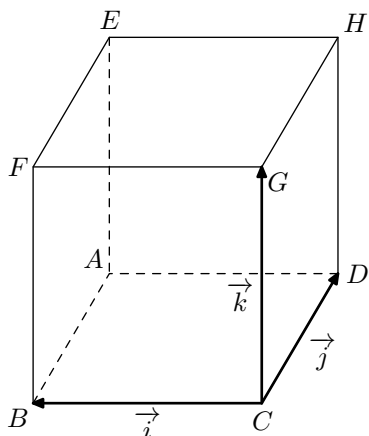


## 1. Surface usuelle

E.4120



Dans l'espace, on considère le cube  $ABCDEFGH$  représenté ci-dessous de centre  $O$ .



On munit le plan du repère orthonormé  $(C; \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CG})$

Déterminer les équations des plans suivants :

a)  $(BCD)$

b)  $(GHD)$

c)  $(FEH)$

d)  $(ABF)$

e)  $(ABG)$

f)  $(BDG)$

E.4121



On munit l'espace d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Déterminer les équations cartésiennes des surfaces suivantes :

- 1 Le cylindre d'axe  $(O; \vec{j})$  passant par le point  $A(0; 0; 3)$ .
- 2 Le cylindre d'axe  $(O; \vec{k})$  passant par le point  $B(3; 3; 0)$ .
- 3 Le cône de sommet  $O$  et d'axe de révolution  $(O; \vec{i})$  passant par le point  $C(3; 2; 2)$ .
- 4 Le cylindre d'axe  $(O; \vec{i})$  et dont la section avec le plan d'équation  $x = -3$  est un cercle de rayon 4.
- 5 Le cône de sommet  $O$  et d'axe de révolution  $(O; \vec{k})$  dont la section avec le plan d'équation  $z = 2$  est un cercle de rayon 2.

## 2. Intersection d'une surface et d'un plan

E.4098



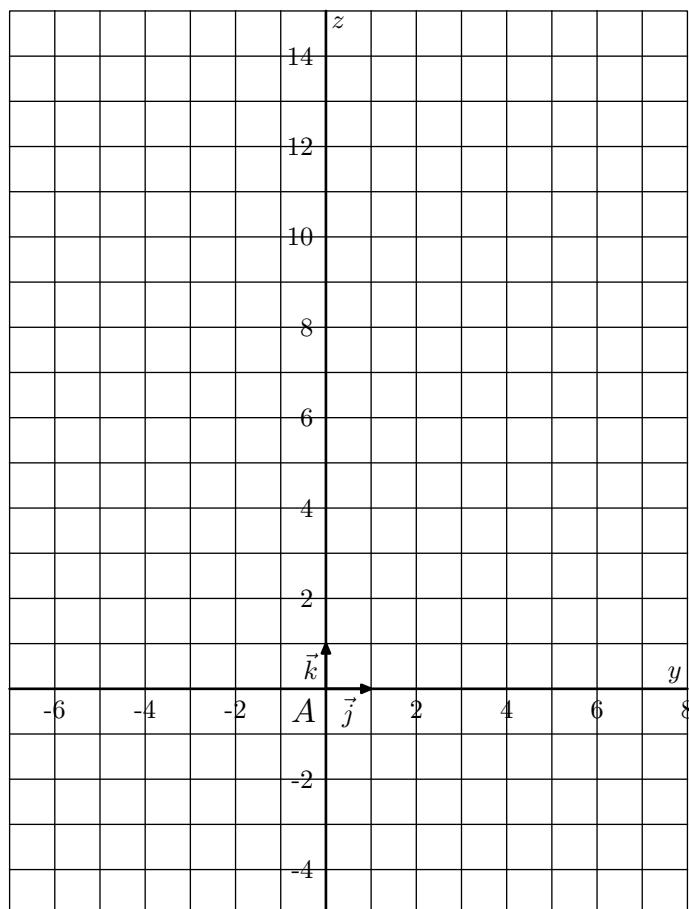
L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  d'équations respectives :

$$z = x^2 + y^2 \quad ; \quad z = x \cdot y + 2x$$

On note  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $x = 2$ ,  $E_1$  l'intersection de la surface  $S_1$  et du plan  $\mathcal{P}$  et  $E_2$  l'intersection de la surface  $S_2$  et du plan  $\mathcal{P}$ .

