

1. Etude de fonctions

E.7006



On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1; 15]$ par :
 $g(x) = -0,6 \cdot x + 4 + e^{-x+5}$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[1; 15]$ et on note g' sa fonction dérivée :

- 1 a Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[1; 15]$.
- b En déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1; 15]$.

- 2 a Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[1; 15]$, en précisant les valeurs $g(1)$ et $g(15)$ arrondies à l'unité.
- b Le tableau de variations permet d'affirmer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; 15]$.
Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.
- c Déduire des questions précédentes le tableau de signes de $g(x)$ sur l'intervalle $[1; 15]$.

2. Théorème des valeurs intermédiaires

E.7521



On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20; 20]$ par :
 $f(x) = (-2 \cdot x + 30) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$

- 1 a Montrer que $f'(x) = (-0,4 \cdot x + 4) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$ pour tout réel x de l'intervalle $[-20; 20]$.
- b Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-20; 20]$. On précisera la valeur exacte du maximum de f .
- 2 a Montrer que, sur l'intervalle $[-20; 20]$, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α .
- b Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

E.7430



On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de $[-3; 2]$ par :
 $f(x) = (-x^2 + 2,5 \cdot x - 2) \cdot e^x + 5$

- 1 Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $[-3; 2]$:
 $f'(x) = (-x^2 + 0,5 \cdot x + 0,5) \cdot e^x$
- 2 Étudier le signe de f' puis dresser le tableau de variations de f sur $[-3; 2]$.
- 3 a Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[1; 2]$.
- b Donner la valeur de α arrondie au centième.

3. Théorème des valeurs intermédiaires et quotient

E.7435



On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1; 25]$ par : $f(x) = 10 - \frac{e^{0,2x+1}}{x}$

Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants que l'on pourra utiliser :

$$\begin{aligned} & f(x) : 10 - e^{(0.2x+1)}/x \\ & x \mapsto 10 - \frac{\exp(0.2x+1)}{x} \\ & \text{factoriser}(\text{deriver}(f(x))) \\ & \frac{\exp(0.2 \cdot x + 1) \cdot (1 - 0.2 \cdot x)}{x^2} \\ & \text{factoriser}(\text{deriver}(\text{deriver}(f(x)))) \\ & \frac{\exp(0.2 \cdot x + 1) \cdot (-x^2 + 10 \cdot x - 50)}{25 \cdot x^3} \end{aligned}$$

- 1 Retrouver par le calcul l'expression factorisée de $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f .
- 2 Étudier le signe de f' sur l'intervalle $[1; 25]$ et dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[1; 25]$. On arrondira les valeurs au millième.
- 3 On s'intéresse à l'équation $f(x)=0$.
 - a Montrer que l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[1; 5]$.
 - b Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[5; 25]$.
 - c Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution α

4. Introduction aux valeurs intermédiaires

E.7286



On considère une fonction f qui admet le tableau de variations suivant :

x	-5	1	5	10
Variation de f	4		-1	
		-6		

- ① Justifier que l'équation $f(x)=7$ n'admet aucune solution.
- ② Sans justification, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $[-5; 10]$.

E.7287   On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ admettant le tableau de variations suivant :

x	-4	2	4
Variation de f	3	$-\frac{9}{2}$	-1

Aucune justification aux réponses n'est attendue.

- ① Combien de solutions possède l'équation $f(x)=0$?
- ② Discuter du nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ en fonction des valeurs suivantes de m :
- a) $f(x) = -6$ b) $f(x) = -4$ c) $f(x) = 2$

E.7863   On considère une fonction f définie sur $[-5; 3[\cup]3; 10]$ et dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-5	3	4	10
Variation de f	-5	-1	7	2

Sans justification, donner le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=0$.

