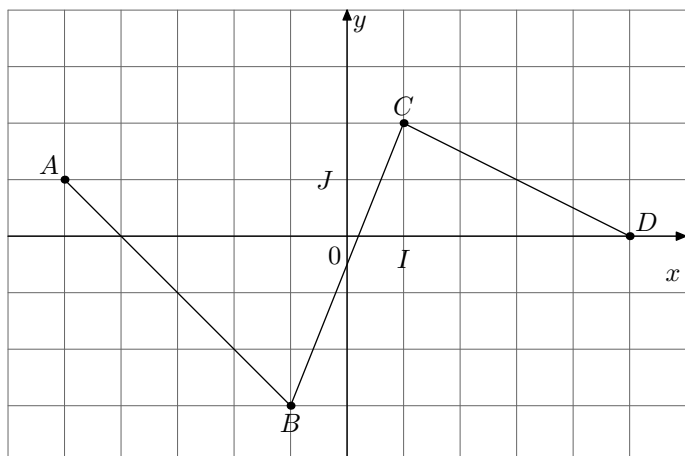


1. Fonctions affines par morceaux

E.428 Dans le repère orthonormé $(O; I; J)$ ci-dessous, on considère la ligne polygonale formée à l'aide des quatre points du plan A, B, C et D .



- 1 a Donner les trois équations des droites portées respectivement par les segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.

Cette ligne polygonale définit une fonction f définie sur $[-5; 5]$ dites "**fonction affine par morceaux**" (ou par intervalles), car sur chacun de ses trois intervalles :

$$I = [-5; -1[\quad ; \quad J = [-1; 1[\quad ; \quad K = [1; 5]$$

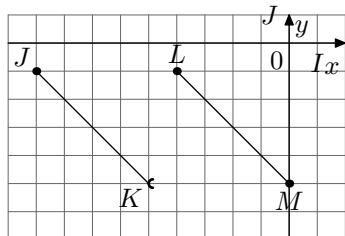
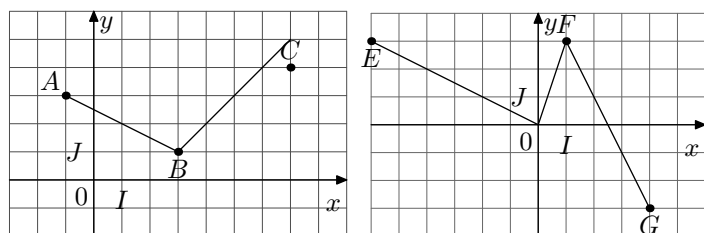
la courbe représentative de f est une fonction affine.

Algébriquement, on définit la fonction f de la manière suivante :

$$f : \begin{cases} f(x) = -x - 5 & \text{si } x \in [-5; -1] \\ f(x) = 2,5x - 0,5 & \text{si } x \in [-1; 1] \\ f(x) = -0,5x + 2,5 & \text{si } x \in [1; 5] \end{cases}$$

- b Donner les images des nombres $-4, -1, 2$ et 5 par la fonction f .

- 2 Voici les trois représentations graphiques des fonctions affines par morceaux g, h et j .



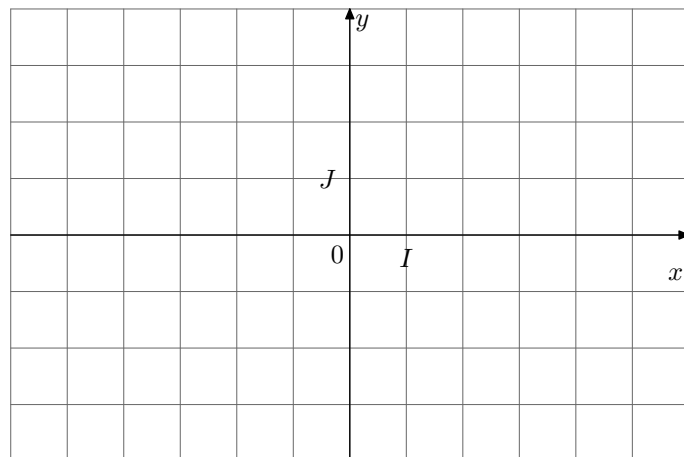
- a Donner l'ensemble de définition de chacune de ces fonc-

tions.