En **annexe**, le plan  $\mathcal{P}$  est représenté muni du repère  $(A; \vec{j}; \vec{k})$  où  $A$  est le point de coordonnées  $(2; 0; 0)$ .

- 1 a) Déterminer la nature de l'ensemble  $E_1$ .  
b) Déterminer la nature de l'ensemble  $E_2$ .
- 2 a) Représenter les ensembles  $E_1$  et  $E_2$  sur la feuille annexe.  
b) Dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  donner les coordonnées des points d'intersection  $B$  et  $C$  des ensembles  $E_1$  et  $E_2$ .



**E.4114** Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les points :

$$A(1; 3; 2) \quad ; \quad B(4; 6; -4)$$

et le cône  $(\Gamma)$  d'axe  $(O; \vec{k})$ , de sommet  $O$  et contenant le point  $A$ .

- ① Montrer qu'une équation de  $(\Gamma)$  est :  $x^2 + y^2 = \frac{5}{2} \cdot z^2$
- ② Soit  $(P)$  le plan parallèle au plan  $(xOy)$  et contenant le point  $B$ .
  - a) Déterminer une équation de  $(P)$ .
  - b) Préciser la nature de l'intersection  $(C_1)$  de  $(P)$  et de  $(\Gamma)$ .

**E.4117** Dans l'espace muni du repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on note  $S$  la surface d'équation :

$$z = x^2 + 2 \cdot x + y^2 + 1$$

Dire si, oui ou non, "la section de  $S$  avec le plan d'équation  $z=5$  est un cercle de centre  $A$  de coordonnées  $(-1; 0; 5)$  et de rayon 5".

**E.4138** L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

**Étude de la surface  $S$  d'équation**  $z = -\frac{1}{4} \cdot x \cdot y$

- ① On coupe  $S$  par le plan  $(xOy)$ . Déterminer la section obtenue.
- ② On coupe  $S$  par un plan  $P$  parallèle au plan  $(xOy)$ . Quelle est la nature de la section obtenue?
- ③ **Indication :** dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

On coupe  $S$  par le plan d'équation  $x+y=0$ . Quelle est la nature de la section obtenue?

**E.4135** Dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ,  $S$  est la surface d'équation :  $4 \cdot z = x \cdot y$ .

Les figures suivantes représentent les intersections de  $S$  avec

certain plans de l'espace.

|            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|
|            |            |            |            |
| Figure n°1 | Figure n°2 | Figure n°3 | Figure n°4 |

- ①  $S_1$  désigne la section de la surface  $S$  par le plan  $(xOy)$ . Une des figures données représente  $S_1$  laquelle?
- ②  $S_2$  désigne la section de  $S$  par le plan  $\mathcal{R}$  d'équation  $z=1$ . Une des figures données représente  $S_2$ , laquelle?
- ③  $S_3$  désigne la section de  $S$  par le plan d'équation  $y=8$ . Une des figures données représente  $S_3$ , laquelle?

**E.4136** Pour chacune des questions suivantes, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

- ①  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace dont les coordonnées  $(x; y; z)$  vérifient l'équation :  $z = x^2 + y^2$ .  
On note  $\mathcal{S}$  la section de  $\mathcal{E}$  par le plan d'équation  $y = 3$ .

**Affirmation :**  $\mathcal{S}$  est un cercle.

- ②  $\mathcal{P}$  est la surface d'équation  $x^2 + y^2 = 3 \cdot z^2$

**Affirmation :**  $O$  est le seul point d'intersection de  $\mathcal{P}$  avec le plan  $(yOz)$  à coordonnées entières.

**E.4311** L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

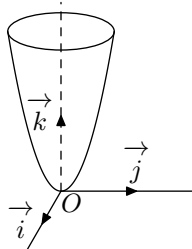
On considère la surface  $\mathcal{S}$  dont une équation est :  $z = 4 \cdot x \cdot y$

Montrer que la section de la surface  $\mathcal{S}$  par le plan d'équation  $z=0$  est la réunion de deux droites orthogonales.

