +\infty[$.

b) Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

c) Montrer que, pour tout x strictement positif, on a :

$$f(x) = x \cdot \left(5 \cdot \frac{\ln x}{x} - 1 \right) + 5 \cdot \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)$$

d) En déduire la limite de f en $+\infty$.

e) Compléter le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0; +\infty[$. On notera α cette solution.

b) Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14; 15]$, donner la valeur de α arrondie à 10^{-2} près.

c) En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Partie B

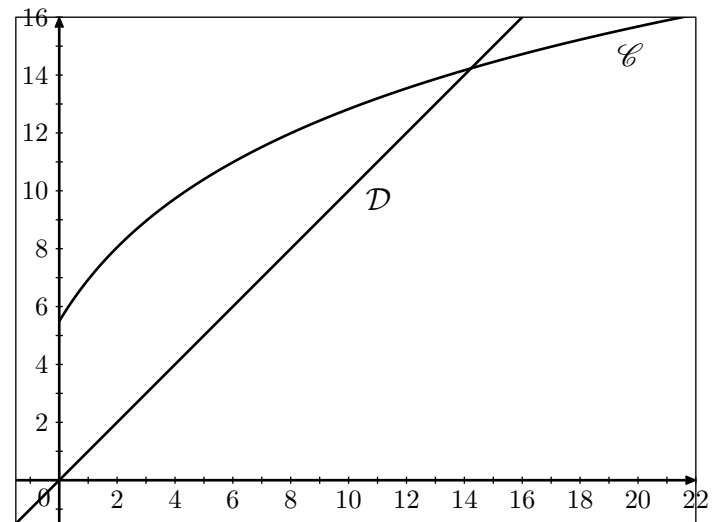
Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 4 ; \quad u_{n+1} = 5 \cdot \ln(u_n + 3) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 5 \ln(x+3)$$

Ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction g .



1) a) Construire sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

b) Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n) .

2) a) Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2) a).

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier na-

turel n , on a :

$$0 \leq u_n \leq a$$

- (d) Démontrer alors la conjecture émise à la question (1) (b) de la partie B.

- (e) En utilisant la question (2) (a) de la partie A, justifier que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

- (3) On considère l'algorithme suivant

```

u ← 4
Tant que u-14; 2 < 0
    u ← 5 · ln(u+3)
Fin Tant que
    
```

- (a) Justifier que l'exécution de cet algorithme se termine.

Indication : Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

- (b) Donner la valeur de la variable u à la fin de l'exécution de cet algorithme (on arrondira à 5 décimales).

E.3200 Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

- (1) (a) Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.

- (b) Étudier les variations de la fonction f .

- (2) Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) On a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f sur la figure donnée en annexe qui sera rendue avec la copie. Construire la droite d'équation $y=x$ et les points M_1 et M_2 de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives u_1 et u_2 . Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) .

- (b) Démontrer que pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq e$ (on pourra utiliser la question (1) (b)).

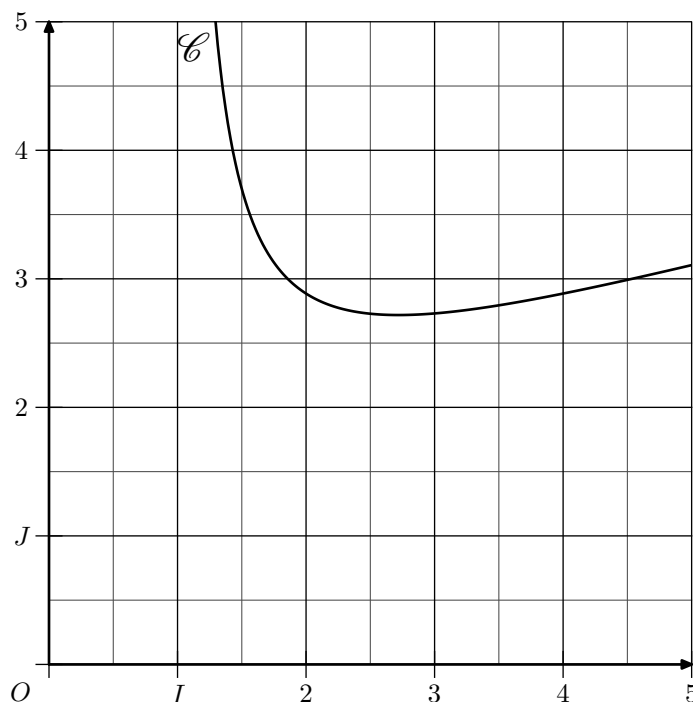
- (c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[e; +\infty[$.