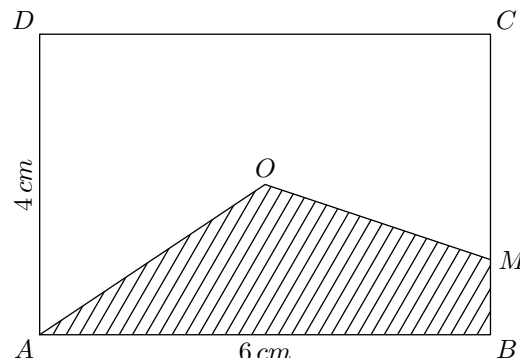
- b Donner leurs expressions algébriques.

E.420 Tracer dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction suivante :

$$f : \begin{cases} f(x) = 2x + 8 & \text{si } x \in [-5; -2] \\ f(x) = -0.5x + 3 & \text{si } x \in [-2; 2] \\ f(x) = -2x + 6 & \text{si } x \in [2; 4] \end{cases}$$



E.3000 Dans le plan, on considère le rectangle $ABCD$ de longueur 5 cm et de largeur 3 cm . Un point M parcourt le contour de ce rectangle ; on repère ce point par le nombre x représentant la distance parcourue par ce point en partant de A et en parcourant le rectangle dans le sens direct.



On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de la partie hachurée lorsque M est repéré par le nombre x .

- 1 Justifier que la fonction $\mathcal{A}$ est une fonction affine par morceaux en fonction de x définie par le système :

$$\begin{cases} x & \text{pour } x \in [0; 6] \\ \frac{3}{2}x - 3 & \text{pour } x \in [6; 10] \\ x + 2 & \text{pour } x \in [10; 16] \\ \frac{3}{2} \cdot x - 6 & \text{pour } x \in [16; 20] \end{cases}$$

- 2 Déterminer la valeur de x pour laquelle on a : $\mathcal{A}(x) = 20\text{ cm}^2$

2. Valeur absolue - calcul algébrique

E.320   Effectuer les calculs ci-dessous en explicitant votre démarche :

a $|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}|$ b $|\frac{1}{\pi} - \frac{1}{3}|$ c $|\frac{5\sqrt{8}}{4} - \frac{8\sqrt{5}}{5}|$

3. Valeur absolue - équation

E.8127  

1 Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x+1$							
$2 \cdot x - 1$							

2 Parmi les valeurs étudiées dans la question précédente, existe-t-il des solutions de l'équation :
 $|x+1| = |2x-1|$

E.323   Résoudre les équations suivantes :

a $|2-x| = 2,5$ b $|x+100| = 1$
 c $3 \times |x+2| = 1$ d $|2-x| \times 2 = 1$
 e $3 \times |x+5| + 3 = 9$ f $2 \times |2-x| + 4 = 1$

E.339   Résoudre les équations suivantes :

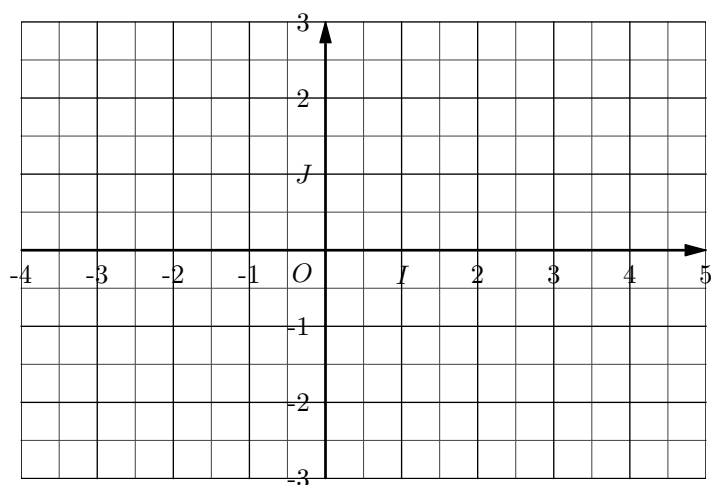
a $|2x-1| = |-x+1|$ b $|3x-1| = |3x+1|$
 c $|x-2| = 5$ d $|x+2| = 6$