### 3. Volume

**E.4140** Pour chacune des deux propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . La surface  $\Sigma$  ci-contre a pour équation :  $z = x^2 + y^2$



- ① La section de la surface  $\Sigma$  et du plan d'équation  $x=\lambda$ , où  $\lambda$  est un réel, est une hyperbole.
- ② Le plan d'équation  $z = \frac{9 \cdot \sqrt{2}}{2}$  partage le solide délimité par  $\Sigma$  et le plan d'équation  $z=9$  en deux solides de même volume.

**Rappel .** Soit  $V$  le volume du solide délimité par  $\Sigma$  et les plans d'équations  $z=a$  et  $z=b$  où  $0 \leq a \leq b \leq 9$ .

$V$  est donné par la formule  $V = \int_a^b S(k) dk$  où  $S(k)$  est l'aire de la section du solide par le plan d'équation  $z=k$  où  $k \in [a; b]$ .

## 4. Annales - Etude de surfaces

E.4143    L'espace  $(E)$  est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère les points:  
 $A(0; 5; 5)$  ;  $B(0; 0; 10)$

- 1 Dans cette question, on se place dans le plan  $P_0$  d'équation  $x = 0$  rapporté au repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .  
 On note  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $B$  et passant par  $A$ .  
 Démontrer que la droite  $(OA)$  est tangente au cercle  $\mathcal{C}$ .
- 2 On nomme  $\mathcal{S}$  la sphère engendrée par la rotation du cercle  $\mathcal{C}$  autour de l'axe  $(Oz)$  et  $\Gamma$  le cône engendré par la rotation de la droite  $(OA)$  autour de l'axe  $(Oz)$ .
  - a Démontrer que le cône  $\Gamma$  admet pour équation :  

$$x^2 + y^2 = z^2$$
  - b Déterminer l'intersection du cône  $\Gamma$  et de la sphère  $\mathcal{S}$ .  
 Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.

c Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.

- 3 On coupe le cône  $\Gamma$  par le plan  $P_1$  d'équation  $x = 1$ .  
 Dans  $P_1$ , l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection.  
 Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.

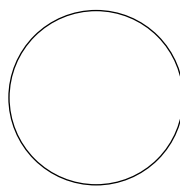


Figure n°1

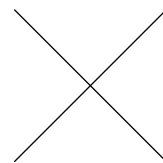


Figure n°2

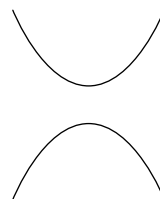


Figure n°3

- 4 Soit  $M(x; y; z)$  un point du cône  $\Gamma$  dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls. Démontrer que  $x$  et  $y$  ne peuvent pas être simultanément impairs.

## 5. Annales - Surfaces et arithmétiques

E.4087    **Partie A**

On considère, dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  de l'espace, la surface  $\mathcal{S}$  d'équation :

$$z = (x - y)^2$$

- 1 On note  $\mathcal{E}_1$  l'intersection de  $\mathcal{S}$  avec le plan  $\mathcal{P}_1$  d'équation  $z = 0$ .  
 Déterminer la nature de  $\mathcal{E}_1$ .
- 2 On note  $\mathcal{E}_2$  l'intersection de  $\mathcal{S}$  avec le plan  $\mathcal{P}_2$  d'équation  $x = 1$ .  
 Déterminer la nature de  $\mathcal{E}_2$ .

### Partie B

On considère, dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  de l'espace, la surface  $\mathcal{S}'$  d'équation :

$$z = x \cdot y$$

- 1 On note  $\mathcal{E}_3$  l'intersection de  $\mathcal{S}'$  avec le plan  $\mathcal{P}_1$  d'équation  $z = 0$ .  
 Déterminer la nature de  $\mathcal{E}_3$ .
- 2 On note  $\mathcal{E}_4$  l'intersection de  $\mathcal{S}'$  avec le plan  $\mathcal{P}_3$  d'équation  $z = 1$ .  
 Déterminer la nature de  $\mathcal{E}_4$ .

### Partie C

On note  $\mathcal{E}_5$  l'intersection de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$ .