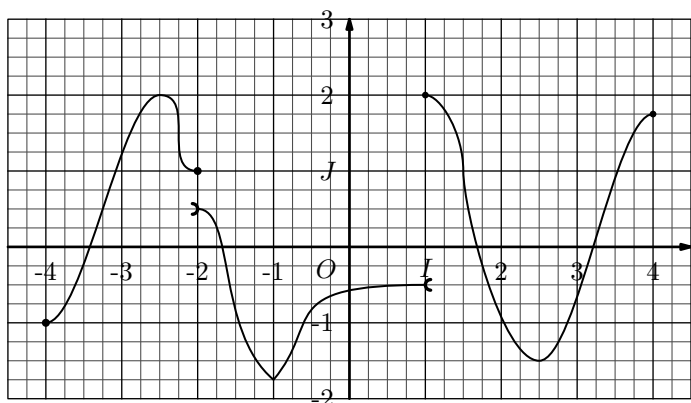
E.7288   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 1$$

- ① a) Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .

5. Introduction à la continuité

E.7316   Ci-dessous est donnée la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f



- ① Donner les intervalles sur lesquels la fonction f est con-

- b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2; 3]$.

- ② Sans justification, donner le nombre de solutions de chacune des équations suivantes sur l'intervalle $[-2; 3]$:

a) $f(x) = -10$ b) $f(x) = 15$ c) $f(x) = -6$

E.7367   On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ dont nous avons des résultats partiels de son étude via un logiciel de calcul formel :

L1	$f(x) := \dots\dots$ $f(x) = \dots\dots$
L2	$g(x) := \text{Dérivée}[f(x)]$ $g(x) = \frac{-5 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 2}{2 \cdot \sqrt{x}}$
L3	Résoudre $[f(x)=0]$ $\{x=0 ; x=1\}$
L4	Résoudre $[g(x)=0]$ $\{x=\frac{2}{5}\}$

Parmi les tableaux de variations ci-dessous, un seul est le tableau de variations de la fonction f . Lequel?

a)

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	-1	2	1

b)

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	-3	2	-2

c)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	0	-2	3	1

d)

x	0	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f(x)$	0	$\frac{2}{5}$	-2

e)

x	0	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f(x)$	0	-2	1

f)

x	0	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f(x)$	0	-5	-2

tinue.

- ② Donner les intervalles sur lesquels la fonction f est monotone.

E.7311   On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x^2 - 4 \cdot x + 3}$$

- ① a) Déterminer les images de 0 et de 2 par la fonction f .
- b) Pour l'équation $f(x)=0$, conjecturer l'existence ou non de solution pour cette équation sur l'intervalle $[0; 2]$.
- ② a) À l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction f .
- b) La fonction f admet-elle des antécédents de 0 dans l'intervalle $[0; 2]$.

6. Théorème des valeurs intermédiaires

E.7056   On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 1]$:

x	-3	-1	0	1
Variation de f		-1		4
	-6		-2	

Déterminer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant la réponse :

• **Proposition :** l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-3; 1]$.

E.7041   On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 3]$:

x	-1	1	2	3
Variation de f		2		-0,5
	-2		-1	

Parmi les quatre propositions suivantes, laquelle est correcte?

Dans l'intervalle $[-1; 3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet :

- (a) exactement 3 solutions (b) exactement 2 solutions
(c) exactement 1 solution (d) pas de solution

E.7328   On considère la fonction f définie par :
 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$

- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- (a) Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution, notée α , sur l'intervalle $[-2; 1]$.
(b) À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée au centième de la solution α .

E.7343   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
 $f(x) = \frac{3x+4}{x^2+1}$

- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- (a) Justifier que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-3; \frac{1}{3}]$.
(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur approchée au centième près de cette solution.

E.7366   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{4x+3}{x^2+1}$$

- (a) Établir que la fonction f' , dérivée de la fonction f , admet pour expression :
$$f'(x) = \frac{-4x^2 - 6x + 4}{(x^2+1)^2}$$

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[-5; 5]$.
- (a) Justifier que l'équation $f(x)=3$ admet deux solutions, notées α et β , sur l'intervalle $[-5; 5]$.
(b) Donner les valeurs approchées de α et β au millièmè près.