Partie B

On rappelle que la fonction f est continue sur l'intervalle $]1; +\infty[$:

- (1) En étudiant de deux manières la limite de la suite $(f(u_n))$, démontrer que : $f(\ell) = \ell$.

- (2) En déduire la valeur de ℓ .



E.3228    Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \cdot e^{-x}$$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 10 cm).

Partie A.

- (1) (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

- (b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

- (c) Construire Γ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- (2) (a) Montrer que, pour tout réel m de $]0; \frac{1}{e}[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

- (b) Dans le cas où $m = \frac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions (avec $\alpha < \beta$). Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .

- (c) Résoudre l'équation $f(x) = m$ dans le cas où $m = 0$ et $m = \frac{1}{e}$.

Partie B.

- (1) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

où α est le réel défini à la question A (2) (b)

- (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$.

- (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

- (c) La suite (u_n) est-elle convergente? Si oui, déterminer sa limite.

- (2) On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = \ln u_n$.

- (a) Montrer que, pour tout n entier naturel, on a :

$$u_n = w_n - w_{n+1}$$

- (b) On pose : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Montrer que : $S_n = w_0 - w_{n+1}$.

- (c) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

- 3 On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0 ($v_0 > 0$) et, pour tout entier naturel n :
- $$v_{n+1} = v_n \cdot e^{-v_n}$$

Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout $n \geq 1$, on ait : $u_n = v_n$?
Si oui, préciser laquelle.

9. Suites homographiques et suites géométriques

E.5734    On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1 + 0.5 \cdot u_n}{0.5 + u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admet que pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 1$

- 1 On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$
 - a Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
 - b Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n .
- 2
 - a Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n \neq 1$.
 - b Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}.$$
 - c Déterminer la limite de la suite (u_n) .

E.5739    On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{3 \cdot u_n}{1 + 2 \cdot u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admet que pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < 1$

Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

- 1 Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
- 2 Exprimer pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
- 3 En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$$
- 4 Déterminer la limite de la suite (u_n) .

E.6737   On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{2 - u_n}{u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admet que les termes de la suite (u_n) sont différents de -2 et de 0 .

- 1 On définit la suite (v_n) définie par la relation :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
 - a Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.
 - b Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n .
- 2 En déduire une expression des termes de la suite (u_n) en fonction de n .
- 3 Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

E.2415



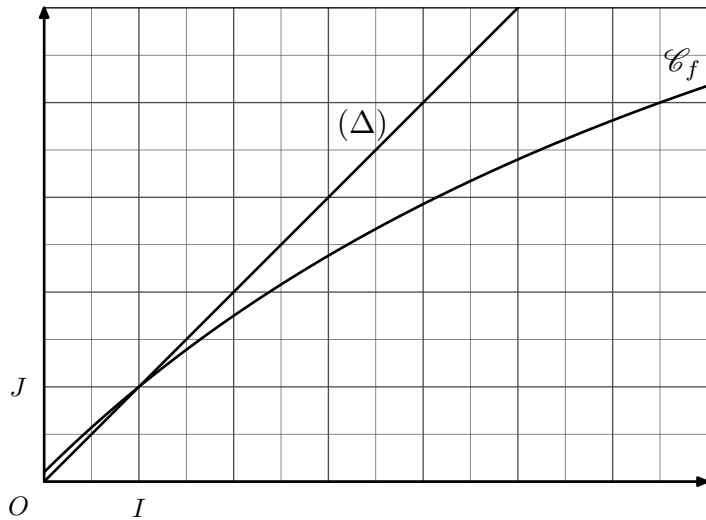
On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{13}{2} ; \quad u_{n+1} = \frac{10 \cdot u_n + 1}{u_n + 10} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admet que les termes de la suite (u_n) sont strictement supérieurs à 1.