4. Valeur absolue - un peu plus loin

E.353   On considère les fonctions f et g définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot |x+1| - x \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{2}$$

Le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé donné ci-dessous.



On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g et on considère les deux intervalles suivants :

$$I =]-\infty; -1[\quad ; \quad J = [-1; +\infty[$$

1 Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$.

E.335   Résoudre les équations suivantes :

a $|2x-2| = |x+3|$ b $|2x+1| = |3x+3|$
 c $|x-2| = |x+3|$ d $|5x+2| = |2 \cdot (-2x+1)|$

E.7302   On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f(x) = x - |2 \cdot x - 1| \quad ; \quad g(x) = x - 2$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ respectivement les courbes représentatives des fonctions f et g .

1 À l'aide de la calculatrice, déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2 a Établir l'équivalence :
 $f(x) = g(x) \iff |2 \cdot x - 1| = |2|$

b En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2 a Déterminer les expressions de la fonction f sur chacun des intervalles I et J .

b Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$.

3 Les questions suivantes se traiteront algébriquement :

a Déterminer les coordonnées du point d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle J .

b Justifier que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ n'admettent pas de point d'intersection sur l'intervalle I .

E.1939   Le but de l'exercice est de résoudre l'équation suivante :

$$(E) : |x+1| + 2|x-1| = 3$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

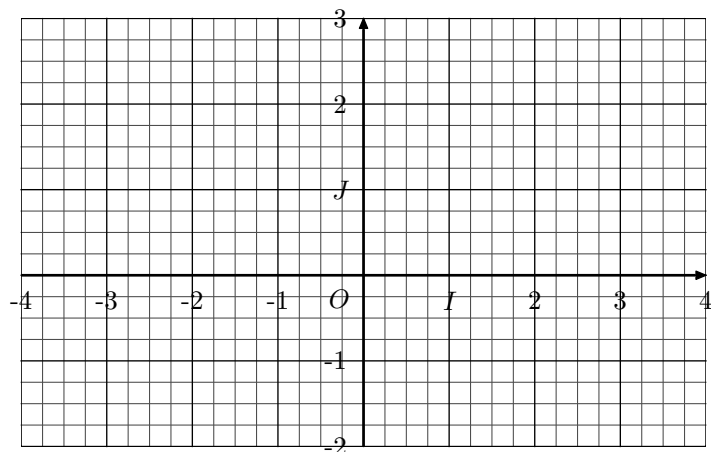
$$f(x) = |x+1| + 2|x-1|$$

- 1  Simplifier l'expression de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; -1]$.
-  Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]-\infty; -1]$.
- 2  Simplifier l'expression de la fonction f sur l'intervalle $[-1; 1]$.
-  Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $[-1; 1]$.
- 3  Simplifier l'expression de la fonction f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
-  Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
- 4 Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

E.303   Résoudre les équations suivantes :

 $|x+3| - |2x+1| = 2$  $|x| + 3 \cdot |4x-1| = x+1$

E.302   On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$:



et les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x+2| \quad ; \quad g(x) = |x| - 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans ce repère.

- 1  Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repère ci-dessus.
-  Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 1$.
- 2  Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$ dans le repère ci-dessus.
-  Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \leq 0$.

E.324   On considère l'inéquation (E) définie par :

$$(E) : |x+1| + |x-1| \leq 5$$

On considère les trois intervalles suivants :

$$I =]-\infty; -1] \quad ; \quad J = [-1; 1] \quad ; \quad K = [1; +\infty[$$

- 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f: x \mapsto |x+1| + |x-1|$$

Simplifier l'expression de la fonction f sur chacun des trois intervalles I , J et K .