E.7289   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$$

- (a) Justifier que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :
$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{(x^2+2)^2}$$

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-3; 3]$.
- En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $[-3; 3]$

E.7327   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :
 $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt{x}$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés :

L1	$f(x) := (x-1) \cdot \sqrt{x}$ $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt{x}$
L2	$g(x) := \text{Dérivée}[f(x)]$ $g(x) = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$
L3	Résoudre $[f(x)=0]$ $\{x=1\}$
L4	Résoudre $[g(x)=0]$ $\{x=\frac{1}{3}\}$

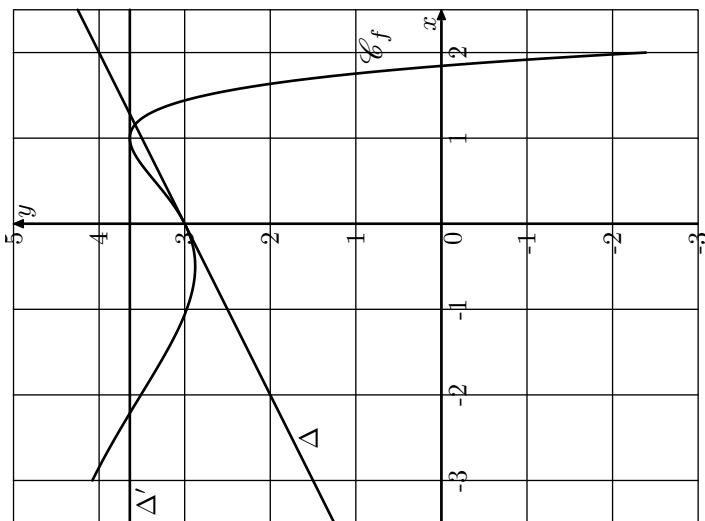
- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- (a) Déterminer les images de $\frac{1}{3}$ et 9 par la fonction f .
(b) En déduire que l'équation $f(x)=6$ admet une unique solution sur $[\frac{1}{3}; 9]$. Puis, justifier que cette équation admet également une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.
(c) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur exacte de l'unique solution de l'équation $f(x)=6$.

E.7365



On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3; 2]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

Le point A de coordonnées $(0; 3)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$. B est le point d'abscisse 1 appartenant à la courbe $\mathcal{C}_f$.



On dispose des informations suivantes :

- la fonction f est strictement décroissante sur les intervalles $[-3; -0,5]$ et $[1; 2]$ et elle est strictement croissante sur $[-0,5; 1]$;
- la fonction f' est strictement décroissante sur les intervalles $[-3; -2]$ et $[\frac{1}{2}; 2]$ et elle est strictement croissante sur $[-2; \frac{1}{2}]$;
- la droite Δ d'équation $y=0,5 \cdot x+3$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A ;
- La tangente Δ' à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

Chaque réponse devra être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte pas de points.

- Donner la valeur de $f'(1)$.
- Quel est le signe de $f'(2)$?
- Donner la valeur de $f'(0)$.
- Donner le nombre de solutions de l'équation $f'(x)=0,5$.

7. Fonctions dérivées et théorème de valeurs intermédiaires

E.7326



On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la fonction dérivée admet le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$	1		5	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

De plus, l'équation $f(x)=0$ admet pour ensemble de solutions : $\mathcal{S} = \{3\}$

Dresser le tableau de signes en justifiant votre démarche.

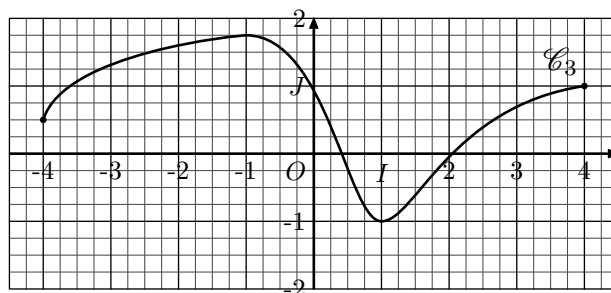
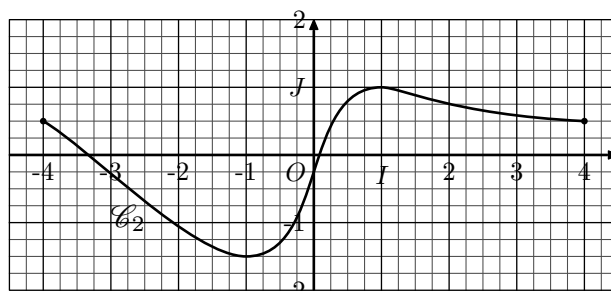
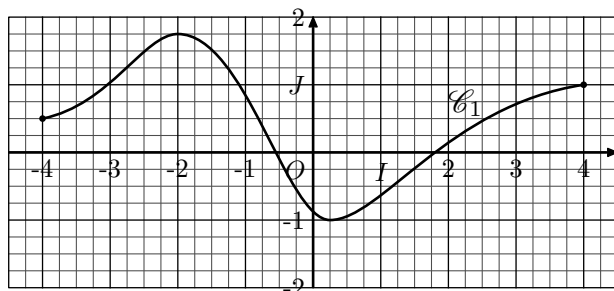
E.7294