Dans cette partie, on souhaite démontrer que le seul point appartenant à  $\mathcal{E}_5$  dont les coordonnées sont des entiers naturels est le point  $O(0; 0; 0)$ .

On suppose qu'il existe un point  $M$  appartenant à  $\mathcal{E}_5$  et dont les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont des entiers naturels.

- 1 Montrer que si  $x = 0$ , alors le point  $M$  est le point  $O$ .
- 2 On suppose dorénavant que l'entier  $x$ ,  $y$  et  $z$  vérifient :  

$$x^2 - 3 \cdot x \cdot y + y^2 = 0.$$
 En déduire qu'il existe alors des entiers naturels  $x'$  et  $y'$  premiers entre eux tels que :

$$x'^2 - 3 \cdot x' \cdot y' + y'^2 = 0$$

- 3 Montrer que  $x'$  divise  $y'^2$ , puis, que  $x'$  divise  $y'$ .
- 4 Établir que  $y'$  vérifie la relation :  

$$1 - 3 \cdot y' + y'^2 = 0$$
- 5 Conclure.

E.4132



L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère la surface  $S_1$  d'équation  $z = x^2 + y^2$  et la surface  $S_2$  d'équation  $z = x \cdot y + 2 \cdot x$

### Partie A

On note  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $x=2$ ,  $E_1$  l'intersection de la surface  $S_1$  et du plan  $\mathcal{P}$  et  $E_2$  l'intersection de la surface  $S_2$  et du plan  $\mathcal{P}$ .

En annexe, le plan  $\mathcal{P}$  est muni du repère  $(A; \vec{i}; \vec{j})$  où  $A$  est le point de coordonnées  $(2; 0; 0)$ .

- 1 a Déterminer la nature de l'ensemble  $E_1$ .
- b Déterminer la nature de l'ensemble  $E_2$ .
- 2 a Représenter les ensembles  $E_1$  et  $E_2$  sur la feuille **annexe**.
- b Dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  donner les coordonnées des points d'intersection  $B$  et  $C$  des ensembles  $E_1$  et  $E_2$ .

### Partie B

On pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante : "soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  des entiers avec  $a$  premier. Si  $a$  divise  $b \cdot c$  alors  $a$  divise  $b$  ou  $a$  divise  $c$ ."

L'objectif de cette partie est de déterminer les points d'intersection  $M(x; y; z)$  des surfaces  $S_1$  et  $S_2$  où  $y$  et  $z$  sont des entiers relatifs et  $x$  un entier premier.

On considère un tel point  $M(x; y; z)$ .

- 1 a Montrer que :  $y(y-x) = x(2-x)$ .
- b En déduire que l'entier premier  $x$  divise  $y$ .
- 2 On pose  $y = k \cdot x$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .
  - a Montrer que  $x$  divise 2, puis, que  $x=2$ .
  - b En déduire les valeurs possibles de  $k$ .
- 3 Déterminer les coordonnées possibles de  $M$  et comparer les résultats avec ceux de la partie A question 2 b.

E.4137



L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

- 1 Soient  $F$  le point de coordonnées  $(0; 0; \frac{1}{4})$  et  $P$  le plan d'équation  $z = -\frac{1}{4}$ .

On note  $d(M, P)$  la distance d'un point  $M$  au plan  $P$ .  
Montrer que l'ensemble  $(S)$  des points  $M$  de coordonnées  $(x; y; z)$  qui vérifient  $d(M; P) = MF$  a pour équation :  
 $x^2 + y^2 = z$ .

- 2 a Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble  $(S)$  avec le plan d'équation  $z=2$ ?
- b Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble  $(S)$  avec le plan d'équation  $x=0$ ?  
Représenter cette intersection dans le repère  $(O; \vec{j}; \vec{k})$ .
- 3 Dans cette question,  $x$  et  $y$  désignent des nombres entiers naturels.
  - a Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de  $x^2$  par 7?
  - b Démontrer que 7 divise  $x^2 + y^2$  si, et seulement si, 7 divise  $x$  et 7 divise  $y$ .