- 2  Résoudre l'inéquation (E) sur chacun des trois intervalles I , J et K .
-  Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation (E) .

5. Valeur absolue - étude de fonctions

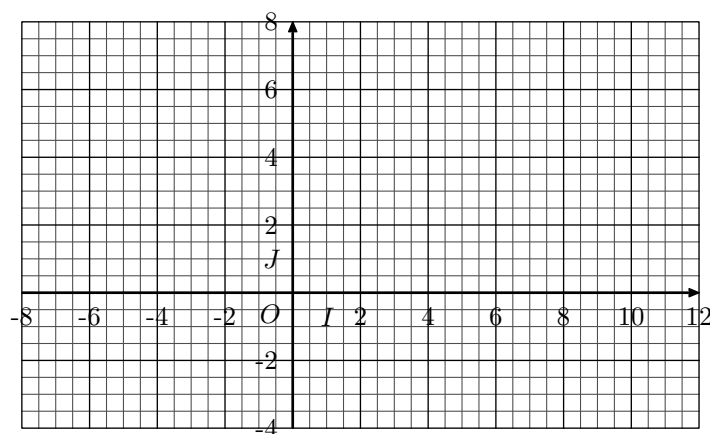
E.2301   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot |x+2| + \frac{3}{4} \cdot |x-4|$$

- 1  Simplifier chaque expression en fonction de l'intervalle étudié :

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$ x+2 $				
$ x-4 $				

-  Donner l'expression simplifiée de la fonction f sur chacun des trois intervalles suivants :
 $I =]-\infty; -2]$; $J = [-2; 4]$; $K = [4; +\infty[$
- 2 On munit le plan d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé donné ci-dessous :



- 3 D'après la représentation graphique, tracer le tableau de variations de la fonction f .

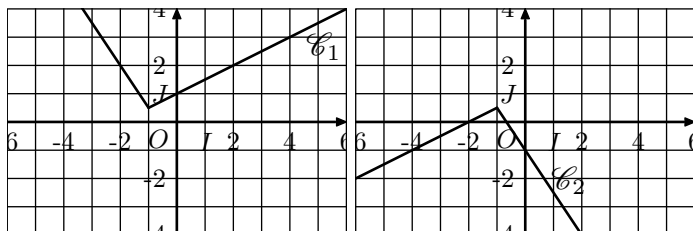
E.290   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = |x+1| - \frac{1}{2} \cdot x$$

- ① Simplifier l'écriture des expressions algébriques sur les intervalles $]-\infty; -1]$ et $[-1; +\infty[$ dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$ x+1 $			
$f(x)$			

- ② Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, sont les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Laquelle de ces deux courbes est la représentation de la fonction f :



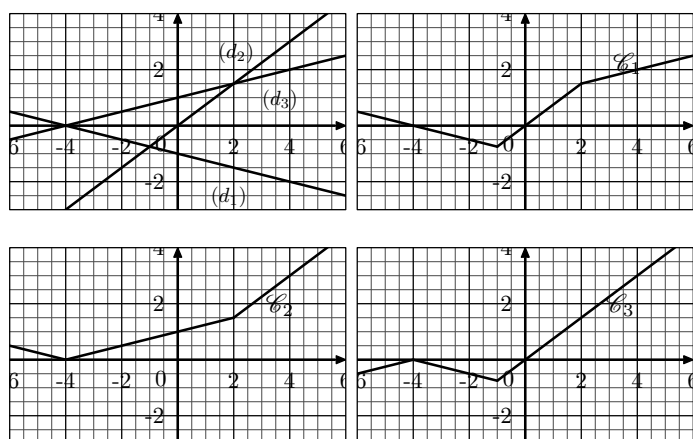
E.326   On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \left| \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \right| - \left| \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{2} \right|$$

- ① Simplifier les expressions algébriques sur les trois intervalles $]-\infty; -1]$, $[-1; 2]$ et $[2; +\infty[$ dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$\left \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \right $				
$\left \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{2} \right $				
$f(x)$				

- ② Dans un repère orthonormé, des courbes sont représentées ci-dessous :



- a) Par lecture graphique et sans justification, donner les équations réduites des droites (d_1) , (d_2) et (d_3) .
b) Parmi les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, quelle est la représentation de la fonction f ?