- ① On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{10 \cdot x + 1}{x + 10}$.

On représente ci-dessous, dans le repère orthonormé $(O; I; J)$, la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f et la première bissectrice (Δ) du plan.



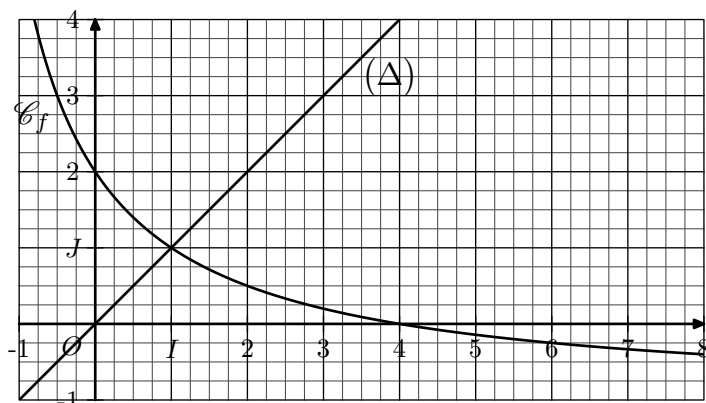
- a Représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n)
- b Faire une conjecture quant à la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
- ② On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation :
- $$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}.$$
- a Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
- b Donner l'expression des termes de la suite (v_n) en fonction de leur rang n .
- ③ a Établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :
- $$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$$
- b En déduire l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction de leur rang n .
- ④ Déterminer la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

E.2984



Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dont l'image d'un nombre x est défini par :

$$f(x) = \frac{-x + 4}{x + 2}$$



La droite (Δ) est la première bissectrice du plan.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$u_0 = 8 ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On admet que les termes de la suite (u_n) sont définis et que pour tout entier naturel n , on a : $u_n > -1$

- ① Sur l'axe des abscisses, présenter les valeurs des six premiers termes de la suite.
- ② Déterminer, par le calcul, les trois premiers termes de la suite (u_n) .
- ③ On considère la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation :
- $$w_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 4}$$
- a Établir l'égalité suivante : $w_{n+1} = \frac{-2u_n + 2}{3u_n + 12}$
- b En déduire que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera les caractéristiques.
- c Donner l'expression du terme w_n en fonction de n .
- ④ On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $-1 < w_n < 1$
- a Établir l'égalité : $u_n = -4 - \frac{5}{w_n - 1}$
- b En déduire la formule explicite de la suite (u_n)
- ⑤ En déduire la limite de la suite (u_n) .

E.3517



Une suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie par son premier terme U_1 et la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = \frac{6 + U_n}{2 + U_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- ① Montrer qu'il existe deux valeurs a et b de U_1 ($a < b$) pour lesquelles la suite est constante.
- ② a Montrer que si $U_1 \neq a$ et $U_1 \neq b$, il en est de même de U_n .
- b Dans ces conditions, calculer :
- $$\frac{U_{n+1} - a}{U_{n+1} - b} \quad \text{en fonction de} \quad \frac{U_n - a}{U_n - b}.$$
- ③ On suppose que $U_1 \neq a$ et $U_1 \neq b$ et on considère la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :
- $$V_n = \frac{U_n - a}{U_n - b} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$
- a Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique.
- b Calculer la limite de $|V_n|$ quand n tend vers plus l'infini. En déduire celle de U_n .