- 4 **Indication :** dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Existe-t-il des points qui appartiennent à l'intersection de l'ensemble  $(S)$  et du plan d'équation  $z = 98$  et dont toutes les coordonnées sont des entiers naturels? Si oui, les déterminer.

E.4141



Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les points  $A(1; 3; 2)$  et  $B(4; 6; -4)$  et le cône  $(\Gamma)$  d'axe  $(O; \vec{k})$ , de sommet  $O$  et contenant le point  $A$ .

### Partie A

- 1 Montrer qu'une équation de  $(\Gamma)$  est :  $x^2 + y^2 = \frac{5}{2} \cdot z^2$
- 2 Soit  $(P)$  le plan parallèle au plan  $(xOy)$  et contenant le point  $B$ ,
  - a Déterminer une équation de  $(P)$ .
  - b Préciser la nature de l'intersection  $(C_1)$  de  $(P)$  et de  $(\Gamma)$ .
- 3 Soit  $(Q)$  le plan d'équation  $y=3$ . On note  $(C_2)$  l'intersection de  $(\Gamma)$  et de  $(Q)$ . Sans justification, reconnaître la nature de  $(C_2)$  parmi les propositions suivantes :
  - a deux droites parallèles;
  - b deux droites sécantes;
  - c une parabole;
  - d une hyperbole;
  - e un cercle.

### Partie B

Soient  $x, y$  et  $z$  trois entiers relatifs et  $M$  le point de coordonnées  $(x; y; z)$ . Les ensembles  $(C_1)$  et  $(C_2)$  sont les sections définies dans la partie A.

- 1 On considère l'équation  $(E): x^2 + y^2 = 40$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
  - a Résoudre l'équation  $(E)$ .
  - b En déduire l'ensemble des points de  $(C_1)$  dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
- 2 a Démontrer que si le point  $M$  de coordonnées  $(x; y; z)$  où  $x, y$  et  $z$  désignent des entiers relatifs est un point de  $(\Gamma)$  alors  $z$  est divisible par 2 et  $x^2 + y^2$  est divisible par 10.
  - b Montrer que si  $M$  est un point de  $(C_2)$ , intersection de

$(\Gamma)$  et de  $(Q)$ , alors :

$$x^2 \equiv 1 \pmod{10}$$

- c Déterminer un point de  $(C_2)$ , distinct de  $A$ , dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

E.4139



L'espace est rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On nomme  $(S)$  la surface d'équation :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

- 1 Montrer que la surface  $(S)$  est symétrique par rapport au plan  $(xOy)$ .
- 2 On nomme  $A$  et  $B$  les points de coordonnées respectives :  $(3; 1; -3)$  ;  $(-1; 1; 1)$ 
  - a Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(D)$  passant par les points  $A$  et  $B$ .
  - b Démontrer que la droite  $(D)$  est incluse dans la surface  $(S)$ .
- 3 Déterminer la nature de la section de la surface  $(S)$  par un plan parallèle au plan  $(xOy)$ .
- 4 a On considère la courbe  $(C)$ , intersection de la surface  $(S)$  et du plan d'équation  $z = 68$ . Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.
  - b  $M$  étant un point de  $(C)$ , on désigne par  $a$  son abscisse et par  $b$  son ordonnée.  
On se propose de montrer qu'il existe un seul point  $M$  de  $(C)$  tel que  $a$  et  $b$  soient des entiers naturels vérifiant :  

$$a < b \quad ; \quad \text{ppcm}(a; b) = 440.$$
 C'est-à-dire tel que  $(a; b)$  soit solution du système :
 
$$(1) : \begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a; b) = 440 \end{cases}$$
 Montrer que si  $(a; b)$  est solution de (1) alors  $\text{pgcd}(a; b)$  est égal à 1 ou à 5. Conclure.

**Indication :** dans cette question toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

## 6. Annales - Volume

E.4199



L'espace  $(E)$  est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère la surface  $T$  d'équation :

$$x^2 \cdot y = z \quad \text{avec } -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1.$$

La figure ci-contre est une représentation de la surface  $T$  dans le cube de centre  $O$  et de côté 2.