E.430   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f: x \mapsto \left| \frac{1}{2}x - 1 \right| - \left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x \right|$$

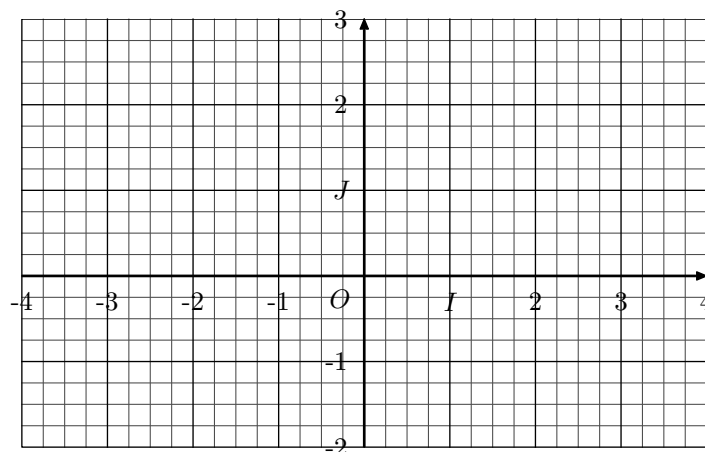
- ① Représenter sur une droite graduée les ensembles des solutions de chacun des systèmes d'inéquations suivants :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 \leq 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x \geq 0 \end{cases} ; \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 \leq 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x \leq 0 \end{cases} ; \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 \geq 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x \leq 0 \end{cases}$$

- ② Simplifier l'expression de la fonction f sur chacun des intervalles suivants :

$$I =]-\infty; -2] ; J = [-2; 2] ; K = [2; +\infty[$$

- ③ Effectuer le tracé de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-4; 4]$:



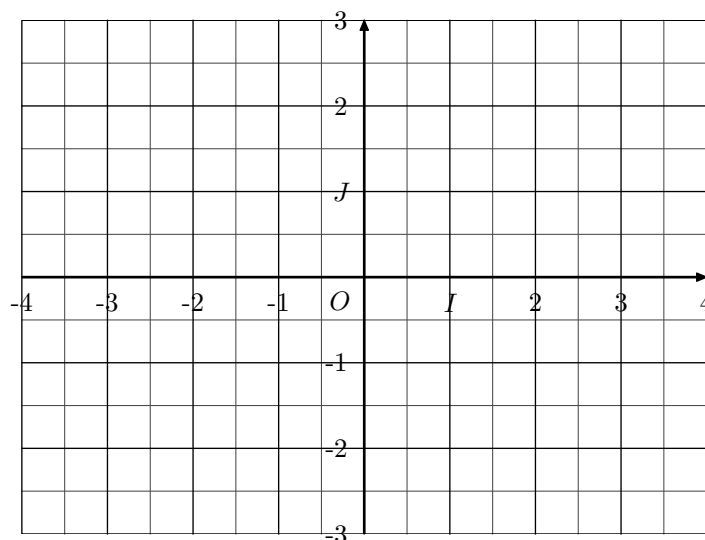
E.1497   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot |x+2| - \frac{1}{2} \cdot |x-2|$$

- ① Simplifier l'expression de la fonction f sur chacun des trois intervalles suivants :

$$I =]-\infty; -2] ; J = [-2; 2] ; K = [2; +\infty[$$

- ② On munit le plan d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé donné ci-dessous :



- ③ D'après la représentation graphique, tracer le tableau de variations de la fonction f .