On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ dont la fonction dérivée f' admet le tableau de variations ci-dessous :

x	-4	-1	1	4
Variation de f'	0,5	-1,5	1	0,5

Dans un repère $(O; I; J)$ orthogonal, sont représentées les courbes représentatives $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ de trois fonctions.



Parmi ces courbes une seule est la représentation de la fonction f . Laquelle? Justifier votre réponse.

8. Exercices non-classés

E.7058



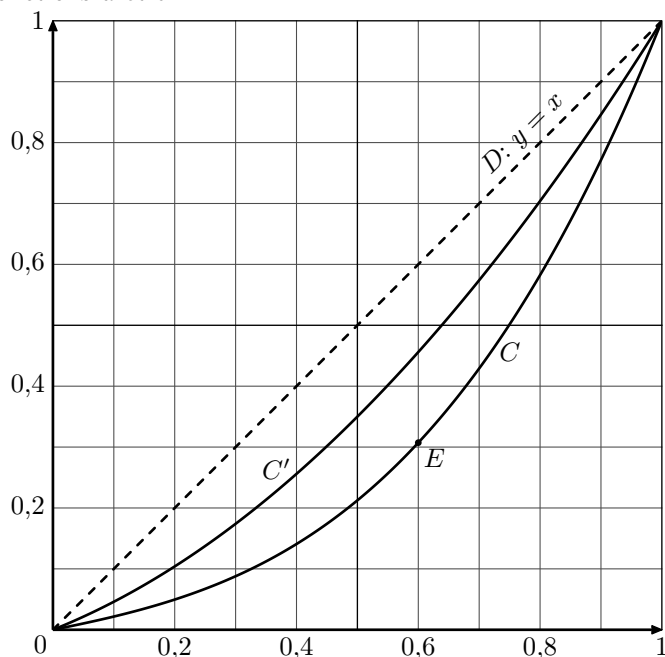
Un cabinet d'audit a été chargé d'étudier la répartition des salaires dans deux filiales d'une entreprise, appelés A et B . Pour l'étude, les salaires sont classés par ordre croissant.

Le cabinet d'audit a modélisé la répartition de salaires par la fonction u pour la filiale A et par la fonction v pour la filiale B .

Les fonctions u et v sont définies sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$u(x) = 0,6 \cdot x^2 + 0,4 \cdot x \quad ; \quad v(x) = 0,7 \cdot x^3 + 0,1 \cdot x^2 + 0,2 \cdot x$$

On a tracé ci-dessous les courbes représentatives C et C' des fonctions u et v .



- 1 Déterminer la courbe représentative de la fonction u en justifiant la réponse.
- 2 Lorsque x représente un pourcentage de salariés, $u(x)$ et $v(x)$ représentent le pourcentage de la masse salariale que se partagent ces salariés dans leurs filiales respectives.

Exemple : pour la courbe C , le point $E(0,60; 0,3072)$ signifie que 60 % des salariés ayant les plus bas salaires se partagent 30,72 % de la masse salariale.

- a Calculer le pourcentage de la masse salariale que se répartissent les 50 % des salariés de la filiale A ayant les plus bas salaires.
- b Pour les 50 % des salariés ayant les plus bas salaires, laquelle des filiales, A ou B , distribue la plus grande part de la masse salariale?
- c Quelle filiale paraît avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire?

E.5558



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x \cdot e^x - e^x - 1$$

- 1 Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty]$
- 2 a Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α , dans $[0; 2]$.
- b À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement à l'unité de α .
- 3 En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[0; +\infty]$.