10. Suites homographiques et suites arithmétiques

E.5852



Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{4 \cdot u_n - 1}{u_n + 2} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On admet que pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 1$

On définit les termes de la suite (u_n) par la relation :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

- 1 Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.
- 2 Pour tout entier naturel n , exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
- 3 En déduire la limite de la suite (u_n)

E.6736



On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

$$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{-u_n - 2}{2 \cdot u_n + 3} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admet que pour tous les termes de la suite (u_n) sont définis et qu'ils vérifient : $u_n > -1$

- 1 On définit la suite (v_n) définie par la relation :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
 - a Justifier que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera les éléments caractéristiques.
 - b Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n .
- 2
 - a Établir l'égalité :

$$u_n = \frac{4 - 10 \cdot n}{1 + 10 \cdot n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
 - b Montrer que les termes de la suite (u_n) , pour $n \geq 1$, admettent l'expression :

$$u_n = \frac{\frac{4}{n} - 10}{\frac{1}{n} + 10}$$
 - c Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

E.6735



On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{3 \cdot u_n - 1}{u_n + 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et ses termes vérifient : $u_n > 1$

- 1 On définit la suite (v_n) définie par la relation :

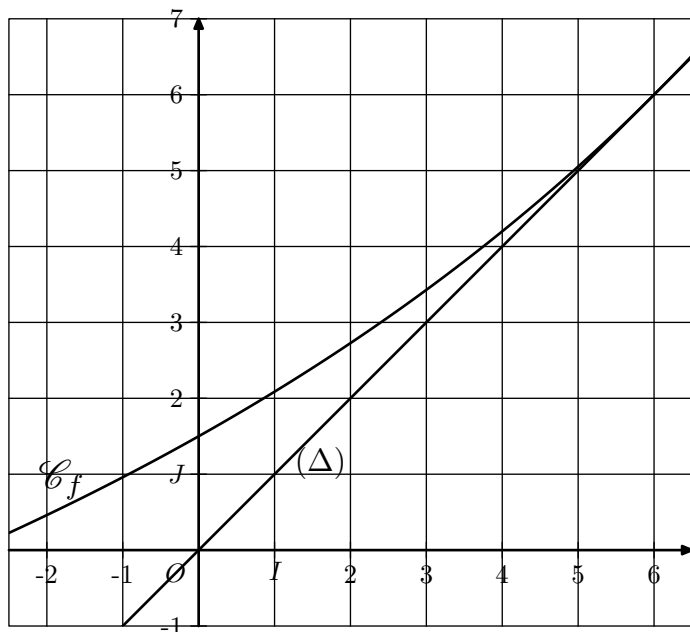
$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
 - a Justifier que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$. On précisera le premier terme de cette suite.
 - b Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n .
- 2
 - a En déduire l'expression suivante des termes de la suite (u_n) : $u_n = \frac{5 + 2 \cdot n}{1 + 2 \cdot n}$
 - b Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $u_n = \frac{2 + \frac{5}{n}}{2 + \frac{1}{n}}$
 - c Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

E.3400



Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = -\frac{12x + 36}{x - 24}$$



La droite (Δ) est la première bissectrice du plan.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$u_0 = -2 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admet que la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ et que ses termes vérifient la comparaison : $u_n < 6$

- 1 Graphiquement, placer sur l'axe des abscisses les cinq premières valeurs de la suite (u_n) .
- 2 Déterminer, par le calcul, la valeur des trois premiers

termes de la suite (u_n) .

- 3 On définit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$w_n = \frac{1}{u_n - 6} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- a Établir l'égalité suivante : $w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{18}$
- b Donner la nature et les caractéristiques de la suite (w_n) ainsi que l'expression du terme w_n en fonction de n .
- c Déterminer l'expression du terme u_n en fonction de n .
- 4 En déduire la limite de la suite (u_n)

E.5735



On considère la suite numérique (v_n) définie par :

$$v_0 = 1 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

- 1 a Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 < v_n < 3$
- b Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$$v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$$
- c Démontrer que la suite (v_n) est convergente.
- 2 On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par :
$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}$$
- a Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
- b En déduire l'expression de (w_n) , puis celle de (v_n) en fonction de n .
- c Déterminer la limite de la suite (v_n) .