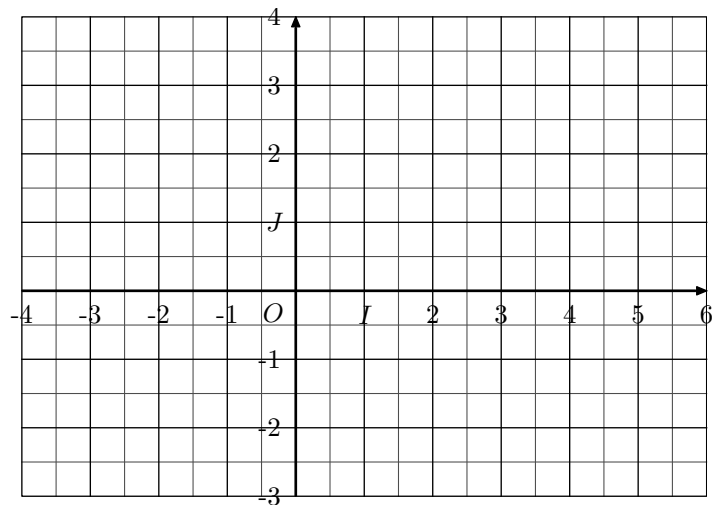
E.5032



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \left| \frac{3}{4} \cdot x - \frac{3}{2} \right| - \left| \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \right|$$

- 1 Déterminer l'image de -4 et de 0 par la fonction f .
- 2 Simplifier l'expression de la fonction f sur chacun des trois intervalles ci-dessous :
 $I =]-\infty; -1]$; $J = [-1; 2]$; $K = [2; +\infty[$
- 3 On munit le plan du repère $(O; I; J)$ ci-dessous. Effectuer dans ce repère le tracé de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f .



- 4 a Graphiquement et sans justification, donner l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = -1$.
- b Algébriquement, justifier que l'équation $f(x) = -1$ n'admet aucune solution sur l'intervalle $] -\infty; -1]$.

6. Un peu plus loin - propriétés algébriques de la valeur absolue

E.5015



On souhaite établir l'égalité suivante pour tous nombres réels x et y :

$$|x \times y| = |x| \times |y|$$

Pour cela, on raisonne par disjonction de cas sur la valeur de x et sur la valeur de y . Établir cette relation dans chacun des cas suivants :

- | | |
|--|--|
| a $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+$ | b $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_-$ |
| c $x \in \mathbb{R}_-$ et $y \in \mathbb{R}_+$ | d $x \in \mathbb{R}_-$ et $y \in \mathbb{R}_-$ |

E.5016



- 1 Pour tous nombres réels x et y , établir l'inégalité :

$$|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

- 2 En déduire, pour tous réels x et y , la comparaison suivante :

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

7. Exercices non-classés

E.331

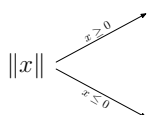


Soit x un nombre, la distance de x à zéro se note $|x|$ et s'appelle la valeur absolue de x .

- 1 Compléter les tableaux suivants :

x	$ x $	x	$ x $
3		$3 - 5$	
-3		$\sqrt{2} + 1$	
$4,2$		$5 - \sqrt{10}$	
-2π		$4 - \pi$	

- 2
 - Pour $x \geq 0$, comparer x et $|x|$?
 - Pour $x \leq 0$, comparer x et $|x|$?
- 3 Compléter en conséquence le diagramme suivant :



E.410   On considère la fonction valeur absolue notée f :