- 1 Éléments de symétrie de la surface  $T$ .
  - a Montrer que si le point  $M(x; y; z)$  appartient à  $T$ , alors le point  $M'(-x; y; z)$  appartient aussi à  $T$ . En déduire un plan de symétrie de  $T$ .
  - b Montrer que l'origine  $O$  du repère est centre de symétrie de  $T$ .
- 2 Intersections de la surface  $T$  avec des plans parallèles aux axes.

- a Déterminer la nature des courbes d'intersection de  $T$  avec les plans parallèles au plan  $(xOz)$ .
- b Déterminer la nature des courbes d'intersection de  $T$  avec les plans parallèles au plan  $(yOz)$ .
- 3 Intersections de la surface  $T$  avec les plans parallèles au plan  $(xOy)$  d'équations  $z=k$ , avec  $k \in [0; 1]$ .
  - a Déterminer l'intersection de la surface  $T$  et du plan d'équation  $z=0$ .
  - b Pour  $k>0$ , on note  $K$  le point de coordonnées  $(0; 0; k)$ . Déterminer, dans le repère  $(K; \vec{i}; \vec{j})$ , l'équation de la courbe d'intersection de  $T$  et du plan d'équation  $z=k$ .
  - c Tracer l'allure de cette courbe dans le repère  $(K; \vec{i}; \vec{j})$ . On précisera en particulier les coordonnées des extrémités de l'arc.

- 4 On note  $(D)$  le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface  $T$  :

$$(D) = \left\{ M(x; y; z) \in (E) \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq x^2 \cdot y \right\}$$

- a Pour  $0 < k \leq 1$ , le plan d'équation  $z = k$  coupe le domaine  $(D)$  selon une surface qu'on peut visualiser sur le graphique de la question 3 c.

C'est l'ensemble des points  $M$  du cube d'unité de coordonnées  $(x; y; z)$  tels que :

$$y \geq \frac{k}{x^2} \text{ et } z = k.$$

Calculer en fonction de  $k$  l'aire  $S(k)$  exprimée en unités d'aire de cette surface.

- b On pose  $S(0) = 1$  ; calculer en unités de volume, le volume  $V$  du domaine  $(D)$ .

$$\text{On rappelle que : } V = \int_0^1 S(k) dk.$$

**E.4319**    **Partie A : Restitution organisée de connaissances**

- 1 Pré-requis : tout nombre entier  $n$  strictement supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier.

Démontrer que tout nombre entier  $n$  strictement supérieur à 1 est premier ou peut se décomposer en produit de facteurs premiers (*on ne demande pas de démontrer l'unicité de cette décomposition*).

- 2 Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 629.

**Partie B**

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les

surfaces  $\Gamma$  et  $C$  d'équations respectives :

$$\Gamma : z = x \cdot y \quad ; \quad C : x^2 + z^2 = 1$$

- 1 Donner la nature de la surface  $C$  et déterminer ses éléments caractéristiques.
- 2 Points d'intersection à coordonnées entières des surfaces  $\Gamma$  et  $C$ .
  - a Démontrer que les coordonnées  $(x; y; z)$  des points d'intersection de  $\Gamma$  et de  $C$  sont telles que :  $x^2 \cdot (1 + y^2) = 1$
  - b En déduire que  $\Gamma$  et  $C$  ont deux points d'intersection dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.
- 3 Points d'intersection à coordonnées entières de  $\Gamma$  et d'un plan.
 

Pour tout nombre entier naturel non nul  $n$ , on désigne par  $P_n$  le plan d'équation  $z = n^4 + 4$

  - a Déterminer l'ensemble des points d'intersection de  $\Gamma$  et du plan  $P_1$  dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

pour la suite de l'exercice, on suppose  $n \geq 2$ .

  - b Vérifier que :  $(n^2 - 2 \cdot n + 2)(n^2 + 2 \cdot n + 2) = n^4 + 4$
  - c Démontrer que, quel que soit le nombre entier naturel  $n \geq 2$ , l'entier  $n^4 + 4$  n'est pas premier.
  - d En déduire que le nombre de points d'intersection de  $\Gamma$  et du plan  $P_n$  dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs est supérieur ou égal à 8.
  - e Déterminer les points d'intersection de  $\Gamma$  et du plan  $P_5$  dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.