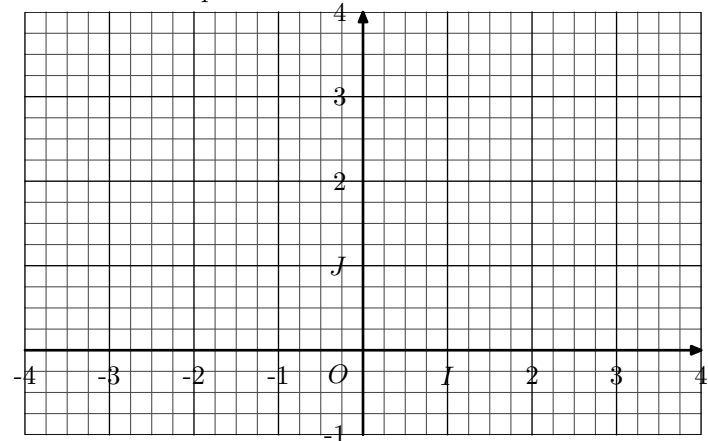
$$f: x \mapsto |x|$$

1 Donner l'ensemble de définition de la fonction f .

2 a Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4
$f(x)$											

b Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère ci-dessous :



3 À l'aide de la représentation graphique, dresser le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.

4 Quelle propriété géométrique possède la courbe représentative de la fonction valeur absolue?

E.979   Nous allons voir comment nous allons transformer la résolution d'équations de la forme suivante :

$$|x - a| = b \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}$$

en un problème sur les distances entre deux points.

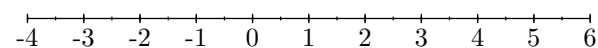
Nous allons nous servir de la relation suivante, reliant distance et valeur absolue :

$$d(x; y) = |x - y|$$

1 On souhaite résoudre l'équation $|x - 2| = 3$

a Traduire cette équation en un problème sur les distances entre les points d'abscisses x et 2.

b Utiliser la droite graduée ci-dessous pour trouver les positions du point d'abscisse x solution de ce problème de distance.



c Vérifier que les positions trouvées vérifient le problème originel.

2 On souhaite résoudre l'équation : $|x + 1| = 2$:

a Compléter le tableau ci-dessous :

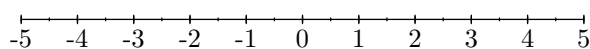
x	$ x + 1 $	$d(x; 1)$	$d(x; -1)$
2			
-4			
0			

b Justifier que : $|x + 1| = d(x; -1)$.

c Traduire l'équation de départ en problème sur les dis-

tances de points.

d Utiliser la droite graduée ci-dessous pour résoudre ce problème.



e Vérifier que les positions trouvées vérifient le problème originel.

E.1937  

1 Résoudre les équations suivantes en les traduisant en termes de distance et en vous aidant d'une droite graduée :

a $|x - 4| = 3$

b $|x + 1,5| = 1$

c $|2x + 1| = \sqrt{2}$

d $|x - 2| = |x + 3|$

2 Résoudre les équations suivantes de manières algébriques :

a $|x + \sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$

b $|3 \times (x + 1) - 2| = 5$

c $|3x - 2| = |3 - 2x|$

E.1938   Résoudre en termes de distance les inéquations suivantes et donner une représentation de l'ensemble des solutions sur une droite graduée :

a $|x + 2| \leq 5$

b $|x - 1| > 2$

E.1911   Traduire les équations ou inéquations suivantes en termes de distance, puis les résoudre :

a $|x - 2| = 1,5$

b $|x + 1| = 1$

c $|2x - 1| = 3$

d $|x - 3| \leq 2$

e $|x + 4| \leq 1$

f $|x - 3| \geq 1$

E.11636   On note $d(x; y)$ la distance séparant, sur une droite graduée, les deux points d'abscisse x et y . Nous allons montrer que l'égalité : $d(x; y) = |x - y|$

1 Compléter les deux tableaux suivants :

x	y	$d(x; y)$	$x - y$	$ x - y $
5	-2			
-3	7			
0	5			
8,2	3,4			
-5	7,2			

2 Comparer $d(x; y)$ et $|x - y|$.

E.11637   Nous allons simplifier l'écriture de $|x - y|$ en fonction des valeurs de x et de y .

1 Donner la forme simplifiée de l'opposé de $x - y$?

2 Compléter les phrases suivantes :

• $x - y \leq 0$ lorsque $x \dots y$

• $x - y \geq 0$ lorsque $x \dots y$.

3 Compléter le diagramme suivant :

